ΜΕΜ-293 Θεωρία Βελτιστοποίησης

10η εξ αποστάσεως διάλεξη

Δευτέρα 11/5/2020
(5μμ - 7μμ)

Zoom.

Έστω x^B μια μη εκφυλισμένη βασική λύση και $(x^B_j)_{j\in I}$ οι βασικές συντεταγμένες της.

B.10.1

Ας υποθέσουμε ότι στις βασικές στήλες $B=(a_i)_{i\in I}$ εξέρχεται η a_{j_0} και εισέρχεται η a_{k_0}. Για το επόμενο βήμα (tableaux) της μεθόδου Simplex χρειάζεται να υπολογίσουμε τους συντελεστές των στηλών του A ως προς τη νέα βάση $\tilde{B}=\{a_i : i\in (I\setminus\{j_0\})\cup\{k_0\}\}$.

Έστω a_μ μία στήλη του A. Η αναπαράσταση του a_μ ως προς την παλιά βάση $(a_i)_{i\in I}$ είναι:

$$a_\mu = \sum_{j\in I} y_j^\mu a_j = \sum_{\substack{j\in I\\ j\neq j_0}} y_j^\mu a_j + y_{j_0}^\mu a_{j_0} \qquad (1)$$

Έτσι για τη στήλη a_{k_0} που εισέρχεται στη βάση έχουμε:

$$a_{k_0} = \sum_{j\in I} y_j^{k_0} a_j = \sum_{\substack{j\in I\\ j\neq j_0}} y_j^{k_0} a_j + \underbrace{y_{j_0}^{k_0}}_{>0} a_{j_0} \quad \xleftarrow{\text{οδηγός}}$$

$$\Rightarrow a_{j_0} = \frac{1}{y_{j_0}^{k_0}} a_{k_0} - \sum_{\substack{j\in I\\ j\neq j_0}} \frac{y_j^{k_0}}{y_{j_0}^{k_0}} a_j \qquad (2)$$

Συνδυάζοντας τις (1) και (2), έπεται $a_\mu = \sum_{\substack{j\in I\\ j\neq j_0}} y_j^\mu a_j + y_{j_0}^\mu \left[\frac{1}{y_{j_0}^{k_0}} a_{k_0} - \sum_{\substack{j\in I\\ j\neq j_0}} \frac{y_j^{k_0}}{y_{j_0}^{k_0}} a_j\right] \Rightarrow$

οι βασικές συντεταγμένες της a_μ ως προς την νέα βάση

B.10.2α

$$\Rightarrow a_\mu = \sum_{\substack{j\in I \\ j\neq j_0}} \left(y_j^\mu - y_{j_0}^\mu \cdot \frac{y_j^{k_0}}{y_{j_0}^{k_0}} \right) a_j + \frac{y_{j_0}^\mu}{y_{j_0}^{k_0}} a_{k_0} = \sum_{j\in (I\setminus\{j_0\})\cup\{k_0\}} \tilde{y}_j^\mu a_j$$

$$\Rightarrow \tilde{y}_j^\mu = \begin{cases} y_j^\mu - \dfrac{y_{j_0}^\mu}{y_{j_0}^{k_0}} y_j^{k_0}, & j\in I\setminus\{j_0\} \\ \dfrac{y_{j_0}^\mu}{y_{j_0}^{k_0}}, & j=k_0 \end{cases}, \quad j\in (I\setminus\{j_0\})\cup\{k_0\}$$

"παλιά j"

"νέο j"

Το $y_{j_0}^{k_0}$ καλείται "οδηγός (pivot)"

Ξέρουμε ότι $z^k - c_k = 0$ όταν $k\in I$. Το ερώτημα είναι πως αλλάζουν τα $z^k - c_k$ όταν αλλάζει η βάση

$$\tilde{z}^\mu = f(\tilde{y}^\mu) = c_{k_0} \frac{y_{j_0}^\mu}{y_{j_0}^{k_0}} + \sum_{\substack{j\in I \\ j\neq j_0}} c_j \left(y_j^\mu - \frac{y_{j_0}^\mu}{y_{j_0}^{k_0}} y_j^{k_0} \right) = \sum_{\substack{j\in I \\ j\neq j_0}} c_j y_j^\mu - \frac{y_{j_0}^\mu}{y_{j_0}^{k_0}} \sum_{\substack{j\in I \\ j\neq j_0}} c_j y_j^{k_0} + c_{k_0} \frac{y_{j_0}^\mu}{y_{j_0}^{k_0}}$$

