ΜΕΜ-293 ΘΕΩΡΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

11η εξ αποστάσεως διάλεξη

Πέμπτη 14/5/2020

(5-7 μμ)

zoom

B.11.1

Η M- μέθοδος

Έστω ότι έχουμε ένα αρχικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού της μορφής:

$$\min_{x \in S} f(x)$$

όπου: $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ με: $f(x) = \langle c, x \rangle$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ για κάποιο δοθέν μη μηδενικό διάνυσμα $c \in \mathbb{R}^n$,

και $S := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0 \text{ και } Ax = b\}$ όπου: $b \in \mathbb{R}^m$ και $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ με $\operatorname{rank}(A) = m$.

Υποθέτουμε ότι p στήλες του A, με: $0 \leq p < m$, είναι διαφορετικές μεταξύ τους στήλες του μοναδιαίου $m \times m$ πίνακα $I_m := [e_1 | e_2 | \cdots | e_m]$. Στη συνέχεια ορίζουμε $l := m - p$ και εισάγουμε l επιπλέον μεταβλητές $(x_{n+i})_{i=1}^{l}$, και, για δοθέν $M > 0$, διαμορφώνουμε ένα άλλο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού το οποίο έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\min_{y \in \hat{S}} f_M(y) \qquad (M\text{-πρόβλημα})$$

όπου: $f_M : \mathbb{R}^{n+l} \longrightarrow \mathbb{R}$ με: $f_M(y) = f(y_1, \dots, y_n) + M \sum_{i=1}^{l} y_{n+i}$ $\forall y \in \mathbb{R}^{n+l}$, και:

$\hat{S} := \{y \in \mathbb{R}^{n+l} : [A | e_{k_1} \cdots e_{k_l}] y = b \text{ και } y \geq 0\}$ με $(e_{k_j})_{j=1}^{l}$ να είναι διαφορετικές μεταξύ τους στήλες του I_m οι οποίες δεν είναι στήλες του A.

B.11.2

Πρόταση 1: $\hat{S} \neq \phi$

Απόδειξη: Ο πίνακας $\Gamma := [A | e_{k_1} \cdots e_{k_\ell}] \in \mathbb{R}^{m\times(n+\ell)}$ έχει μεταξύ των στηλών του όλες τις στήλες του I_m.
Έστω ότι, για $i=1,\dots,m$, η στήλη e_i του I_m βρίσκεται στη στήλη γ_{μ_i} του Γ. Στη συνέχεια ορίζουμε $y \in \mathbb{R}^{n+\ell}$ ως εξής: $y = \sum_{i=1}^{m} b_i \hat{e}_{\mu_i}$ όπου $(\hat{e}_\lambda)_{\lambda=1}^{n}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.
Επειδή, $b \geq 0$, έπεται $y \geq 0$. Επιπλέον, έχουμε: $\Gamma y = \sum_{i=1}^{m} b_i \Gamma \hat{e}_{\mu_i} = \sum_{i=1}^{m} b_i \gamma_{\mu_i} = \sum_{i=1}^{m} b_i e_i = b$.
Επομένως, $y \in \hat{S}$. ∎

