Αριθμητική Λύση ΜΔΕ
11η εξ αποστάσεως
Τρίτη 12/5/2020
5μμ-7μμ
(zoom meeting)

Μέθοδοι πεπερασμένων για 2D ελλειπτικά προβλήματα

Τα πιο συνηθισμένα ελλειπτικά προβλήματα συνοριακών τιμών έχουν την μορφή:

$$-\operatorname{div}(A\nabla u)+\alpha_0 u = f \quad \text{στο } \Omega \subset \mathbb{R}^d \qquad\qquad -\operatorname{div}(A\nabla u)+a_0 u = f \quad \text{στο } \Omega \subset \mathbb{R}^d$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \qquad\qquad A\frac{\partial u}{\partial n} = A\nabla u\cdot\vec{n} = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega$$

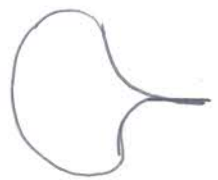
Πρόβλημα ομογενών σ.σ. Dirichlet

Πρόβλημα ομογενών σ.σ. Neumann

$$A:\bar{\Omega}\to\mathbb{R}^{d\times d}. \qquad\qquad \text{και } A=A^T.$$

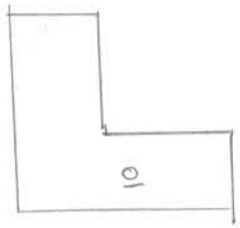
Έστω $f\in L^2(\Omega)$, $a_0\in L^\infty(\Omega)$, $A(x)=(A_{ij}(x))_{i,j}^{d}$ με: $A_{ij}\in C^1(\bar{\Omega})$ για $i,j=1,\dots,d$. Συνήθως $1\le d\le 3$. Εδώ θα περιορίσουμε στην περίπτωση $d=2$. Το Ω είναι συνήθως ένα ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Υποθέτουμε ότι το $\partial\Omega$ ικανοποιεί την cone property και επιπλέον ότι είναι κατά τμήματα C^1.

cone property YES

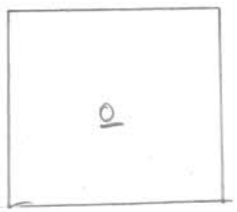


NO

μη κυρτό χωρίο



L-shaped



κυρτό χωρίο

Μας ενδιαφέρει $u \in H^2(\Omega)$ κάτι που μπορεί να συμβεί όταν: $\partial\Omega \in C^1$. Αν δεν ισχύει τότε εξαρτάται από τις γωνίες που σχηματίζονται. π.χ. στο L-shaped χωρίο αυτό δεν ισχύει.

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων δεν απαιτεί $u \in H^2(\Omega)$. Η απαίτηση συνήθως είναι χρήσιμη για την διαδικασία εκτίμησης σφαλμάτων όπως ήδη είδαμε στην περίπτωση $d=1$.

Μια βασική υπόθεση για τον A είναι: ότι είναι ομοιόμορφα θ.ο. δηλ. υπάρχει θετική σταθερά $\hat{C}_A$ τ.ω.

$$y^T A(x)\, y \geq \hat{C}_A |y|^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^d,$$

που συνδέεται με τον "ελλειπτικό" χαρακτήρα της διαφορικής εξίσωσης. Επιπλέον υποθέτουμε ότι:

$$a_0 \geq 0 \quad \text{στο } \bar{\Omega} \qquad \text{σ.σ. Dirichlet}$$

$$a_0 \geq c > 0 \quad \text{στο } \Omega \qquad \text{σ.σ. Neumann}$$

Μεταβολική μορφή προβλήματος.