$$= f(y^\mu) - c_{j_0} y_{j_0}^\mu - \frac{y_{j_0}^\mu}{y_{j_0}^{k_0}} \left(f(y^{k_0}) - c_{j_0} y_{j_0}^{k_0} \right) + c_{k_0} \frac{y_{j_0}^\mu}{y_{j_0}^{k_0}}$$

$$= f(y^\mu) - \frac{y_{j_0}^\mu}{y_{j_0}^{k_0}} f(y^{k_0}) + c_{k_0} \frac{y_{j_0}^\mu}{y_{j_0}^{k_0}}$$

Άρα: $$\boxed{\tilde{z}^\mu - c_\mu = (z^\mu - c_\mu) - \frac{y_{j_0}^\mu}{y_{j_0}^{k_0}} (z^{k_0} - c_{k_0})}$$

tableau 2

παλιά τιμή / οδηγός

		c	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	
B	C^B	x^B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ
a_1	c_1	w_1^B	$\frac{y_3^1}{y_3^1}$	$\frac{y_3^2}{y_3^1}$	$\frac{y_3^3}{y_3^1}$	$\frac{y_3^4}{y_3^1}$	$\frac{y_3^5}{y_3^1}$	
a_4	c_4	w_4^B						
a_5	c_5	w_5^B			•			
		$f(w^B)$						z^k
			0		•	0	0	z^k-c_k

$$\overbrace{y_5^3}^{\text{tableau 1}} - \boxed{\frac{y_3^3}{y_3^1}} \cdot \overbrace{y_5^1}^{\text{tableau 1}}$$

$$\underbrace{(z^i-c^i)}_{\text{tableau 1}} - \boxed{\frac{y_3^3}{y_3^1}} \underbrace{(z^1-c^1)}_{\text{tableau 1}}$$

Στο προηγούμενο tableau 1 καταλήξαμε στην απόφαση ότι η στήλη a_1 εισέρχεται στη βάση στη θέση της a_3.

Στο επόμενο tableau 2 κάνουμε τα ακόλουθα:

- Βάζουμε το a_1 στη θέση του a_3 στη στήλη κάτω από το B.
- Στη στήλη κάτω από το x^B βάζουμε τη νέα βασική εφικτή λύση w^B που βρήκαμε.
- Οι συντελεστές στη γραμμή αριστερά από το a_1 (γραμμή 1) προκύπτουν διαιρώντας τους συντελεστές της γραμμής δίπλα από το a_3 στο tableau 1 με τον οδηγό y_3^1.
- Στη γραμμή δίπλα από το a_4 στην a_i στήλη θα έχουμε την τιμή y_4^i του tableau 1 στο ίδιο κουτάκι μείον την τιμή $\frac{y_3^i}{y_{j_0}^{k_0}}$ που βρίσκεται στο κουτάκι της γραμμής δίπλα στην a_1 και κάτω από την a_i στήλη του tableau 2 πολλαπλασιασμένη από την τιμή y_4^1 που είναι ο συντελεστής στο tableau 1 κάτω από την στήλη a_1 στη γραμμή δίπλα από το a_4, δηλ. $y_4^i - \frac{y_3^i}{y_{j_0}^{k_0}} \cdot y_4^1$.
- Ανάλογα πράττουμε στη γραμμή a_5 (δηλ. 5 στη θέση 4).
- Στις βασικές στήλες η τιμή z^k-c_k είναι πάντα 0. Στη μη βασική στήλη a_i η τιμή θα είναι η παλιά στο ίδιο κουτάκι μείον την τιμή στο κουτάκι της γραμμής a_1 και κάτω από την a_i του tableau 2 πολλαπλασιασμένη με τη τιμή z^1-c_1 του tableau 1, δηλ. $\underbrace{(z^i-c_i)}_{\text{tableau 1}} - \frac{y_3^i}{y_3^1} \underbrace{(z^1-c_1)}_{\text{tableau 1}}$

Παρακάτω συνεχίζουμε την ανάπτυξη της μεθόδου Simplex:

B.10.3

tableau 2

		c	-5	4	0	0	0	
B	c^B	x^B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ
a_1	-5	6	1	-1	1	0	0	—
a_4	0	6	0	$\boxed{1}$	-3	1	0	6
a_5	0	21	0	1	2	0	1	21
		-30	-5	5	-5	0	0	z^k
			0	1	-5	0	0	$z^k - c_k$
			✓	$k_0=2$	✓	✓	✓	

$j_0 = 4$

νέος οδηγός $y^2_4 = 1$.