Πρόταση 2: Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $M_0 > 0$, η f_{M_0} έχει σημείο ολικού ελαχίστου y^* στο $\hat{S}$ με: $y^*_{n+j} = 0$ για $j=1,\dots,\ell$.
Τότε το διάνυσμα $x^* \in \mathbb{R}^n$ με $x^*_j = y^*_j$ για $j=1,\dots,n$, είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f στο S.
Απόδειξη: Επειδή $y^* \in \hat{S}$ έχουμε $[A | e_{k_1} \cdots e_{k_\ell}] y^* = b \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y^*_i a_i + \sum_{j=1}^{\ell} \underbrace{y^*_{n+j}}_{0} e_{k_j} = b \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y^*_i a_i = b \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x^*_i a_i = b \Rightarrow Ax = b$.
Επειδή $y^* \geq 0$, έπεται ότι $x^* \geq 0$. Άρα $x^* \in S$. Επιπλέον έχουμε: $f_{M_0}(y^*) = f(y^*_1,\dots,y^*_n) = f(x^*)$. Επειδή το y^* είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f_{M_0} στο $\hat{S}$, ισχύει ότι $f_{M_0}(y) \geq f_{M_0}(y^*)\ \forall y \in \hat{S} \Rightarrow f_{M_0}(y) \geq f(x^*)\ \forall y \in \hat{S}$. Έστω $x \in S$. Τότε ορίζουμε $y \in \mathbb{R}^{n+\ell}$ ως εξής:
$y_j = \begin{cases} x_j & \text{όταν } j=1,\dots,n \\ 0 & \text{όταν } j=n+1,\dots,n+\ell \end{cases}$ για $j=1,\dots,n+\ell$. Τότε $y \geq 0$ και $[A | e_{k_1} \cdots e_{k_\ell}] y = b$, άρα $y \in \hat{S}$. Έτσι $f_{M_0}(y) \geq f(x^*) \Rightarrow f(y_1,\dots,y_n) + M_0 \sum_{j=1}^{\ell} \underbrace{y_{n+j}}_{0} \geq f(x^*)$
$\Rightarrow f(x) \geq f(x^*)$. Έτσι εξασφαλίσαμε ότι το x^* είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f στο S. ∎

Σημ. Η Πρόταση 2 εξασφαλίζει ότι το αποτέλεσμα στο Παράδειγμα εφαρμογής της M-μεθόδου που είδαμε στο προηγούμενο μάθημα (Διάλεξη εξ αποστάσεως 10) η βασική εφικτή λύση που βρήκαμε είναι πράγματι βέλτιστη εφικτή λύση του αρχικού προβλήματος. ∎

Πρόταση 3 Έστω $S\neq\emptyset$ και ότι η f δεν είναι κάτω φραγμένη στο S, δηλ. $\inf\limits_{S} f=-\infty$. Τότε, για κάθε $M>0$, η f_M δεν είναι κάτω φραγμένη στο $\hat{S}$, δηλ. $\inf\limits_{\hat{S}} f_M=-\infty$, $\forall M>0$.

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει με απαγωγή σε άτοπο.

Έστω ότι υπάρχει $M_0>0$ τ.ω. $\inf\limits_{\hat{S}} f_{M_0}=b\in\mathbb{R}$. Τότε $f_{M_0}(y)\geq b$ $\forall y\in\hat{S}$. Έστω $x\in S$. Τότε ορίζουμε $\tilde{y}\in\mathbb{R}^{n+\ell}$ ως εξής: $\tilde{y}_j=\begin{cases} x_j & \text{όταν } j=1,\dots,n \\ 0 & \text{όταν } j=n+1,\dots,n+\ell \end{cases}$, $j=1,\dots,n+\ell$. Όπως είδαμε στην απόδειξη της Πρότασης 2 έχουμε $\tilde{y}\in\hat{S}$ και $f_{M_0}(\tilde{y})=f(x)$. Άρα $f(x)=f_{M_0}(\tilde{y})\geq b$. Καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι το b είναι ένα κάτω φράγμα της f στο S, που οδηγεί σε άτοπο. ∎

B.II.4

<u>Πρόταση 4.</u> Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M_0>0$ τ.ω. για κάθε $M\geq M_0$ το M-πρόβλημα έχει λύση και επομένως έχει βέλτιστη βασική εφικτή λύση $y^{*,M}\in\hat{S}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα: α) αν $\sum_{j=1}^{\ell} y^{*,B}_{n+j}>0$ $\forall M\geq M_0$, τότε $S=\phi$, β) αν $S\neq\phi$, τότε η f έχει σημείο ολικού ελαχίστου στο S.

<u>Απόδειξη.</u> Έστω $\hat{K}\subset\hat{S}$ το σύνολο όλων των βασικών εφικτών λύσεων του $\hat{S}$. Έχουμε δείξει ότι το σύνολο $\hat{K}$ είναι πεπερασμένο. Έτσι: $y^{*,M}\in\hat{K}$ και $f_M(y^{*,M})=\min\limits_{z\in\hat{K}} f_M(z)$.

Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι $S\neq\phi$. Έστω $x\in S$. Στη συνέχεια ορίζουμε $z\in\hat{S}$ ως εξής: $z_j=\begin{cases} x_j & , j=1,\dots,n \\ 0 & , j=n+1,\dots,n+\ell \end{cases}$, $j=1,\dots,n+\ell$. Άρα: $f_M(z)\geq f_M(y^{*,M})$, $\forall M\geq M_0$

$$\Rightarrow f(x)\geq f(y^{*,M}_1,\dots,y^{*,M}_n)+M\sum_{j=1}^{\ell} y^{*,M}_{n+j},\ \forall M\geq M_0.$$

$$\Rightarrow f(x)\geq \min_{v\in\hat{K}} f(v_1,\dots,v_n)+M\sum_{j=1}^{\ell} y^{*,M}_{n+j},\ \forall M\geq M_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{M}\left(f(x)-\min_{v\in\hat{K}} f(v_1,\dots,v_n)\right)\geq \sum_{j=1}^{\ell} y^{*,M}_{n+j}\geq 0\quad \forall M\geq M_0$$

Άρα: $\lim\limits_{M\to+\infty}\sum_{j=1}^{\ell} y^{*,M}_{n+j}=0.$

Επειδή $\sum_{j=1}^{\ell} y^{*,M}_{n+j}\in\left\{\sum_{j=1}^{\ell} z_{n+j} : z\in\hat{K}\right\}$ $\forall M\geq M_0$, και το $\hat{K}$ είναι πεπερασμένο συνεπάγεται ότι υπάρχει: $M_1\geq M_0$ τ.ω. $\sum_{j=1}^{\ell} y^{*,M}_{n+j}=0$, $\forall M\geq M_1$.

α) Αν $\sum_{j=1}^{\ell} y^{*,B}_{n+j}>0$ $\forall M\geq M_0$ τότε καταλήγουμε σε άτοπο διότι υποθέσαμε $S\neq\phi$. Άρα: $S=\phi$.

(B.11.5

β) Επειδή: $y^{*,M}_{n+j} = 0$ για $j = 1, \dots, \ell$, $\forall M \geq M_1$, έπεται ότι το $x^{*,M} \in \mathbb{R}^n$ με: $x^{*,M} = \begin{cases} y^{*,M}_j & , j = 1, \dots, n \\ 0 & , j = n+1, \dots, n+\ell \end{cases}$ $, j = 1, \dots, n+\ell$

είναι στοιχείο του S και σημείο ολικού ελαχίστου της f στο S (βλ. Πρόταση 2).

Χειρισμός εκφυλισμένων βασικών εφικτών λύσεων

B.11.6

Έστω ότι έχουμε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού: $\min_{x\in S} f(x)$ όπου: $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ με: $f(x)=(c,x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ για κάποιο μη μηδενικό $c\in\mathbb{R}^n$, και $S=\{x\in\mathbb{R}^n : Ax=b, x\geq 0\}$ όπου: $b\in\mathbb{R}^m$ με $b\geq 0$ και $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ με $\operatorname{rank}(A)=m$. Στη μέθοδο Simplex μπορούμε να ελέγξουμε αν μία εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση είναι βέλτιστη, όμως αν δεν είναι βέλτιστη δεν είναι σίγουρο ότι μπορούμε να τη βελτιώσουμε καθώς το θ^0 μπορεί να είναι ίσο με μηδέν.

Ένας τρόπος για να αντιμετωπίσουμε την εμφάνιση μιας εκφυλισμένης βασικής εφικτής λύσης έχει προταθεί από τον Charnes και στηρίζεται στη διαταραχή του S με τη χρήση μιας μικρής θετικής παραμέτρου $\varepsilon>0$. Πιο συγκεκριμένα ορίζουμε το διάνυσμα $v_\varepsilon=(\varepsilon,\varepsilon^2,\dots,\varepsilon^n)^T$ και λύνουμε το πρόβλημα: $\min_{z\in S_\varepsilon} f(z)$ όπου: $S_\varepsilon:=\{z\in\mathbb{R}^n : Az=b+Av^\varepsilon=b+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i a_i\}$

όπου: $A=[a_1|\dots|a_n]$ και $\varepsilon>0$ αρκετά μικρό.