σ.σ. Dirichlet: Έστω $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ (test function). Πολ/ζουμε και τα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης με φ και ολοκληρώνουμε στο Ω. Έτσι έχουμε:

$$\int_\Omega f\varphi\,dx = -\int_\Omega \operatorname{div}(A\nabla u)\,\varphi\,dx + \int_\Omega a_0 u\varphi\,dx = -\int_\Omega \left[\operatorname{div}(\varphi A\nabla u) - \nabla\varphi^T A\nabla u\right] dx + \int_\Omega a_0 u\varphi\,dx$$

$$= -\int_{\partial\Omega} \varphi A\nabla u\,\vec{n}\,ds + \int_\Omega (A\nabla u, \nabla\varphi)_{\mathbb{R}^d}\,dx + \int_\Omega a_0 u\varphi\,dx$$

$$\overset{\varphi|_{\partial\Omega}=0}{=} \int_\Omega (A\nabla u, \nabla\varphi)_{\mathbb{R}^d}\,dx + \int_\Omega a_0 u\varphi\,dx.$$

σ.σ. Neumann: Έστω $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ (test function). Πολ/ζουμε και τα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης με φ και ολοκληρώνουμε στο Ω. Έτσι:

$$\int_\Omega f\varphi\,dx = -\int_{\partial\Omega} \varphi \underbrace{A\nabla u\,\vec{n}}_{=0}\,ds + \int_\Omega (A\nabla u, \nabla\varphi)_{\mathbb{R}^d}\,dx + \int_\Omega a_0 u\varphi\,dx$$

$$= \int_\Omega (A\nabla u, \nabla\varphi)_{\mathbb{R}^d}\,dx + \int_\Omega a_0 v\varphi\,dx$$

Ορίζουμε: $\mathcal{B} : H^1(\Omega)\times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ με:

$$\mathcal{B}(v,w) = \int_{\Omega} (A\nabla v, \nabla w)_{\mathbb{R}^d}\, dx + \int_{\Omega} a_0 v w \, dx \qquad \forall v,w \in H^1(\Omega).$$

Εδώ $H^1(\Omega)$ είναι ο χώρος των συναρτήσεων $L^1_{loc}(\Omega)$ για τις οποίες υπάρχουν ασθενείς παράγωγοι $1^{ης}$ τάξης δηλ.

$$H^1(\Omega) = \Big\{ v \in L^1_{loc}(\Omega) : \exists\, \varphi_1, \varphi_2 \in L^2(\Omega) \text{ τ.ω } \begin{array}{l} \int_{\Omega} \overset{\partial_{x_1} v}{\overset{\|}{\varphi_1}}\, \varphi \, dx = - \int_{\Omega} v\, \partial_{x_1}\varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega) \\ \int_{\Omega} \underset{\partial_{x_2} v}{\underset{\|}{\varphi_2}}\, \varphi \, dx = - \int_{\Omega} v\, \partial_{x_2}\varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega) \end{array} \Big\}$$

Προφανώς $C^1(\bar{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$. Επίσης ο $H^1(\Omega)$ είναι πλήρης με την νόρμα:

$$\|v\|_1 = \Big\{ \int_{\Omega} |v|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \Big\}^{1/2} \qquad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Εναλλακτικά μπορούμε να ορίσουμε την $\mathcal{B}$ σε συναρτήσεις $v, w \in C^1_p(\bar{\Omega})$ σε δεδομένη πεπερασμένη διαμέριση του Ω σε ανοικτά σύνολα π.χ

Ω

(11. 5

Η μεταβολική ή ασθενής μορφή των προβλημάτων είναι:

A. Βρες $u_D \in H^1(\Omega)$ με $u_D|_{\partial\Omega}=0$ (ή $u_D \in H_0^1(\Omega)$) τ.ω.

$$\mathcal{B}(u_D,\varphi)=\int_\Omega f\varphi\,dx \quad \forall \varphi\in H_0^1(\Omega)$$

B. Βρές $u_N \in H^1(\Omega)$ τ.ω.

$$\mathcal{B}(u_N,\varphi)=\int_\Omega f\varphi\,dx \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

Η ύπαρξη και μοναδικότητα των u_D, u_N εξασφαλίζεται από το Θ. Lax-Milgram;

<u>Θεώρημα:</u> Έστω V χώρος Hilbert, $\mathcal{B}: V\times V \to \mathbb{R}$ μία φραγμένη συνεχής V-ελλειπτική διγραμμική μορφή και $L: V\to\mathbb{R}$ ένα φραγμένο συναρτησιακό. Τότε υπάρχει μοναδικό στοιχείο $u^*\in V$ τ.ω. $\mathcal{B}(u^*,v)=F(v)$ $\forall v\in V$.

