ΜΕΜ-293 ΘΕΩΡΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Εξ αποστάσεως item 12

Δευτέρα 18/5/2020.

(zoom meeting)

(ημισύγχρονη)

6μμ.

Άσκηση 4.1

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = x_1^2 x_2 x_3 \ \forall x \in \mathbb{R}^3$ και ισοτικός περιορισμός $h_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο: $h_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \ \forall x \in \mathbb{R}^3$.

α) Εξετάστε ποιά σημεία του $S := \{x \in \mathbb{R}^3 : h_1(x) = 0\}$ είναι ομαλά σημεία των ισοτικών περιορισμών.

Λύση Με βάση τον ορισμό θα εξετάσουμε για ποιά σημεία $x \in S$ ισχύουμε: $\nabla h_1(x) \neq 0$. Προφανώς $\nabla h_1(x) = 2(x_1, x_2, x_3) = 2x$, επομένως $\nabla h_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Όμως: $0 \notin S$, επειδή: $h(0) = -1 \neq 0$. Άρα όλα τα σημεία του S είναι ομαλά σημεία των ισοτικών περιορισμών.

β) Βρείτε τα σημεία ολικού ελαχίστου και ολικού μεγίστου της f στο S.

Λύση: Επειδή το S είναι κλειστό και φραγμένο και η f είναι συνεχής στο S, η f έχει σημείο ολικού ελαχίστου στο S καθώς και σημείο ολικού μεγίστου στο S. Έστω $x \in S$ σημείο ολικού μεγίστου ή ελαχίστου της f στο S. Επειδή το x είναι ομαλό σημείο των ισοτικών περιορισμών υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\nabla f(x) - \lambda \nabla h_1(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \partial_{x_1} f(x) - 2\lambda x_1 = 0 \\ \partial_{x_2} f(x) - 2\lambda x_2 = 0 \\ \partial_{x_3} f(x) - 2\lambda x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1x_2x_3 - 2\lambda x_1 = 0 \\ x_1^2 x_3 - 2\lambda x_2 = 0 \\ x_1^2 x_2 - 2\lambda x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1(x_2x_3 - \lambda) = 0 \\ 2\lambda x_2 = x_1^2 x_3 \\ 2\lambda x_3 = x_1^2 x_2 \end{cases}.$$

Σ' αυτό το σημείο πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. $\lambda = 0$

Τότε: $\begin{cases} x_1x_2x_3 = 0 \\ x_1^2 x_3 = 0 \\ x_1^2 x_2 = 0 \end{cases}$.

Υπ.1.1 $x_1 = 0$. Τότε: $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ τ.ω. $h_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \Leftrightarrow x_2^2 + x_3^2 = 1$.

Υπ.1.2 $x_1 \neq 0$. Τότε: $x_2 = x_3 = 0$. Επειδή: $h_1(x_1, x_2, x_3) = 0$ έπεται: $x_1^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \pm 1$.

B.12.2

Περίπτωση 2. $\lambda \neq 0$

Τότε: $x_1(x_2x_3-\lambda)=0$ $\quad x_1\left(\frac{x_1^2x_3^2}{2\lambda}-\lambda\right)=0$

$x_2=\frac{x_1^2x_3}{2\lambda}$ $\Leftrightarrow$ $x_2=\frac{x_1^2x_3}{2\lambda}$

$2\lambda x_3 = x_1^2\frac{x_1^2x_3}{2\lambda}$ $\quad x_3(4\lambda^2-x_1^4)=0$

Υπ.2.1 $x_3=0$.

Τότε: $x_2=0$ και $\lambda x_1=0$. Επειδή $\lambda\neq0$, έπεται: $x_2=0$ και $x_1=0$. Έτσι: $x=0$, το οποίο απορρίπτεται επειδή $0\notin S$.

Υπ.2.2 $x_3\neq0$.

$$\begin{cases} x_1^4=4\lambda^2 \\ x_2=\frac{x_1^2x_3}{2\lambda} \\ x_1(x_1^2x_3^2-2\lambda^2)=0 \end{cases} \overset{\lambda\neq0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1^2=2|\lambda| \\ x_2=\frac{2|\lambda|x_3}{2\lambda} \\ 2|\lambda|x_3^2=2\lambda^2 \end{cases} \overset{\lambda\neq0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1^2=2|\lambda| \\ x_2=\frac{|\lambda|}{\lambda}x_3 \\ x_3^2=\frac{\lambda^2}{|\lambda|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2=2|\lambda| \\ x_2=\frac{|\lambda|}{\lambda}x_3 \\ x_3^2=|\lambda| \end{cases}$$

Επιπλέον: $h_1(x)=0 \Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=1 \Leftrightarrow 2|\lambda|+x_3^2+x_3^2=1 \Leftrightarrow 2|\lambda|+|\lambda|+|\lambda|=1$

$\Leftrightarrow 4|\lambda|=1 \Leftrightarrow |\lambda|=1/4$. Άρα: $\lambda=\pm1/4$.

Υπ.2.2.1 $\lambda=1/4$

$x_2=x_3$, $x_3=\pm1/2$, $x_1=\pm\frac{\sqrt2}{2}$

Υπ 2.2.2 $\lambda=-1/4$

$x_2=-x_3$, $x_3=\pm1/2$, $x_1=\pm\frac{\sqrt2}{2}$

Το τελικό συμπέρασμα είναι:

Π1. $\lambda=0$, $x=(0,x_2,x_3)$ με: $x_2^2+x_3^2=1$, $f(x)=0$

Π2. $\lambda=0$, $x=(\pm1,0,0)$, $f(x)=0$

Π3. $\lambda=1/4$, $x=\left(\pm\frac{\sqrt2}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ή $\left(\pm\frac{\sqrt2}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $f(x)=\frac{1}{8}$

Π4. $\lambda=-1/4$, $x=\left(\pm\frac{\sqrt2}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ή $\left(\pm\frac{\sqrt2}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $f(x)=-\frac{1}{8}$

Άρα τα σημεία της Π4 είναι τα σημεία ολικού ελαχίστου της f στο S.

και τα σημεία της Π3 είναι τα σημεία ολικού μεγίστου της f στο S.