B.11.7

<u>Πρόταση</u>. Υπάρχει $\varepsilon_0>0$ τ.ω. $b+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i a_i \geq 0$ για κάθε $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\rho_j^{\varepsilon}=b_j+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i (a_i)_j$ για $j=1,\dots,n$. Έστω $j\in\{1,\dots,n\}$

<u>Περίπτωση 1.</u> $b_j>0$

Επειδή $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i (a_i)_j=0$, υπάρχει $\varepsilon_j>0$ τ.ω. $\left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i (a_i)_j\right|\leq \frac{b_j}{2}$ $\forall\varepsilon\in[0,\varepsilon_j]$

Άρα: $\rho_j^{\varepsilon}>0$ $\forall\varepsilon\in[0,\varepsilon_j]$.

<u>Περίπτωση 2.</u> $b_j=0$

Έστω $p(\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i (a^i)_j$, $\forall\varepsilon\geq 0$. Το p είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n ως προς ε. Επειδή το p έχει το πολύ n πραγματικές ρίζες και $p(0)=0$, έπεται ότι υπάρχει $\varepsilon_j>0$ τ.ω. το p να έχει σταθερό πρόσημο στο $(0,\varepsilon_j]$.

<u>Υποπερίπτωση 2.1.</u> $p(\varepsilon)>0$ $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_j]$

Άρα: $\rho_j^{\varepsilon}=p(\varepsilon)>0$ $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_j]$

<u>Υποπερίπτωση 2.2.</u> $p(\varepsilon)<0$ $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_j]$

Σ' αυτή την περίπτωση αλλάζουμε το πρόσημο των στοιχείων της j-γραμμής του πίνακα A.
Έτσι το p αλλάζει πρόσημο και γίνεται θετικό στο $(0,\varepsilon_j]$.

Έτσι: $\varepsilon_0=\min\limits_{1\leq j\leq n}\varepsilon_j$.

Έστω ότι βρίσκουμε μια βέλτιστη μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση $z^{B,\varepsilon}$ με βασικές συντεταγμένες $I=\{i_\ell\}_{\ell=1}^{m}$,

Έτσι: $$Az^{B,\varepsilon} = b + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j a_j \Leftrightarrow \underbrace{[a_{i_1} \cdots a_{i_m}]}_{B} \begin{bmatrix} z^{B,\varepsilon}_{i_1} \\ \vdots \\ z^{B,\varepsilon}_{i_m} \end{bmatrix} = b + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j a_j$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} z^{B,\varepsilon}_{i_1} \\ \vdots \\ z^{B,\varepsilon}_{i_m} \end{bmatrix} = B^{-1}b + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j B^{-1}a_j$$

$$\Leftrightarrow B^{-1}b = \begin{bmatrix} z^{B,\varepsilon}_{i_1} \\ \vdots \\ z^{B,\varepsilon}_{i_m} \end{bmatrix} - \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j B^{-1}a_j$$

Όπως στην προηγούμενη πρόταση επειδή $\begin{pmatrix} z^{B,\varepsilon}_{i_1} \\ \vdots \\ z^{B,\varepsilon}_{i_m} \end{pmatrix} > 0$, μπορώ να βρω $0 < \hat{\varepsilon}_0 < \varepsilon_0$ τ.ω.

$$\begin{bmatrix} z^{B,\varepsilon}_{i_1} \\ \vdots \\ z^{B,\varepsilon}_{i_m} \end{bmatrix} - \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j B^{-1}a_j \geq 0$$

Άρα το $\begin{bmatrix} x^{B}_{i_1} \\ \vdots \\ x^{B}_{i_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{B,\varepsilon}_{i_1} \\ \vdots \\ z^{B,\varepsilon}_{i_m} \end{bmatrix} - \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j \underbrace{B^{-1}a_j}_{\text{οι στήλες του τελικού tableau}} \in S^{\delta}$ είναι μία μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση του S^{δ}

που είναι η βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος.