$a^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\underbrace{y^{k_0}_{j_0} = 1}_{\text{οδηγός tableau 1}}$

Στο επόμενο tableau φεύγει η στήλη $a_{k_0} = a_4$ και αντικαθίσταται από την $a_{j_0} = a_4$.

$$\theta^0 = \min\left\{ \frac{x^B_j}{y^2_j} : j = 1,4,5 \text{ και } y^2_j \right\}$$

$$= \min\left\{ \underset{j=4}{\frac{6}{1}}, \underset{j=5}{\frac{21}{1}} \right\} = 6, \text{ άρα } j_0 = 4$$

tableau 2

Η νέα βάση είναι $B = \{a_1, a_4, a_5\}$ με αντίστοιχη μη εκφυλισμένη βασική λύση: $w^B = 6e_1 + 6e_4 + 21e_5$.

1ος τρόπος:

$$a^2 = \begin{array}{c} \\ i=3 \\ i=4 \\ i=5 \end{array} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} i=1 \\ i=4 \\ i=5 \end{array} \begin{bmatrix} -1/1 \\ -2 - 3\cdot(-1) \\ 3 - (-2)\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_3 = \begin{array}{c} i=3 \\ i=4 \\ i=5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} i=1 \\ i=4 \\ i=5 \end{array} \begin{bmatrix} 1/1 \\ 0 - 3\cdot 1 \\ 0 - (-2)\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

→ οι συντελεστές από τη στήλη που μπαίνει στη βάση δηλ. την a^1

2ος τρόπος

Βρίσκουμε τους συντελεστές των a_2, a_3 ως προς τη νέα βάση $\{a_1, a_4, a_5\}$ λύνοντας τα αντίστοιχα γραμμικά συστήματα. Πρώτα παρατηρούμε ότι:

$$\lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^4 + \lambda_3 a^5 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 \\ -2\lambda_1 + \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Άρα: $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 \\ -2\lambda_1 + \lambda_3 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}^{a^3} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -3 \\ \lambda_3 = 2 \end{array}$

$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 \\ -2\lambda_1 + \lambda_3 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}}^{a^2} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 1 \end{array}$

tableau 3

		C	-5	4	0	0	0	
B	c_B	x^B	a_1	a_2	$\boxed{a_3}$	$\boxed{a_4}$	a_5	
a_1	-5	12	1	0	-2	1	0	
a_2	4	6	0	1	-3	1	0	
a_5	0	15	0	0	5	-1	1	
		-36	-5	4	-2	-1	0	z^k
			0	0	-2	-1	0	$z^k - c^k$
			✓	✓	✓	✓	✓	

tableau 3

$$a^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

οδηγός: $y_4^2 = 1$

$$a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} i=1 \\ i=4 \\ i=5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} i=1 \\ i=2 \\ i=5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 - (-1)(-3) \\ -3/1 \\ 2 - 1\,(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} i=1 \\ i=4 \\ i=5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} i=1 \\ i=2 \\ i=5 \end{array} \begin{bmatrix} 0 - (-1)\,1 \\ 1/1 \\ 0 - 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

άρα η $x^B = (12, 4, 0, 0, 15)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f στο S.

Επειδή επικρατεί "συνωστισμός" σε κάθε tableau μπορούμε να κρατάμε σε κάθε στάδιο τις στήλες που δεν είναι βασικές π.χ. στο tableau 3 τις a_3 και a_4.

M-μέθοδος

Ένα πρακτικό πρόβλημα είναι η εύρεση μιας αρχικής μη εκφυλισμένης βασικής λύσης όταν αυτή δεν είναι προφανής. Η M-μέθοδος βασίζεται στις ακόλουθες ενέργειες:

α) προσθέτουμε επιπλέον μεταβλητές έτσι ώστε να εμφανιστούν οι στήλες του $m \times m$ μοναδιαίου στον πίνακα A που περιγράφει τους ισοτικούς περιορισμούς.

β) για κάθε νέα μεταβλητή x_ℓ προσθέτουμε στην f τον όρο $M \cdot x_\ell$ δηλ. $c_\ell = M$, όπου $M > 0$ μια παράμετρος που πρέπει να είναι μεγαλύτερη ίση από μια τιμή $M_0 > 0$ που θα καθοριστεί κατά τη διαδικασία.