Ας δούμε (από καθαρή περιέργεια) τι δίνουν οι συνθήκες 2ης τάξης.

$$Hf(x)=\begin{bmatrix} 2x_2x_3 & 2x_1x_3 & 2x_1x_2 \\ 2x_1x_3 & 0 & x_1^2 \\ 2x_1x_2 & x_1^2 & 0 \end{bmatrix} \qquad Hh_1(x)=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\Lambda(x)= Hf(x)-\lambda Hh_1(x)$$

Περίπτωση 2. $\lambda=0$, $x=(\pm 1,0,0)$

Τότε $\Lambda(x,0,0)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Το εφαπτόμενο επίπεδο στο x είναι:

$$M(x)=\{y\in\mathbb{R}^3 : \langle\nabla h_1(x),y\rangle=0\}=\{y\in\mathbb{R}^3 : 2\langle x,y\rangle=0\}=\{y\in\mathbb{R}^3 : \pm y_1=0\}$$

$$=\{y\in\mathbb{R}^3 : y_1=0\}=\operatorname{span}\{(0,1,0),(0,0,1)\}$$

Επομένως $M(x)=\{Bz : z\in\mathbb{R}^2\}$ όπου $B\in\mathbb{R}^{3\times2}$ με: $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Στη

συνέχεια υπολογίζουμε τον πίνακα:

$$\Gamma=B^T\Lambda(x,0,0)B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές μ του πίνακα Γ ως εξής:

$$\det(\Gamma-\mu I)=0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ 1 & -\mu \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \mu^2-1 \Leftrightarrow (\mu-1)(\mu+1)=0 \Leftrightarrow \mu=\pm1$$

Άρα ο πίνακας $\Lambda(x,0,0)$ δεν μπορεί να είναι θετικά ημιορισμένος ή αρνητικά ημιορισμένος στο $M(x)$. Συνεπώς το x δεν μπορεί να είναι σημείο τοπικού ελαχίστου ή τοπικού μεγίστου της f στο S.

<u>Περίπτωση 1.</u> $\lambda=0$ και $x=(0,x_2,x_3)$ με $x_2^2+x_3^2=1$

Τότε $\Lambda(0,x_2,x_3)=\begin{bmatrix}2x_2x_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. Το εφαπτόμενο επίπεδο στο x είναι:

$$M(x)=\{y\in\mathbb{R}^3:\ (\nabla h_1(x),y)=0\}=\{y\in\mathbb{R}^3:\ (x,y)=0\}$$

$$=\{y\in\mathbb{R}^3:\ x_2y_2+x_3y_3=0\}.$$ Άρα για κάθε $y\in M(x)$, έχουμε $y_1\in\mathbb{R}$.

Έστω: $y\in M(x)$. Τότε: $(\Lambda(0,x_2,x_3)y,y)=2x_2x_3y_1^2$. Επομένως το συμπέρασμα είναι:

2.1. Όταν x_2,x_3 είναι ομόσημα και μη μηδενικά, τότε ο $\Lambda(0,x_2,x_3)$ είναι θ.ο. στο $M(x)$.
Έτσι το x είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο S.

2.2. Όταν x_2,x_3 είναι ετερόσημα και μη μηδενικά, τότε ο $\Lambda(0,x_2,x_3)$ είναι αρνητικά ορισμένος στο $M(x)$.
Έτσι το x είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f στο S.

2.3. Όταν $x_2=0$ τότε $x_3=\pm1$. Όταν $x_3=0$ τότε $x_2=\pm1$. Σ'αυτές τις περιπτώσεις $(\Lambda(0,x_2,x_3)y,y)=0$
και επομένως δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε κάποιο συμπέρασμα.

<u>Περίπτωση 3.</u> $\lambda=1/4$, $x=(\alpha,b,b)$ με $\alpha=\pm\sqrt{2}/2$ και $b=\pm1/2$

Τότε $\Lambda(\alpha,b,b)=\begin{bmatrix}2b^2 & 2\alpha b & 2\alpha b\\ 2\alpha b & 0 & 1/2\\ 2\alpha b & 1/2 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\alpha b & 2\alpha b\\ 2\alpha b & -1/2 & 1/2\\ 2\alpha b & 1/2 & -1/2\end{bmatrix}$

$$M(x)=\{y\in\mathbb{R}^3:\ (x,y)=0\}=\{y\in\mathbb{R}^3:\ \alpha y_1+by_2+by_3=0\}=\{y\in\mathbb{R}^3:\ y_3=-y_2-\tfrac{\alpha}{b}y_1\}=\{(y_1,y_2,-y_2-\tfrac{\alpha}{b}y_1):\ y_1,y_2\in\mathbb{R}\}$$

$$=\{y_1(1,0,-\tfrac{\alpha}{b})+y_2(0,1,-1):\ y_1,y_2\in\mathbb{R}\}=\operatorname{span}\{(1,0,-\tfrac{\alpha}{b}),(0,1,-1)\}$$

(B.12.5

$$\qquad\qquad\qquad\qquad B^T \qquad\qquad \Lambda(\alpha,b,b) \qquad\qquad B$$

Έστω: $B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-\alpha/b&-1\end{bmatrix}$ και $\Gamma=\begin{bmatrix}1&0&-\alpha/b\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\alpha b&2\alpha b\\2\alpha b&-1/2&1/2\\2\alpha b&1/2&-1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-\alpha/b&-1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}-2\alpha^2 & 2\alpha b-\frac{\alpha}{2b} & 2\alpha b+\frac{\alpha}{2b}\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-\alpha/b&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\alpha^2-2\alpha^2-\frac{\alpha^2}{2b^2} & 2\alpha b-\frac{\alpha}{2b}-2\alpha b-\frac{\alpha}{2b}\\-\alpha/b & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&-\alpha/b\\-\alpha/b&-2\end{bmatrix}$$

$$\det(\Gamma-\tilde\lambda I)=0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix}-3-\tilde\lambda & -\alpha/b\\-\alpha/b&-2-\tilde\lambda\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (3+\tilde\lambda)(2+\tilde\lambda)-\frac{\alpha^2}{b^2}=0 \Leftrightarrow 6+3\tilde\lambda+2\tilde\lambda+\tilde\lambda^2-2=0 \Leftrightarrow \tilde\lambda^2+5\tilde\lambda+4=0 \Leftrightarrow \tilde\lambda\in\{-4,-1\}$$

Άρα ο $\Lambda(\alpha,b,b)$ είναι αρνητικά ορισμένος στο $M(\alpha,b,b)$ όταν: $\alpha=\pm\frac{\sqrt2}{2}$ και $b=\pm\frac{1}{2}$. Επομένως τα σημεία αυτά, είναι σημεία αυστηρού τοπικού μεγίστου της f στο S, και $f(\alpha,b,b)=\alpha^2b^2=\frac12\cdot\frac14=\frac18$.