<u>Σημ</u> η $\mathcal{B}$ είναι φραγμένη όταν $|\mathcal{B}(v,w)|\le C_B \|v\|_V \|w\|_V$

σ.σ. Dirichlet : $V = H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_1}$

$L(v) = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

Τότε: $|L(v)| = \left|\int_\Omega f v \, dx\right| \underset{C\text{-}S}{\leq} \|f\| \, \|v\| \leq \|f\| \, \|v\|_1, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$, όπου: $\|\psi\| = \left(\int_\Omega |\psi|^2 dx\right)^{1/2} \quad \forall \psi \in L^2(\Omega)$

Επίσης:

$\mathcal{B}(v,v) = \int_\Omega (A\nabla v, \nabla v)_2 \, dx + \int_\Omega a_0 v^2 dx \geq \int_\Omega \hat{c}_A |\nabla v|^2 dx = \hat{c}_A \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \geq c \, \|v\|_1^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

καθώς ισχύει η ανισότητα Poincaré-Friedrichs: $\|v\| \leq C_\Omega \|v'\| \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

σ.σ. Neuman: $V = H^1(\Omega) = \overline{C^1(\bar{\Omega})}^{\|\cdot\|_1}$

$L(v) = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega)$ και $|L(v)| \leq \|f\| \, \|v\|_1 \quad \forall v \in H^1(\Omega)$

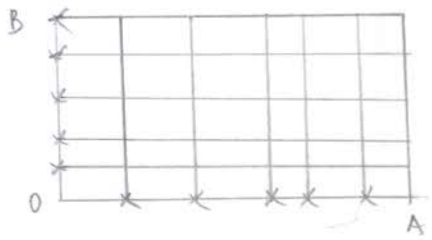
$\mathcal{B}(v,v) = \int_\Omega a_0 v^2 dx + \int_\Omega (A\nabla u, \nabla u) \, dx \geq \hat{c}_A \|\nabla u\|^2 + c\,\|v\|^2 \geq c\|v\|_1^2 \quad \forall v \in H^1(\Omega)$.

Θα μας απασχολήσουν δύο περιπτώσεις διαμέρισης χωρίων:

1

$\underline{\Omega} = [0,A] \times [0,B]$

τετραγωνικά χωρία



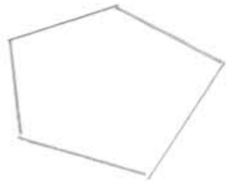
διαμέριση σε παραλληλόγραμμα

με βάση μία μη ομοιόμορφη διαμέριση του $[0,A]$ και μία μη ομοιόμορφη διαμέριση του $[0,B]$

δηλ. $D_{j,\ell} = [x_j, x_{j+1}] \times [y_\ell, y_{\ell+1}]$

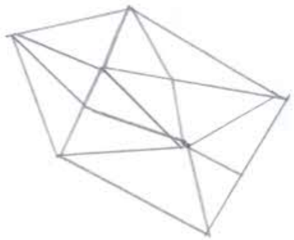
$\underline{\Omega} = \bigcup_{j,\ell} D_{j,\ell}$

2



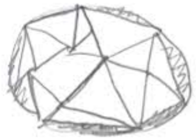
Πολυγωνικά χωρία

(που περιλαμβάνουν τετράγωνα)



διαμέριση σε τρίγωνα ή αλλιώς τριγωνισμός του πολυγωνικού χωρίου.

ο τριγωνισμός μπορεί να εφαρμοστεί και σε μη πολυγωνικά χωρία αλλά χρειάζεται ειδικός χειρισμός στο $\partial\underline{\Omega}$



στην περίπτωση σ.σ. Dirichlet.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε χώρους συναρτήσεων δύο μεταβλητών οι οποίες να είναι συνεχείς και κατά τμήματα κατάλληλα πολυώνυμα δύο μεταβλητών. Υπάρχουν δύο ειδών πολυωνυμικοί χώροι:

$$P^m = \text{span}\left\{ x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} : \begin{array}{c} 0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq m \\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}_0 \end{array} \right\}$$

$$Q^m = \text{span}\left\{ x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} : \begin{array}{c} 0 \leq \alpha_1 \leq m \\ 0 \leq \alpha_2 \leq m \\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}_0 \end{array} \right\}$$

Οι P^m ορίζονται σε $\underbrace{\text{τρίγωνα}}_{\text{simplex}}$ και οι Q^m σε $\underbrace{\text{παραλληλόγραμμα}}_{\text{παραλληλότοπα}}$ της μορφής $[\alpha,b]\times[\gamma,\delta]$.