Ας δούμε τι σημαίνουν τα παραπάνω σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω ότι έχουμε το ακόλουθο π.γ.π. :

$$\min(-2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4)$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

$$2x_3 - 3x_4 = 3$$

$$x_i \geq 0 \text{ για } i = 1,2,3,4$$

$c = (-2, 3, -3, -2)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4} \qquad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} \geq 0 \in \mathbb{R}^3 \qquad m = 3, n = 2$$

με στήλες $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{a}_4$

Έχουμε: $\text{rank}(A) = 3$, επειδή οι 3 πρώτες στήλες είναι γραμμ. ανεξάρτητες.

(B.10.6

Παρατηρούμε ότι στον πίνακα A εμφανίζεται μόνο η 1η στήλη του μοναδιαίου 3×3 (βλ. στήλη 1). Επειδή δεν είναι προφανής μία μη εκφυλισμένη βασική λύση, εφαρμόζουμε τη M-μέθοδο, και προσθέτουμε μεταβλητές x_5, x_6 στο 2ο και 3ο ισοτικό περιορισμό ώστε ο νέος πίνακας A να έχει στις στήλες του τις στήλες του 3×3 μοναδιαίου πίνακα, δηλ.

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \quad\quad &= 8 \\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \quad &= 6 \\
2x_3 - 3x_4 \quad + x_6 &= 3
\end{aligned}
\qquad
A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 6}
$$

επιπλέον:

$$
f_M(x) := f(x) + Mx_5 + Mx_6 = \underbrace{-2}_{c_1} x_1 \underbrace{+3}_{c_2} x_2 \underbrace{-3}_{c_3} x_3 \underbrace{-2}_{c_4} x_4 + \underbrace{M}_{c_5} x_5 + \underbrace{M}_{c_6} x_6 \quad , \quad M >> 0.
$$

Στη συνέχεια θα λύσουμε το παραπάνω πρόβλημα με τη μέθοδο Simplex προσδιορίζοντας $M_0 > 0$ τ.ω ότι κάνουμε να ισχύει για κάθε $M \geq M_0$. Αν καταλήξουμε σε μία βέλτιστη βασική εφικτή λύση με βασικές συντεταγμένες που δεν αντιστοιχούν στις x_5, x_6 τότε έχουμε μία βέλτιστη βασική εφικτή λύση του αρχικού προβλήματος. Διαφορετικά συμπεραίνουμε ότι το αρχικό πρόβλημα δεν έχει λύση.

B 10.7

		c	3	-3	-2	
B	C_B	x_B	a_2	a_3	a_4	θ
a_1	-2	8	2	1	2	8
a_5	M	6	1	1	1	6
a_6	M	3	0	$\boxed{2}$	-3	3/2
		9M-16	M-4	3M-2	-2M-4	Z^K
			M-7	3M+1	-2M-2	$Z^K - C_K$

$j_0=6$, $k_0=3$, οδηγός $y_6^3=2$

		C	+3	M	-2	
B	C_B	x_B	a_2	a_6	a_4	θ
a_1	-2	13/2	2	-1/2	7/2	13/7
a_5	M	9/2	1	-1/2	$\boxed{5/2}$	9/5
a_3	-3	3/2	0	1/2	-3/2	—
		$\frac{9M-35}{2}$	M-4	$-\frac{1+M}{2}$	$\frac{5}{2}(M-1)$	Z^K
			M-7	$-\frac{3M}{2}-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}M-\frac{1}{2}$	$Z^K - C_K$

$j_0=5$, $k_0=4$, οδηγός $y_5^4=5/2$

		C	3	M	M	
B	C_B	x_B	a_2	a_6	a_5	θ
a_1	-2	1/5	3/5	1/5	-7/5	
a_4	-2	9/5	2/5	-1/5	2/5	
a_3	-3	21/5	3/5	1/5	3/5	
		-83/5	-19/5	-3/5	1/5	Z^K
			-19/5-3	-3/5-M	1/5-M	$Z^K - C_K$
			<0	<0	<0	