Περίπτωση 4: $\lambda=-\frac14$, $x=(\alpha,-b,b)$ με $\alpha=\pm\frac{\sqrt2}{2}$ και $b=\pm\frac12$

Τότε: $\Lambda(\alpha,-b,b)=\begin{bmatrix}-2b^2&2\alpha b&-2\alpha b\\2\alpha b&0&1/2\\-2\alpha b&1/2&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1/2&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2\alpha b&-2\alpha b\\2\alpha b&\frac12&1/2\\-2\alpha b&1/2&\frac12\end{bmatrix}$.

και $M(x)=\{y\in\mathbb{R}^3:(x,y)=0\}=\{y\in\mathbb{R}^3: \alpha y_1-by_2+by_3=0\}=\{(y_1,y_2,y_2-\frac{\alpha}{b}y_1): y_1,y_2\in\mathbb{R}\}$

$=\{y_1(1,0,-\alpha/b)+y_2(0,1,1): y_1,y_2\in\mathbb{R}\}=\operatorname{span}\{(1,0,-\alpha/b),(0,1,1)\}$.

Έστω: $B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-\alpha/b&1\end{bmatrix}$ και $\Gamma=B^T\Lambda(\alpha,-b,b)B=\begin{bmatrix}1&0&-\alpha/b\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\alpha b&-2\alpha b\\2\alpha b&+1/2&1/2\\-2\alpha b&1/2&+1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-\alpha/b&1\end{bmatrix}$

(B.12.6

$$= \begin{bmatrix} +2\alpha^2 & 2\alpha b - \frac{\alpha}{2b} & -2\alpha b - \frac{\alpha}{2b} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\alpha/b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha^2+2\alpha^2+\frac{\alpha^2}{2b^2} & -\alpha/b \\ -\alpha/b & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -\alpha/b \\ -\alpha/b & 2 \end{bmatrix}.$$

$\det(\Gamma-\tilde{\lambda}I)=0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 3-\tilde{\lambda} & -\alpha/b \\ -\alpha/b & 2-\tilde{\lambda} \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (3-\tilde{\lambda})(2-\tilde{\lambda})-\frac{\alpha^2}{b^2}=0 \Leftrightarrow 6-3\tilde{\lambda}-2\tilde{\lambda}+\tilde{\lambda}^2-2=0 \Leftrightarrow \tilde{\lambda}^2-5\tilde{\lambda}+4=0 \Leftrightarrow \tilde{\lambda}\in\{1,4\}$. Άρα ο Γ είναι θ.ο, ή ο $\Lambda(x)$ είναι θ.ο. στο $M(x)$. Επομένως το x είναι σημείο αυστηρού τοπικού ελαχίστων της f στο S. Επιπλέον, $f(x)=-\alpha^2 b^2=-\frac{1}{8}$.

Σημείο ολικού ελαχίστου: Από την Περίπτωση 4, τα $x=(\alpha,-b,b)$ με $\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $b=\pm\frac{1}{2}$ είναι σημεία τοπικού ελαχίστου με: $f(\alpha,-b,b)=-\alpha^2b^2=-\frac{1}{2}\frac{1}{4}=-\frac{1}{8}$. Από την Περίπτωση 2.1 τα $x=(0,x_2,x_3)$ με: $x_2^2+x_3^2=1$ και $x_2x_3>0$, είναι σημεία τοπικού ελαχίστου της f με $f(0,x_2,x_3)=0$. Στα σημεία $(0,\pm1,0)$ και $(0,0,\pm1)$ της Περίπτωσης 2.3, η τιμή της f είναι 0.

Σημείο ολικού μεγίστου: Για τα σημεία $x=(0,x_2,x_3)$ με: $x_2x_3<0$ και $x_2^2+x_3^2=1$, της Περίπτωσης 2.2, έχουμε: $f(0,x_2,x_3)=0$. Επίσης στα σημεία $x=(0,\pm1,0)$ και $x=(0,0,\pm1)$ η τιμή της f είναι 0. Στα σημεία $x=(\alpha,b,b)$ με: $\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $b=\pm\frac{1}{2}$ της Περίπτωσης 3, έχουμε: $f(\alpha,b,b)=\alpha^2b^2=\frac{1}{8}$. Άρα τα (α,b,b) με: $\alpha=\pm\sqrt{2}/2$ και $b=\pm 1/2$ είναι σημεία ολικού μεγίστου της f στο S.

ΣΗΜ Όταν απλά ψάχνουμε το σημείο ολικού μεγίστου ή το σημείο ολικού ελαχίστου και έχουμε εξασφαλίσει ότι αυτά υπάρχουν δεν χρειάζεται να εξετάσουμε τις συνθήκες 2ης τάξης. Αρκεί να ελέγξουμε τις τιμές της f στα σημεία που έχουμε βρεί!

Άσκηση 4.2.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x_1^2 + x_2^2 \ \forall x \in \mathbb{R}^2$ και ισοτικός περιορισμός $h_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $h_1(x) = x_1 x_2 - 1 \ \forall x \in \mathbb{R}^2$.

α) Εξετάστε ποιά σημεία του $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : h_1(x) = 0\}$ είναι ομαλά σημεία των ισοτικών περιορισμών.

Λύση. $\nabla h_1(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. Άρα $\nabla h_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Επειδή $x \notin S$, όλα τα στοιχεία του S είναι ομαλά σημεία των ισοτικών περιορισμών.

β) Βρείτε τα σημεία τοπικού ελαχίστου, τοπικού μεγίστου, ολικού μεγίστου και ολικού ελαχίστου της f στο S.

Λύση Έστω $x \in S$ σημείο τοπικού ελαχίστου ή σημείο τοπικού μεγίστου της f στο S. Επειδή το x είναι ομαλό σημείο των ισοτικών περιορισμών υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\nabla f(x) - \lambda \nabla h_1(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x_1 - \lambda x_2 \\ 2x_2 - \lambda x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = \frac{\lambda}{2}\frac{\lambda}{2} x_1 \\ x_2 = \frac{\lambda}{2} x_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 \left(1 - \frac{\lambda^2}{4}\right) = 0 \\ x_2 = \frac{\lambda}{2} x_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 (4 - \lambda^2) = 0 \\ x_2 = \frac{\lambda}{2} x_1 \end{matrix}.$$

Π1. $x_1 = 0$. Τότε $x_2 = 0$. Άρα $x = 0$, το οποίο απορίπτεται διότι $0 \notin S$.

Π2. $x_1 \neq 0$. Τότε $\lambda = \pm 2$ και $x_2 = \frac{\lambda}{2} x_1$. Επιπλέον, $h_1(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} x_1^2 = 1 \Leftrightarrow x_1^2 = \frac{2}{\lambda}$. Η τιμή $\lambda = -2$, απορίπτεται διότι δίνει: $x_1^2 = -1$. Άρα $\lambda = 2$, $|x_1| = 1$ και $x_2 = x_1$. Άρα $\lambda = 2$ και $x = (1,1)$ ή $(-1,-1)$.