Θα περιοριστούμε στην περίπτωση $m=1$.

Τυπική μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων.

A. Συνοριακές συνθήκες Dirichlet (conforming).

Έστω $\hat{V}_D \subset H_0^1(\Omega)$ πεπερασμένης διάστασης. Ψάχνουμε: $\hat{u}_D \in \hat{V}_D$ τ.ω

$$\mathcal{B}(\hat{u}_D, \varphi) = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \hat{V}_D$$

Σημ. conforming επειδή κάθε $\varphi \in \hat{V}_D$ έχει την ιδιότητα $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$.
υπάρχουν non-conforming μέθοδοι πεπερασμένων στοιχείων όπου το $\mathcal{B}$ ορίζεται διαφορετικά και εξαρτάται από το $\hat{V}_D$ δηλ. από τη διαμέριση του Ω.

B. Συνοριακές συνθήκες Neumann

Έστω $\hat{V}_N \subset H^1(\Omega)$ πεπερασμένης διάστασης. Ψάχνουμε $\hat{u}_N \in \hat{V}_N$ τ.ω.

$$\mathcal{B}(\hat{u}_N, \varphi) = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \hat{V}_N.$$

Γιατί η μέθοδος πεπ. στοιχείων είναι καλά ορισμένη?

Έστω: $\overline{W} = \hat{V}_D$ ή $\hat{V}_N$, $N = \dim(\overline{W})$ και $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N}$ μία βάση του $\overline{W}$. Αν $w = \hat{u}_D$ ή $\hat{u}_N$, αντίστοιχα, τότε: $w = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \varphi_j$. Τα $(\lambda_j)_{j=1}^{N}$ προσδιορίζονται από την απαίτηση:

$$\mathcal{B}\left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \varphi_j, \varphi\right) = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in \overline{W}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{B}\left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \varphi_j, \varphi_i\right) = \int_{\Omega} f \varphi_i \quad i = 1, \dots, N.$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{N} \mathcal{B}(\varphi_j, \varphi_i) \lambda_j = \int_{\Omega} f \varphi_i \quad i = 1, \dots, N.$$

Αν $\mathbb{B} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ με: $B_{k\mu} = \mathcal{B}(\varphi_\mu, \varphi_k)$ και $b_i = \int_{\Omega} f \varphi_i$ $i = 1, \dots, N$.

καταλήγουμε στο γραμμ. σύστημα: $\mathbb{B} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix} = b$.

λόγω της ιδιότητας της A (βλ. σελ. 11.2)

11,1

(*) Θα δείξουμε ότι ο πυρήνας ker(B) είναι μηδενικός. Έστω $z \in \ker(B)$. Τότε

$$Bz=0 \Rightarrow z^T B z = 0 \Rightarrow 0 = \mathcal{B}\Big(\sum_{i=1}^N z_i\varphi_i, \sum_{i=1}^N z_i\varphi_i\Big) \geq \underbrace{c_1 \Big\|\sum_{i=1}^N z_i\varphi_i\Big\|_1^2}$$

ο $\mathcal{B}$ είναι θ.ο.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N z_i\varphi_i = 0 \underset{\substack{(\varphi_i)_{i=1}^N \\ \text{γραμμ. ανεξ.}}}{\Longrightarrow} z_i = 0,\ i=1,\dots,N$$