Έτσι: $x^B = (1/5, 0, 21/5, 9/5, 0, 0)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f, καθώς οι επιπλέον συντεταγμένες x_5^B, x_6^B είναι μηδενικές

tableau 1

$x^B = (8,0,0,0,6,3)$

$Z^2 - C_2 = M-7$, $\underset{>0}{Z^3 - C_3 = 3M+1}$, $\underset{<0}{Z^4 - C_4 = -2M-2}$. Επομένως, για $M \geq 8$, έχουμε: $Z^2 - C_2 = M-7 > 0$. Επειδή: $3M+1 > M-7 \Leftrightarrow M > -8$, επειδή έχουμε δύο θετικά $Z^k - C_k$, διαλέγουμε εκείνο με την μεγαλύτερη θετική τιμή. Επομένως, $k_0 = 3$ (in) και

$\theta^0 = \min\left\{\frac{x_j^B}{y_j^3} : j=1,5,6 \text{ και } y_j^3 > 0\right\} = \min\left\{\frac{8}{1}, \frac{6}{1}, \frac{3}{2}\right\} = \underbrace{\frac{3}{2}}_{j=6}$, άρα

$j_0 = 6$ (out). Επομένως φεύγει η a_6 και μπαίνει η a_3 στην βάση B. Η νέα βασική εφικτή λύση είναι: $W^B = x^B - \frac{3}{2}y^3 + \frac{3}{2}e_3$

$= 8e_1 + 6e_5 + 3e_6 - \frac{3}{2}(e_1 + e_5 + 2e_6) + \frac{3}{2}e_3 = \frac{3}{2}e_3 + \frac{13}{2}e_1 + \frac{9}{2}e_5$

tableau 2

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}}_{a_3} \quad \underbrace{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}}_{a_2} \longrightarrow \begin{bmatrix}2-0\cdot1\\1-0\cdot1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

οδηγός $y_6^3=2$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}_{a_6} \longrightarrow \begin{bmatrix}0-\frac{1}{2}\cdot1\\0-\frac{1}{2}\cdot1\\\frac{1}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix}}_{a_4} \longrightarrow \begin{bmatrix}2+\frac{3}{2}\cdot1\\1+\frac{3}{2}\cdot1\\-\frac{3}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{7}{2}\\\frac{5}{2}\\-\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

Έχοντας $M \geq 8$, έχουμε $Z^3 - C_3 = M-7 > 0$, $Z^6 - C_6 = -\frac{3M}{2} - \frac{1}{2} < 0$, $Z^4 - C_4 = \frac{5}{2}M - \frac{1}{2} > 0$. Επειδή $\frac{5M}{2} - \frac{1}{2} > M-7 \Leftrightarrow \frac{3}{2}M > -\frac{13}{2}$, διαλέγουμε $k_0 = 4$ (in). Έτσι $\theta^0 = \min\left\{\frac{13/2}{7/2}, \frac{9/2}{5/2}\right\} = \min\left\{\frac{13}{7}, \frac{9}{5}\right\} = \underbrace{\frac{9}{5}}_{j=5}$. Έτσι $j_0 = 5$ (out).

$W^B = x^B - \frac{9}{5}y^4 + \frac{9}{5}e_4 = \frac{13}{2}e_1 + \frac{9}{2}e_5 + \frac{3}{2}e_3 - \frac{9}{5}\left(\frac{7}{2}e_1 + \frac{5}{2}e_5 - \frac{3}{2}e_3\right) + \frac{9}{5}e_4$

$= \frac{9}{5}e_4 + \left(\frac{15}{10} + \frac{27}{10}\right)e_3 + \left(\frac{65}{10} - \frac{63}{10}\right)e_1 = \frac{9}{5}e_4 + \frac{21}{5}e_3 + \frac{1}{5}e_1$ Ο οδηγός είναι $y_5^4 = 5/2$

tableau 3

$$a_4 = \begin{bmatrix}\frac{7}{2}\\\frac{5}{2}\\-\frac{3}{2}\end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}2-\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{2}\\\frac{2}{5}\\0+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3/5\\2/5\\3/5\end{bmatrix}$$

$$a_5 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}0-\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{2}\\\frac{2}{5}\\0+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7/5\\2/5\\3/5\end{bmatrix}$$

$$a_6 = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}(-\frac{1}{5})\\-\frac{1}{5}\\\frac{1}{2}-(-\frac{1}{5})(-\frac{3}{2})\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{7}{10}-\frac{5}{10}\\-\frac{1}{5}\\\frac{5}{10}-\frac{3}{10}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2}{10}\\-\frac{1}{5}\\\frac{2}{10}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5}\\\frac{1}{5}\end{bmatrix}$$