Επιπλέον, έχουμε

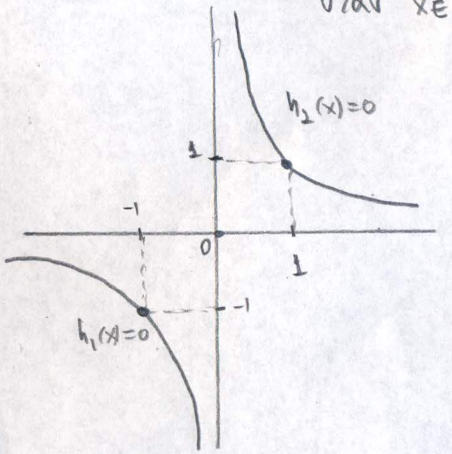
$$\mathcal{H} f(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ και } \mathcal{H} h_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Έτσι } \Lambda(x) = \mathcal{H} f(x) - \lambda \mathcal{H} h_1(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$. Το εφαπτόμενο επίπεδο που αντιστοιχεί στο x είναι $M(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \langle \nabla h_1(x), y \rangle = 0\}$

$$= \{y \in \mathbb{R}^2 : x_2 y_1 + x_1 y_2 = 0\} \underset{x_1 = x_2}{=} \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2 = 0\} = \{y_1 (1,-1) : y_1 \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1,-1)\}.$$

Έτσι $\Gamma = (1,-1) \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = (1,-1) \begin{bmatrix} 2+2 \\ -2-2 \end{bmatrix} = (1,-1) \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} = 4 + 4 = 8 > 0$. Άρα ο $\Lambda(x)$ είναι θ.ο. στο $M(x)$ και τα σημεία $x \in \{(1,1), (-1,-1)\}$ είναι σημεία αυστηρού τοπικού ελαχίστου της f στο S. Επιπλέον η f δεν έχει σημεία τοπικού μεγίστου στο S.

Έστω $z>0$. Τότε το $x=(z,\frac{1}{z})$ ανήκει στο S και $f(z,\frac{1}{z})=z^2+\frac{1}{z^2}$ $\forall z>0$. Παρατηρώντας ότι $\lim_{z\to+\infty} f(z,\frac{1}{z})=+\infty$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η f δεν είναι φραγμένη και επομένως δεν έχει σημείο ολικού μεγίστου.



Όταν $x\in\{(1,1),(-1,-1)\}$ έχουμε $f(x)=2$. Μας ενδιαφέρει να δείξουμε ότι τα x είναι σημεία ολικού ελαχίστου της f στο S. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $(x_0,y_0)\in S$ τ.ω. $x_0^2+y_0^2<2$. Επειδή $x_0y_0=1$, έπεται ότι $x_0\neq 0$ και $y_0\neq 0$. Τότε: $2x_0^2>x_0^4+x_0^2y_0^2 \Leftrightarrow 2x_0^2>x_0^4+1 \Leftrightarrow x_0^4+1-2x_0^2<0 \Leftrightarrow (x_0^2-1)^2<0$. Άτοπο.

Άρα η ελάχιστη τιμή της f στο S είναι 2 και λαμβάνεται στα σημεία $\{(1,1),(-1,-1)\}$. ∎

Σημ. Εδώ το S είναι κλειστό αλλά δεν είναι φραγμένο.

Άσκηση 4.3

(Β 12.9

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \; \forall x \in \mathbb{R}^3$ και ισοτικοί περιορισμοί $h_1, h_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με:

$h_1(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 20$ και $h_2(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 9 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$.

α) Εξετάστε ποιά σημεία του συνόλου $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : h_1(x) = 0 \text{ και } h_2(x) = 0\}$ είναι ομαλά σημεία των ισοτικών περιορισμών.

<u>Λύση.</u> Αναζητούμε τα $x \in S$ τ.ω τα $\{\nabla h_1(x), \nabla h_2(x)\}$ να είναι γραμ. ανεξάρτητα. Παρατηρούμε πρώτα ότι:

$\nabla h_1(x) = (1,2,3)$ και $\nabla h_2(x) = (1,1,1)$, δηλ. τα $\nabla h_1(x)$ και $\nabla h_2(x)$ είναι σταθερά. Επιπλέον:

$$\rho_1 (1,2,3) + \rho_2 (1,1,1) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \rho_1 + \rho_2 = 0 \\ 2\rho_1 + \rho_2 = 0 \\ 3\rho_1 + \rho_2 = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \rho_1 + \rho_2 = 0 \\ \rho_1 = 0 \\ 2\rho_1 = 0 \end{array} \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 = 0$$

Άρα τα $\nabla h_1(x)$ και $\nabla h_2(x)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έτσι, όλα τα σημεία του S είναι ομαλά σημεία των ισοτικών περιορισμών.

β) Βρείτε τα σημεία τοπικού ελαχίστου, ολικού ελαχίστου, τοπικού μεγίστου και ολικού μεγίστου της f στο S.

<u>Λύση:</u> Έστω $x \in S$ σημείο τοπικού μεγίστου ή σημείο τοπικού ελαχίστου. Επειδή το x είναι ομαλό σημείο των ισοτικών περιορισμών, υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τ.ω

$$\nabla f(x) - \lambda_1 \nabla h_1(x) - \lambda_2 \nabla h_2(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \\ x_2 = \frac{1}{2}(2\lambda_1 + \lambda_2) \\ x_3 = \frac{1}{2}(3\lambda_1 + \lambda_2) \end{array}$$

Η απαίτηση $x \in S$ δίνει

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 9 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (\lambda_1 + \lambda_2) + 2(2\lambda_1 + \lambda_2) + 3(3\lambda_1 + \lambda_2) = 40 \\ (\lambda_1 + \lambda_2) + (2\lambda_1 + \lambda_2) + (3\lambda_1 + \lambda_2) = 18 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 14\lambda_1 + 6\lambda_2 = 40 \\ 6\lambda_1 + 3\lambda_2 = 18 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 7\lambda_1 + 3\lambda_2 = 20 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 6 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 7\lambda_1 + 18 - 6\lambda_1 = 20 \\ \lambda_2 = 6 - 2\lambda_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \end{array}$$

Έτσι:

$x_1 = \frac{1}{2}(2+2) = 2$

$x_2 = \frac{1}{2}(4+2) = 3$, δηλ. $x = (2,3,4)$

$x_3 = \frac{1}{2}(6+2) = 4$

Επιπλέον, έχουμε: $Hf(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ και $Hh_1(x) = Hh_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Άρα: $\Lambda(x) = Hf(x) - \lambda_1 Hh_1(x) - \lambda_2 Hh_2(x) = Hf(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ που είναι θ.ο στο $\mathbb{R}^3$.