Επιπλέον ο $\mathcal{B}$ είναι συμμετρικός:

$$\mathcal{B}(\varphi_i,\varphi_j) = \int_\Omega a_0\varphi_i\varphi_j\,dx + \int_\Omega (A\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_i)\,dx = \int_\Omega a_0\varphi_j\varphi_i\,dx + \int_\Omega (\nabla\varphi_i, A^T\nabla\varphi_j)_{\mathbb{R}^d}\,dx$$

$$= \int_\Omega a_0\varphi_i\varphi_j\,dx + \int_\Omega (A\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_i)_{\mathbb{R}^d}\,dx = \mathcal{B}(\varphi_j,\varphi_i), \quad i,j=1,\dots,N.$$

Επομένως το $B\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_N\end{pmatrix} = b$ μπορεί να λυθεί με κατάλληλη επαναληπτική μέθοδο

(11.12)

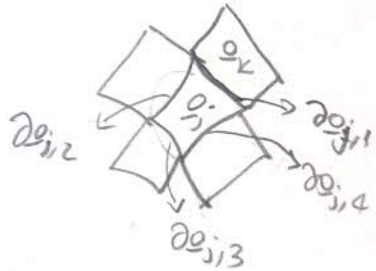
Έστω $\underline{O}=\bigcup_{j=1}^{M}\underline{O}_j \to$ κλειστά υποσύνολα με $\mathring{\underline{O}}_j\cap\mathring{\underline{O}}_k=\emptyset$ και το $\underline{O}_j\cap\underline{O}_k=\partial\underline{O}_j\cap\partial\underline{O}_k$. Έστω: $\varphi\in C(\overline{\underline{O}})$ και $\varphi|_{\underline{O}_j}\in C^1(\overline{\underline{O}}_j)$ για $j=1,\dots,M$. Τότε:

$n_{j,1}+n_{k,1}=0$

$$\int_{\underline{O}} f\varphi\,dx = \int_{\underline{O}} a_0 u\varphi\,dx - \int_{\underline{O}} \operatorname{div}(A\nabla u)\varphi\,dx$$

$$= \int_{\underline{O}} a_0 u\varphi\,dx - \sum_{j=1}^{M}\int_{\underline{O}_j} \operatorname{div}(A\nabla u)\varphi\,dx$$

$$= \int_{\underline{O}} a_0 u\varphi\,dx + \sum_{j=1}^{M}\left(\int_{\underline{O}_j}(A\nabla u,\nabla\varphi)_{\mathbb{R}^n}\,dx - \int_{\partial\underline{O}_j}\varphi A\nabla u\vec{n}\,ds\right)$$



$$= B(u,\varphi) - \sum_{j=1}^{M}\int_{\partial\underline{O}_j}\varphi A\nabla u\vec{n}\,ds = B(u,\varphi) - \sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{\lambda_j}\int_{\partial\underline{O}_{jk}}\varphi A\nabla u\,\vec{n}_{jk}\,ds = B(u,\varphi)$$

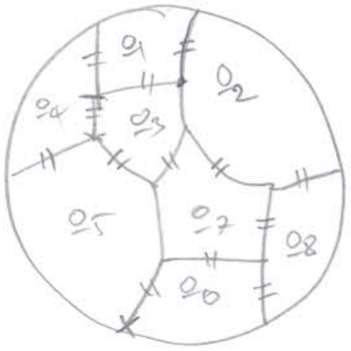
όπου $\partial\underline{O}_{jk}$ τμήμα του $\partial\underline{O}_j$ το οποίο είναι κοινό μόνο με το σύνορο άλλου υποχωρίου άρα για κάθε $\partial\underline{O}_{jk}$ υπάρχει ένα μόνο $\partial\underline{O}_{j',k'}$ όπου το $\vec{n}$ αλλάζει διεύθυνση άρα:

για κάθε i

$$\int_{\partial\underline{O}_{jk}} + \int_{\partial\underline{O}_{j'k'}} = 0$$

τα υπόλοιπα είναι πάνω σε τμήματα του $\partial\underline{O}$ άρα είναι μηδενικά.

(11.13.



$\underline{o}_1$
$\underline{o}_2$
$\underline{o}_3$
$\underline{o}_4$
$\underline{o}_5$
$\underline{o}_7$
$\underline{o}_8$
$\underline{o}_0$