(B 11.9

Παράδειγμα

$\min \ (-4x_1 - 3x_2)$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 4 \\ 2x_1 + x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 4 \\ x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 2 \end{aligned}$$

$x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, 5.$

$$b = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} > 0 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$$

Υπάρχει μη εκφυλισμένη βασική λύση $x^B = (0,0,4,4,2)$ όμως υπάρχει και εκφυλισμένη βασική λύση $x^B = 2a_1 + 2a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = b.$

		C	-4	-3	0	0	0	
B	C^B	x^B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ
a_3	0	4	1	2	1	0	0	4
a_4	0	4	2	1	0	1	0	2
a_5	0	2	1	1	0	0	1	2
		0	0	0	0	0	0	z^k
			4	3	0	0	0	$z^k - c^k$

tableau 0

- $x^B = 4e_3 + 4e_4 + 2e_5$ είναι η αρχική βασική εφικτή λύση.
- $z^1 - c_1 = 4 > 0$, $z^2 - c_2 = 3 > 0$ δηλ. $z^k - c_k > 0$ για $k = 1,2$. Διαλέγουμε το k που αντιστοιχεί στην πιο μεγάλη διαφορά $z^k - c_k$, έτσι: $k_0 = 1$.
- $\theta^0 = \min\left\{ \dfrac{x^B_j}{y^1_j} : j = 3,4,5 \text{ και } y^1_j > 0 \right\} = \min\left\{ \dfrac{4}{1}, \dfrac{4}{2}, \dfrac{2}{1} \right\} = \{4, 2, 2\} = 2$

το οποίο λαμβάνεται για $j = 4,5$. Άρα θα προκύψει μια εκφυλισμένη βασική λύση. Για να το αποφύγουμε αυτό εφαρμόζουμε τη μέθοδο διαταραχής του Charnes, όπου στη θέση b θέτουμε $b_\varepsilon = b + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i a_i$, για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό π.χ. $\varepsilon = 10^{-1} = 1/10$. Στο παράδειγμά μας αυτό σημαίνει, για $\varepsilon = \frac{1}{10}$, ότι

$$b_\varepsilon = \begin{bmatrix} 4 + 0.1 + 0.02 + 0.001 + 0 + 0 \\ 4 + 0.2 + 0.01 + 0 + 0.0001 + 0 \\ 2 + 0.1 + 0.01 + 0 + 0 + 0.00001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.12100 \\ 4.21010 \\ 2.11001 \end{bmatrix}$$

Γενικά το $\varepsilon > 0$ είναι μικρό για να έχουμε $b_\varepsilon \geq 0$

	B	c^B	x^B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ	
			C	-4	-3	0	0	0		
tableau 1	a_3	0	4.121	1	2	1	0	0	4.1210	$k_0=1$
	a_4	0	4.2101	$\boxed{2}$	1	0	1	0	2.10505	$j_0=4$
	a_5	0	2.11001	1	1	1	0	1	2.11001	$y^1_4=2$
			0	0	0	0	0	0	z^k	
				4	3	0	0	0	z^k-c^k	
	a_3	0	2.01595	0	3/2	1	-1/2	0	$\frac{2.01595}{3/2}$	
tableau 2	a_1	-4	2.10505	1	1/2	0	1/2	0	$\frac{2.10505}{1/2}$	$k_0=1$
	a_5	0	0.00496	0	$\boxed{1/2}$	0	-1/2	1	$\frac{0.00496}{1/2}$	$j_0=5$
			-8.4202	-4	-2	0	-2	0	z^k	$y^1_5=1/2$
				0	1	0	-2	0	z^k-c^k	
	a_3	0	2.00107	0	0	1	1	-3	/	
tableau 3	a_1	-4	2.10009	1	0	0	1	-1	/	
	a_2	-3	0.00992	0	1	0	-1	2	/	
			-8.43012	-4	-3	0	-1	-2	z^k	
				0	0	0	-1	-2	z^k-c^k.	
				√	√	√	√	√		

Έτσι η αρχική βασική λύση γίνεται

$$x^B = 4.121\, e_3 + 4.2101\, e_4 + 2.1101\, e_5$$

$z^1-c_1=4>0$, $z^2-c^2=3>0$ $\boxed{k_0=1}$ (in)

$$\theta^0=\min\left\{\frac{x^B_j}{y^1_j} : j=3,4,5 \text{ και } y^1_j>0\right\}$$

$$=\min\left\{\frac{4.121}{1},\frac{4.2101}{2},\frac{2.11001}{1}\right\}=\min\{4.121,\ 2.10505,\ 2.11001\}=2.10505$$