Επομένως το σημείο $x = (2,3,4)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο S, και

$f(x) = 4+9+16 = 29$. Επιπλέον, η f δεν έχει στο S σημείο τοπικού μεγίστου.

Μένει να εξετάσουμε αν η f έχει σημείο ολικού μεγίστου στο S και αν έχει σημείο ολικού ελαχίστου στο S.

Έστω $z \in S$. Τότε: $\begin{matrix} z_1 + 2z_2 + 3z_3 = 20 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 9 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} z_2 + 2z_3 = 11 \\ z_1 = 9 - z_2 - z_3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} z_2 = 11 - 2z_3 \\ z_1 = 9 - 11 + 2z_3 - z_3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} z_2 = 11 - 2z_3 \\ z_1 = -2 + z_3 \end{matrix}$

Άρα: $S = \{ r(t) \in \mathbb{R}^3 : r(t) = (-2+t, 11-2t, t) \ t \in \mathbb{R} \}$. Επομένως: $f(r(t)) = t^2 + (t-2)^2 + (11-2t)^2 \geq t^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Άρα η f δεν είναι φραγμένη στο S και επομένως δεν μπορεί να έχει στο S σημείο ολικού μεγίστου.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}^3$ (καθώς η $Hf(x)$ είναι θ.ο στο $\mathbb{R}^3$) και το S είναι κυρτό, έπεται ότι το x είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f στο S επειδή είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο S. ∎

(B.12.11)

Άσκηση 4.4.

α) Βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου $(0,3)$ από την παραβολή $x_2 = x_1^2$.

Λύση Ορίζουμε $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με: $f(x) = x_1^2 + (x_2-3)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$, η οποία εκφράζει το τετράγωνο της Ευκλείδιας απόστασης του x από το $(0,3)$. (Ο λόγος που αποφεύγουμε την τετραγ. ρίζα είναι επειδή δεν παράγει C^1 συναρτήσεις).

Εισάγουμε ισοτικό περιορισμό $h_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με: $h_1(x) = x_2 - x_1^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$. Έπειτα ορίζουμε: $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : h_1(x) = 0\}$.

Ο σκοπός μας είναι να βρούμε $x^* \in S$ τ.ω $f(x^*) = \min_{x \in S} f(x)$.

Επειδή $\nabla h_1(x) = (-2x_1, 1) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$, έπεται ότι όλα τα στοιχεία του S είναι ομαλά σημεία των ισοτικών περιορισμών.

Έστω ότι το $x^* \in S$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο S. Επειδή το x^* είναι ομαλό σημείο των ισοτικών περιορισμών υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω $\nabla f(x^*) - \lambda \nabla h_1(x^*) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1^* = -2\lambda x_1^* \\ 2(x_2^* - 3) = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = -\lambda x_1^* \\ x_2^* = 3 + \lambda/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^*(1+\lambda) = 0 \\ x_2^* = 3 + \lambda/2 \end{cases}$.

Π1: $x_1^* = 0$

Τότε $x_2 = 3 + \lambda/2$ και $h_1(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow 3 + \lambda/2 - x_1^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda/2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -6$. Άρα: $x_2^* = 0$.

Έτσι $x^* = (0,0)$ και $\lambda = -6$. Σημειώνουμε ότι: $f(x^*) = 9$.

Π2: $x_1^* \neq 0$

Τότε $\lambda = -1$ και $x_2^* = 5/2$. Επιπλέον, $h_1(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow 5/2 - (x_1^*)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1^* = \pm\sqrt{5/2}$.

Έτσι: $x^* = (\pm\sqrt{5/2}, 5/2)$ και $\lambda = -1$. Σημειώνουμε ότι: $f(x^*) = 5/2 + (3 - 5/2)^2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$, δηλ. η τιμή είναι μικρότερη από αυτή που βρήκαμε στην Π1. Γι' αυτό θα εξετάσουμε τις συνθήκες 2ης τάξης μόνο στην Π2.

B.12.12

$$Hf(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad Hh_1(x) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

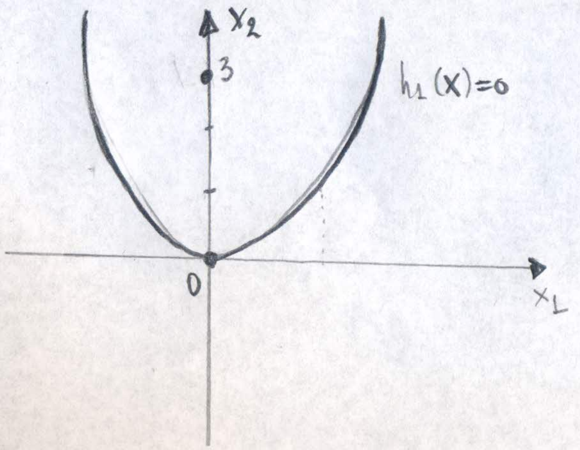
Έτσι: $\Lambda(x^*) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$$M(x^*) = \{y \in \mathbb{R}^2 : (\nabla h_1(x^*), y) = 0\} = \{y \in \mathbb{R}^2 : -2x_1^* y_1 + y_2 = 0\} = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_2 = 2x_1^* y_1\}$$

$$= \{ y_1 (1, 2x_1^*) : y_1 \in \mathbb{R} \}$$

$$\Gamma = [1 \ \ 2x_1^*] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2x_1^* \end{bmatrix} = [1 \ \ 2x_1^*] \begin{bmatrix} 0 \\ 4x_1^* \end{bmatrix} = 8(x_1^*)^2 = 8 \cdot 5/2 = 20 > 0.$$

Άρα ο $\Lambda(x^*)$ είναι θ.ο. στο $M(x^*)$ άρα το x^* είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο S.



Το ερώτημα που μένει να απαντηθεί είναι αν το x^* είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f στο S.

Παρατηρούμε ότι: $S = \{r(t) \in \mathbb{R}^2 : r(t) = (t, t^2) \ t \in \mathbb{R}\}$. Επομένως:

$f(r(t)) = t^2 + (t^2-3)^2 \ \forall t \in \mathbb{R}$. Άρα για $|t| \geq 4$ έχουμε: $f(r(t)) \geq 16 > \frac{11}{4} = f(r(\pm\sqrt{\tfrac{5}{2}}))$

Η $f(r(t))$ έχει στο $[-4,4]$ έχει σημείο ολικού ελαχίστου το t_0. Έτσι:

$$f(r(t)) \geq \begin{cases} f(r(t_0)) & \forall t \in [-4,4] \\ 16 > \frac{11}{4} = f(r(\underbrace{\pm\sqrt{\tfrac{5}{2}}}_{\in[-4,4]})) \geq f(r(t_0)) & \forall t \notin [-4,4] \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Άρα η f έχει σημείο ολικού ελαχίστου στο S. Άρα θα είναι το x^*, καθώς είναι το σημείο του S που ικανοποιεί τις συνθήκες 1ης τάξης και δίνει ~~έχει~~ την μικρότερη τιμή της f.

(B 12. 13

β) Βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου $(2, 1, 1)$ από το επίπεδο $x+y+z=1$

<u>Λύση</u> Αν ορίσουμε: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με: $f(x) = (x_1-2)^2 + (x_2-1)^2 + (x_3-1)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$, και περιορισμό

περιορισμό $h_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με: $h_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$,

και $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : h_1(x) = 0\}$, οδηγούμαστε στο πρόβλημα: $\min\limits_{x \in S} f(x)$.

Επειδή: $\nabla h_1(x) = (1,1,1) \neq 0 \quad \forall x \in S$, έπεται ότι όλα τα σημεία του S είναι ομαλά σημεία των ισοτικών περιορισμών

Έστω $x^* \in S$ σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο S. Επειδή είναι ομαλό σημείο των ισοτικών περιορισμών έπεται:

ότι: υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω $\nabla f(x^*) = \lambda \nabla h_1(x^*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_1^*-2) = \lambda \\ 2(x_2^*-1) = \lambda \\ 2(x_3^*-1) = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = 2+\lambda/2 \\ x_2^* = 1+\lambda/2 \\ x_3^* = 1+\lambda/2 \end{cases}$. Επειδή $x^* \in S$, έχουμε:

$x_1^* + x_2^* + x_3^* = 1$

$\Leftrightarrow 2+\lambda/2 + 1+\lambda/2 + 1+\lambda/2 = 1 \Leftrightarrow 3\lambda/2 + 4 = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\lambda = -3 \Leftrightarrow \lambda = -2$. Άρα: $\begin{cases} x_1^* = 1 \\ x_2^* = 0 \\ x_3^* = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^* = (1,0,0)$. και $f(x^*) = 3$ Άρα

Επίσης: $JEh_1(x^*) = \begin{bmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}$ και $JEf(x^*) = \begin{bmatrix} 2&0&0 \\ 0&2&0 \\ 0&0&2 \end{bmatrix}$. Άρα $\Lambda(x^*) = JE f(x^*) = \begin{bmatrix} 2&0&0 \\ 0&2&0 \\ 0&0&2 \end{bmatrix}$ που είναι θ.ο. στο $\mathbb{R}^3$

Έτσι το x^* είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο S. Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}^2$, άρα και στο S,

και το S είναι κυρτό σύνολο, έπεται ότι το x^* είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f στο S.

(B12.14

Άσκηση 4.5

Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με: $f(x)=x_1^2x_2$ $\forall x\in\mathbb{R}^2$ και ισοτικός περιορισμός $h_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με: $h_1(x)=x_1^2+2x_2^2-6$ $\forall x\in\mathbb{R}^2$.

α). Έστω $S=\{x\in\mathbb{R}^2: h_1(x)=0\}$. Βρείτε τα ομαλά σημεία των ισοτικών περιοσμών του S.

Λύση: $\nabla h_1(x)=(2x_1,4x_2)$. Άρα: $\nabla h_1(x)=0$ ανν $x_1=x_2=0$. Όμως: $(0,0)\notin S$. Άρα όλα τα σημεία του S είναι ομαλά σημεία των ισοτικών περιορισμών.

β) Βρείτε τα σημεία τοπικού ελαχίστου, τοπικού μεγίστου, ολικού ελαχίστου και ολικού μεγίστου της f στο S.

Λύση: Έστω $x\in S$ σημείο τοπικού ελαχίστου ή τοπικού μεγίστου της f στο S. Τότε (x ομαλό σημείο του S κατεπομένως) υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ τ.ω.

$$\nabla f(x)=\lambda\nabla h_1(x) \iff \begin{cases}2x_1x_2=\lambda\cdot 2x_1\\ x_1^2=\lambda\, 4x_2\end{cases} \iff \begin{cases}x_1x_2=\lambda x_1\\ x_1^2=4\lambda x_2\end{cases} \iff \begin{cases}x_1(x_2-\lambda)=0\\ 4\lambda x_2=x_1^2.\end{cases}$$

Π1 $x_1=0$.

Τότε: $\begin{cases}\lambda x_2=0\\ x_1^2+2x_2^2=6\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda=0\\ x_2=\pm\sqrt3\end{cases}$ Έτσι: $\lambda=0$ και $x=(0,\pm\sqrt3)$. (Σημειώνουμε ότι: $f(x)=0$)

Π2 $x_1\neq0$

$$\begin{cases}x_2=\lambda\\ x_1^2=4\lambda^2\\ x_1^2+2x_2^2=6\end{cases} \iff \begin{cases}x_2=\lambda\\ x_1^2=4\lambda^2\\ 4\lambda^2+2\lambda^2=6\end{cases} \iff \begin{cases}x_2=\lambda\\ |x_1|=2|\lambda|.\\ \lambda=\pm1\end{cases}$$

Άρα: 2.1. $\lambda=1$, $x_1=\pm2$, $x_2=1$. ($f(x)=4$)

2.2. $\lambda=-1$, $x_1=\pm2$, $x_2=-1$. ($f(x)=-4$)

Επειδή το S είναι φραγμένο και κλειστό και η f συνεχής στο $\mathbb{R}^2$, έπεται ότι η f έχει σημείο ολικού μεγίστου και σημείο ολικού ελαχίστου στο S.

Άρα τα $(\pm2,1)$ είναι σημεία ολικού μεγίστου και τα $(\pm2,-1)$ είναι σημεία ολικού ελαχίστου.

$$\mathcal{H}h_1(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{H}f(x) = \begin{bmatrix} 2x_2 & 2x_1 \\ 2x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

(B 12.15

Ας δούμε τι δίνουν οι συνθήκες 2ης τάξης

$$\Lambda(x) = \mathcal{H}f(x) - \lambda\,\mathcal{H}h_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_2 - 2\lambda & 2x_1 \\ 2x_1 & -4\lambda \end{bmatrix}$$

<u>Π1</u> $\lambda=0,\ x=(0,\pm\sqrt{3})$

$\Lambda(x)=\begin{bmatrix} 2x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M(x)=\{y\in\mathbb{R}^2: (\nabla h_1(x),y)=0\}=\{y\in\mathbb{R}^2: \underset{\overset{\|}{0}}{2x_1y_1}+4x_2y_2=0\}=\{y\in\mathbb{R}^2: y_2=0\}=\text{span}\{(1,0)\}$. $\Gamma=[1,0]\begin{bmatrix} 2x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=[1,0]\begin{bmatrix} 2x_2 \\ 0 \end{bmatrix}=2x_2$.