Άρα $j_0=4$ (out). Φεύγει η a_4 και αντικαθίσταται από την a_1

Η νέα βασική εφικτή λύση είναι

$$W^B = x^B - 2.10505\cdot y^1 + \theta^0 e_1$$

$$= 4.121\, e_3 + \cancel{4.2101\, e_4} + 2.11001\, e_5 + 2.10505\, e_1$$

$$- 2.10505\, e_3 - \cancel{4.2101\, e_4} - 2.10505\, e_5$$

$$= 2.10505\, e_1 + 0.00496\, e_5 + 2.01595\, e_3$$

Στο tableau 2 στη γραμμή a_1 μπαίνει η a_4 του tableau 1 διαιρεμένη με τον οδηγό $y^1_4=2$. Με τον τύπο

$$\tilde z^\mu - c_\mu = (z^\mu - c_\mu) - \frac{y^\mu_{j_0}}{y^{k_0}_{j_0}}\cdot(z^{k_0}-c_{k_0})$$ βρίσκουμε τη γραμμή z^k-c^k

του tableau 2 π.χ.

$$\underset{\mu=2}{\tilde z^2-c_2} = \underset{3}{(z^2-c_2)} - \frac{1}{2}\,\underset{z^1-c_1}{4} = 3-2=1$$

$$\frac{y^1_2}{y^1_4}$$

$$\underset{\mu=4}{\tilde z^4-c_4} = \underset{0}{z^4-c_4} - \frac{1}{2}\cdot 4 = 0-2=-2$$

$$\tilde{y}^2 = \begin{bmatrix} 2-\frac{1}{2}\cdot 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1-\frac{1}{2}\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \tilde{y}^4 = \begin{bmatrix} 0-\frac{1}{2}\cdot 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0-\frac{1}{2}\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Τώρα $k_0 = 2$ καθώς $z^2 - c^2 = 1 > 0$.

$$\theta^0 = \min\left\{ \underbrace{\frac{2.01595}{3/2}}_{j=3}, \underbrace{\frac{2.10505}{1/2}}_{j=1}, \underbrace{\frac{0.00496}{3/2}}_{j=5} \right\} = \underbrace{\frac{0.00496}{3/2}}_{j_0=5} = 0.00992$$

Από τη βάση εξέρχεται η a_5 και εισέρχεται η a_2.

Η νέα x_B είναι:

$$x^B = 2.01595\, e_3 + 2.10505\, e_1 + 0.00496\, e_5 + 0.0092\, e_2 - 0.0092\left(\tfrac{3}{2} e_3 + \tfrac{1}{2} e_1 + \tfrac{1}{2} e_5\right)$$

$$= 0.00992\, e_2 + \left(2.10505 - \frac{0.00992}{2}\right) e_1 + \left(2.01595 - 0.00992\cdot\tfrac{3}{2}\right) e_3$$

$$= 0.00992\, e_2 + 2.10009\, e_1 + 2.00107\, e_3$$

$$\tilde{y}^4 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{y}^5 = \begin{bmatrix} 0-2\cdot\frac{3}{2} \\ 0-2\cdot\frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Εδώ τερματίζει η Simplex (tableau 3) καθώς $z^k - c_k \le 0$. και καταλήξαμε στη βέλτιστη βασική εφικτή λύση:

$$x^{BE} = (2.10009, 0.00992, 2.00107, 0, 0)^T$$

Η τελική λύση είναι: $x^B = (x_1^B, x_2^B, x_3^B, 0, 0)$ με

$$\begin{bmatrix} x_3^B \\ x_1^B \\ x_2^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3^{B,\varepsilon} \\ x_1^{B,\varepsilon} \\ x_2^{B,\varepsilon} \end{bmatrix} - \underbrace{\varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \varepsilon^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \varepsilon^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \varepsilon^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \varepsilon^5 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{οι στήλες του τελικού tableau.}}$$

<u>Σημ</u> κι το διάνυσμα που προκύψει δεν έχει μη αρνητικές συντεταγμένες σημαίνει ότι το $\varepsilon = 1/10$ που διαλέξαμε δεν είναι αρκετά μικρό.