Άρα το $x=(0,\sqrt{3})$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο S και το $(0,-\sqrt{3})$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f στο S.

<u>Π2.1</u> $\lambda=1,\ x_1=\pm 2, x_2=1$ $(x_2=\lambda)$

$$\Lambda(x) = \begin{bmatrix} 0 & 2x_1 \\ 2x_1 & -4 \end{bmatrix}.$$

$$M(x)=\{y\in\mathbb{R}^2: \langle\nabla h_1(x),y\rangle=0\}=\{y\in\mathbb{R}^2: 2x_1y_1+4x_2y_2=0\}=\{y\in\mathbb{R}^2: x_1y_1+2y_2=0\}=\{y\in\mathbb{R}^2: y_2=-\tfrac{1}{2}x_1y_1\}$$

$$=\{(y_1,-\tfrac{x_1}{2}y_1): y_1\in\mathbb{R}\}=\{y_1(1,-\tfrac{x_1}{2}): y_1\in\mathbb{R}\}=\text{span}\{(1,-\tfrac{x_1}{2})\}$$

$$\Gamma=\left[1\ -\tfrac{x_1}{2}\right]\begin{bmatrix} 0 & +2x_1 \\ +2x_2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{x_1}{2} \end{bmatrix}=\left[1\ -\tfrac{x_1}{2}\right]\begin{bmatrix} -x_1^2 \\ 2x_1+2x_1 \end{bmatrix}=\left[1\ -\tfrac{x_1}{2}\right]\begin{bmatrix} -4 \\ 4x_1 \end{bmatrix}=-4-2x_1^2=-4-4=-8<0.$$

Άρα ο $\Lambda(x)$ είναι αρν. ορισμένος στο $M(x)$. Έτσι τα x είναι σημεία τοπικού μεγίστου της f στο S, με $f(x)=4$.

<u>Π2.2</u> $\lambda=-1$ $x_1=\pm 2, x_2=-1$

$\Lambda(x)=\begin{bmatrix} 2+2(-1) & 2x_1 \\ 2x_1 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2x_1 \\ 2x_1 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad M(x)=\text{span}\{(1,x_1)\}$ $\quad \Gamma=[1\ x_1]\begin{bmatrix} 0 & 2x_1 \\ 2x_1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \end{bmatrix}=[1\ x_1]\begin{bmatrix} 2x_1^2 \\ 6x_1 \end{bmatrix}=2x_1^2+6x_1^2=8x_1^2$
$=8\cdot 4=32>0$

Άρα ο $\Lambda(x)$ είναι θ.ο. στο $M(x)$. Επομένως τα $(\pm 2,-1)$ είναι σημεία τοπικών ελαχίστων της f στο S. Επιπλέον,
$f(\pm 2,-1)=-4$.

(B.12.16

Άσκηση 4.6.

Δίνεται $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με: $f(x) = -\frac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)$ $\forall x \in \mathbb{R}^3$ και περιορισμοί ισότικοί $h_1, h_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ που δίνονται από τους τύπους:

$h_1(x) = x_1 + x_2 + x_3$ $\forall x \in \mathbb{R}^3$ και $h_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3$ $\forall x \in \mathbb{R}^3$.

α) Εξετάσατε ποιά σημεία του $S := \{x \in \mathbb{R}^3 : h_1(x) = 0$ και $h_2(x) = 0\}$ είναι ομαλά σημεία των ισοτικών περιορισμών.

<u>Λύση</u> $\nabla h_1(x) = (1,1,1)$ και $\nabla h_2(x) = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^3$

Έστω $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ και $x \in S$ τ.ω.

$$\rho_1 \nabla h_1(x) + \rho_2 \nabla h_2(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 + 2\rho_2 x_1 = 0 \\ \rho_1 + 2\rho_2 x_2 = 0 \\ \rho_1 + 2\rho_2 x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = -2\rho_2 x_1 \\ \rho_2(x_2 - x_1) = 0 \\ \rho_2(x_3 - x_1) = 0 \end{cases}$$

Έστω ότι: $\rho_2 \neq 0$. Τότε: $\rho_1 = -2\rho_2 x_1$, $x_1 = x_2$ και $x_2 = x_3$. Επειδή $x \in S$ έχουμε $h_1(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Άρα: $x = 0$. Όμως $0 \notin S$ επειδή $h_2(0) = -3 \neq 0$. Άρα αναγκαστικά $\rho_2 = 0$ και κατά συνέπεια $\rho_1 = 0$. Άρα όλα τα σημεία του S είναι ομαλά σημεία των ισοτικών περιορισμών.

B 12.17

β) Βρείτε τα σημεία ολικού ελαχίστου και ολικού μεγίστου της f στο S.

<u>Λύση.</u> Το σύνολο S είναι κλειστό και φραγμένο. Άρα η f έχει στο S σημείο ολικού ελαχίστου και σημείο ολικού μεγίστου. Έστω $x \in S$ ένα τέτοιο σημείο. Επειδή όλα τα σημεία του S είναι κανονικά σημεία των ισοτικών περιορισμών υπάρχουν: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$\nabla f(x) - \lambda_1 \nabla h_1(x) - \lambda_2 \nabla h_2(x) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1^2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 x_1 = 0 \\ -x_2^2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 x_2 = 0 \\ -x_3^2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + 2\lambda_2 x_1 + \lambda_1 = 0 \\ x_2^2 + 2\lambda_2 x_2 + \lambda_1 = 0 \\ x_3^2 + 2\lambda_2 x_3 + \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

Έστω $p(t) = t^2 + 2\lambda_2 t + \lambda_1$. Οι προηγούμενες σχέσεις δίνουν ότι: $p(x_i) = 0$ για $i = 1,2,3$, δηλ. το p έχει τρεις ρίζες. Επειδή $p \neq 0$, το p μπορεί να έχει το πολύ δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Η διακρίνουσα του p είναι $\Delta = 4\lambda_2^2 - 4\lambda_1$. Αν $\Delta < 0$ τότε το p δεν έχει ρίζες άρα δεν υπάρχει x που να ικανοποιεί τις συνθήκες 1ης τάξης, άτοπο. Έτσι: $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_2^2 - \lambda_1 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_2^2 \geq \lambda_1$. (Έτσι το p έχει ρίζες:

$\rho_{1,2} = \dfrac{-2\lambda_2 \pm 2\sqrt{\lambda_2^2 - \lambda_1}}{2} = -\lambda_2 \pm \sqrt{\lambda_2^2 - \lambda_1}$) Δεν μπορούμε να έχουμε $x_1 = x_2 = x_3$ διότι η απαίτηση $h_1(x) = 0$ δίνει $x = 0$ που δίνει $h_2(0) = -3 \neq 0$. Άρα το p δεν μπορεί να έχει μία μόνο ρίζα συνεπώς: $\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda_2^2 > \lambda_1$. Άρα το x έχει μόνο δύο από τις συντεταγμένες του ίσες μεταξύ τους. Έστω ότι δύο από τις συντεταγμένες είναι ίσες με α και μία ίση με β, όπου: $\alpha \neq \beta$.

8.12.18

Τοτε η απαίτηση $x \in S$ δίνει:

$$\begin{cases} h_1(x)=0 \\ h_2(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+b=0 \\ 2\alpha^2+b^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2\alpha \\ 4\alpha^2+2\alpha^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2\alpha \\ \alpha^2=1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\mp\sqrt{2} \\ \alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Άρα: $x \in \{(\alpha,\alpha,b),(\alpha,b,\alpha),(b,\alpha,\alpha)\}$ με $(\alpha,b) \in \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)\right\}$, συνοδικά σημεία.

Έτσι: $f(x)=-\frac{1}{3}(2\alpha^3+b^3)$. Όταν $(\alpha,b)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}\right)$ τότε: $f(x)=-\frac{1}{3}\left(2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3-(\sqrt{2})^3\right)=-\frac{1}{3}\left[2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}-2\sqrt{2}\right]$

$=-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}-2\sqrt{2}\right]=-\frac{(1-4)}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ Όταν $(\alpha,b)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$ τότε: $f(x)=-\frac{1}{3}\left(-2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3+(\sqrt{2})^3\right)=-\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-\frac{2}{2\sqrt{2}}\right)$

$=-\frac{1}{3}\,\frac{4-1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Άρα όταν $(\alpha,b)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}\right)$ τα x είναι σημεία ολικού μεγίστου και όταν $(\alpha,b)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$

τα x είναι σημεία ολικού ελαχίστου.

<u>Σημ</u> Ο υπολογισμός των λ_1,λ_2 μπορεί να γίνει από τον τύπο των ριζών ρ_1,ρ_2 του $P(t)$.
Όμως δεν είναι απαραίτητος εκτός αν για κάποιο λόγο χρειάζεται να εξετάσουμε
τις συνθήκες $2^{ης}$ τάξης.

'Ασκηση 4.7. (8.12.19)

'Εστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας συμμετρικός πίνακας και συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = x^T A x \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, και ισοτικός περιορισμός $h_1: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με: $h_1(x) = |x|^2 - 1 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

α) Εξετάστε ποιά σημεία του συνόλου $S := \{x \in \mathbb{R}^n : h_1(x) = 0\}$ είναι ομαλά σημεία των ισοτικών περιορισμών.

Λύση. 'Εχουμε: $h_1(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. 'Αρα: $\nabla h_1(x) = 2x$. Επομένως: $\nabla h_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Επειδή $0 \notin S$, συμπεραίνουμε ότι $\nabla h_1(x) \neq 0 \ \forall x \in S$, και επομένως όλα τα σημεία του S είναι ομαλά σημεία των ισοτικών περιορισμών.

β) Βρείτε τα σημεία ολικού μεγίστου και ολικού ελαχίστου της f στο S.

Λύση. Το S είναι κλειστό και φραγμένο και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^n$. Άρα η f έχει στο S σημείο ολικού μεγίστου και σημείο ολικού ελαχίστου. Έστω $x \in S$ σημείο τοπικού ελαχίστου ή σημείο τοπικού μεγίστου της f στο S.

Επειδή όλα τα σημεία του S είναι ομαλά σημεία των ισοτικών περιορισμών, έπεται ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\nabla f(x) = \lambda \nabla h_1(x) \Leftrightarrow \nabla f(x) = 2\lambda x$. Ας υπολογίσουμε τις $\partial_{x_k} f(x)$ για $k = 1, \dots, n$. Πρώτα παρατηρούμε ότι: $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i (Ax)_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j x_i \ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Επομένως:

$$\partial_{x_k} f(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} (\partial_{x_k} x_j x_i + x_j \partial_{x_k} x_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \delta_{kj} x_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \delta_{ki} x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_{ik} x_i + \sum_{j=1}^{n} A_{kj} x_j = 2 \sum_{j=1}^{n} A_{kj} x_j, \quad k = 1, \dots, n.$$

Έτσι: $$2 \sum_{j=1}^{n} A_{kj} x_j = 2\lambda x_k, \ k = 1, \dots, n \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} A_{kj} x_j = \lambda x_k, \ k = 1, \dots, n.$$

$$\Leftrightarrow Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda I) x = 0.$$

Αν το λ δεν είναι ιδιοτιμή του A, τότε ο $A-\lambda I$ είναι αντιστρέψιμος, επομένως $x=0 \notin S$.

Άρα το λ είναι ιδιοτιμή του A. (Επειδή ο A είναι συμμετρικός όλες οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικές)

Άρα το x είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ και $h_1(x)=0 \Leftrightarrow |x|=1$. Άρα το x είναι κανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Επομένως $f(x)=(Ax,x)=\lambda(x,x)=\lambda|x|^2=\lambda$. Αυτό σημαίνει ότι η μέγιστη τιμή λαμβάνεται στα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη $\lambda_{max}=\max_{1\leq i\leq n}\lambda_i$ και η ελάχιστη τιμή λαμβάνεται στα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda_{min}=\min_{1\leq i\leq n}\lambda_i$.

Σημ. Δε χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε συνθήκες $2^{ης}$ τάξης, επειδή ξέρουμε ότι υπάρχει σημείο ολικού μεγίστου και σημείο ολικού ελαχίστου της f στο S, και αυτό ικανοποιεί αναγκαστικά τις συνθήκες $1^{ης}$ τάξης. Επομένως αποτιμούμε τα σημεία τα οποία ικανοποιούν τις συνθήκες $1^{ης}$ τάξης και συγκρίνουμε την τιμή της f στα σημεία αυτά.

(Σημειώνουμε ότι: $Hf(x)=2A$ και $Hh_1(x)=2I$. Άρα: $\Delta(x)=2(A-\lambda I)$, για κάθε κανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα x που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.)

B.12,20