ΜΕΜ-293 Θεωρία Βελτιστοποίησης

ΜΑΘΗΜΑ 14 (ασύγχρονο)

Λύσεις των Ασκήσεων του Φυλλαδίου 6.

Γ. Ζουράκης

version 2

Λύση Άσκησης 6.1

"$\Rightarrow$" Έστω $(z,w) \in D$. Τότε: $z \geq 0$, $w \geq 0$ και $Az + w = b$. Επειδή $w \geq 0$, έπεται ότι: $Az \leq b$. Άρα: $z \in S$ και επομένως $f(x^*) \leq f(z) = d(z,w)$. Έτσι καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι: $f(x^*) \leq d(z,w)$ $\forall (z,w) \in D$, το οποίο συνεπάγεται ότι: $f(x^*) \leq \min\limits_{(z,w)\in D} d(z,w) \Rightarrow f(x^*) \leq d(z^*,w^*) \Rightarrow f(x^*) \leq f(z^*)$. (I)

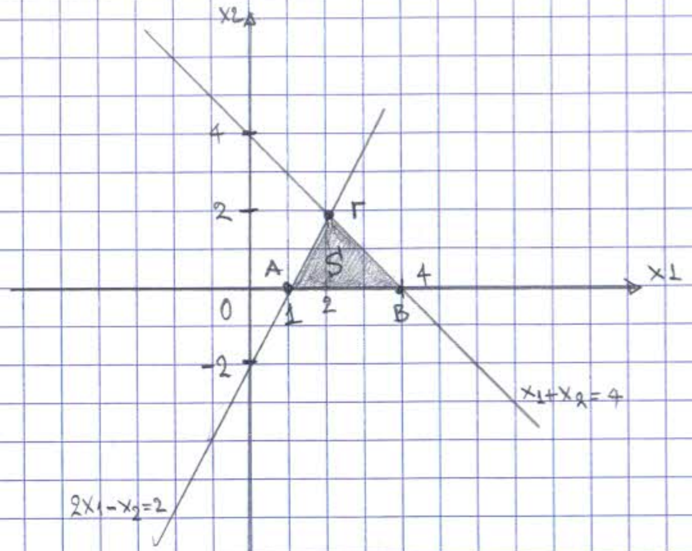
"$\Leftarrow$" Έστω $x \in S$. Τότε $Ax \leq b$ και επομένως $y := b - Ax \geq 0$. Άρα: $(x,y) \in D$ και: $f(z^*,w^*) \leq f(x,y) \Rightarrow f(z^*) \leq f(x)$. Έτσι καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι: $f(z^*) \leq f(x)$ $\forall x \in S$. Άρα: $f(z^*) \leq \min\limits_{x \in S} f(x) \Rightarrow f(z^*) \leq f(x^*)$. (II)

Από τις (I) και (II) έπεται: $f(x^*) = f(z^*)$. ∎

Λύση Άσκησης 6.5

Έστω: $x \in S$. Τότε: $x_j \geq 0$ για $j = 1, \dots, n$ και $\sum_{j=1}^{n} A_{i_0,j} x_j \leq b_{i_0}$. Επειδή $A_{i_0,j} > 0$ για $j = 1, \dots, n$, έπεται ότι: $A_{i_0,\ell} x_\ell \leq \sum_{j=1}^{n} A_{i_0,j} x_j \leq b_{i_0}$, $\ell = 1, \dots, n$. Έτσι: $0 \leq x_\ell \leq \frac{b_{i_0}}{A_{i_0,\ell}}$ για $\ell = 1, \dots, n$. Άρα το S είναι φραγμένο. ∎

Λύση Άσκησης 6.2



α) $\begin{cases} x_1+x_2=4 \\ 2x_1-x_2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1=6 \\ 2x_1-x_2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ 4-x_2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=2 \end{cases}$. Άρα το $x=(2,2)$ είναι το σημείο τομής των ευθειών $x_1+x_2=4$ και $2x_1-x_2=2$. Η εφικτή περιοχή S είναι το τρίγωνο με κορυφές $A=(1,0)$, $B=(4,0)$ και $\Gamma=(2,2)$.

β) Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(x)=-x_1+x_2$ $\forall x\in\mathbb{R}^2$. Επειδή το S είναι κλειστό και φραγμένο η f έχει σημείο ολικού ελαχίστου στο S το οποίο είναι ακραίο σημείο του S. Τα ακραία σημεία του S είναι οι κορυφές A, B, Γ του τριγώνου. Άρα $\min_S f = \min\{f(A), f(B), f(\Gamma)\}$. Επειδή $f(A)=f(1,0)=-1$, $f(B)=f(4,0)=-4$, $f(\Gamma)=f(2,2)=0$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το $B=(4,0)$ είναι το μοναδικό σημείο ολικού ελαχίστου της f στο S.

γ) Για να γράψουμε το πρόβλημα σε κανονική μορφή προσθέτουμε δύο μεταβλητές $x_3\geq 0$ και $x_4\geq 0$ και παίρνουμε:

$$\boxed{\begin{array}{c} x_1+x_2+x_3=4 \\ 2x_1-x_2-x_4=2 \\ x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0 \end{array}}\,.$$

Επομένως $m=2$, $n=4$, $A\in\mathbb{R}^{2\times 4}$ με:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{array}$$

, $b\in\mathbb{R}^2$ με $b=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} > 0$

και $c\in\mathbb{R}^4$ με $c=(-1,1,0,0)$. Έτσι το πρόβλημα παίρνει τη μορφή: $\min_{x\in D} d(x)$ όπου $D=\{x\in\mathbb{R}^4 : x\geq 0 \text{ και } Ax=b\}$ και $d:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ με $d(x)=(c,x)$ $\forall x\in\mathbb{R}^4$.

Τα ακραία σημεία του D είναι οι βασικές εφικτές λύσεις του D. Για να τις προσδιορίσουμε πρέπει να βρούμε όλες τις βασικές στήλες του δηλ. τα ζευγάρια $\{\alpha_k,\alpha_\lambda\}$ τα οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Περίπτωση 1: $\{\alpha_1, \alpha_2\}$

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \kappa \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda + \kappa = 4 \\ 2\lambda - \kappa = 2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda = 2 \\ \kappa = 2 \end{matrix}$$

Άρα $x^B = (2, 2, 0, 0)$.

Περίπτωση 2: $\{\alpha_1, \alpha_3\}$

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \kappa \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda + \kappa = 4 \\ 2\lambda = 2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \kappa = 3 \\ \lambda = 1 \end{matrix}$$

Άρα: $x^B = (1, 0, 3, 0)$.

Περίπτωση 3: $\{\alpha_1, \alpha_4\}$

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \kappa \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda = 4 \\ 2\lambda - \kappa = 2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda = 4 \\ \kappa = 6 \end{matrix}$$

Άρα $x^B = (4, 0, 0, 6)$.

Περίπτωση 4: $\{\alpha_2, \alpha_3\}$

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \kappa \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda + \kappa = 4 \\ -\lambda = 2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \kappa = 6 \\ \lambda = -2 < 0 \end{matrix}$$

Άρα δεν υπάρχει βασική εφικτή λύση ως προς την βάση $\{\alpha_2, \alpha_3\}$.

Περίπτωση 5: $\{\alpha_2, \alpha_4\}$

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \kappa \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda = 4 \\ -\lambda - \kappa = 2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda = 4 \\ \kappa = -\lambda - 2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda = 4 \\ \kappa = -6 < 0 \end{matrix}$$

Άρα δεν υπάρχει βασική εφικτή λύση ως προς την βάση $\{\alpha_2, \alpha_4\}$.

Περίπτωση 6: $\{\alpha_3, \alpha_4\}$

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \kappa \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda = 4 \\ \kappa = -2 < 0 \end{matrix}$$

Άρα δεν υπάρχει βασική εφικτή λύση ως προς τη βάση $\{\alpha_3, \alpha_4\}$.

Άρα οι βασικές εφικτές λύσεις είναι $\underbrace{(2,2,0,0)}_{K_1}$, $\underbrace{(1,0,3,0)}_{K_2}$, $\underbrace{(4,0,0,6)}_{K_3}$ που είναι τα ακραία σημεία του D

Σημείωση: Οι περιορισμοί: $\begin{matrix} x_1+x_2+x_3=4 \\ 2x_1-x_2-x_4=2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 4x_1+4x_2+4x_3=16 \\ 2x_1-x_2-x_4=2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 4x_1+4x_2+4x_3=16 \\ -2x_1-5x_2-4x_3-x_4=-14 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1+x_2+x_3=4 \\ 2x_1+5x_2+4x_3+x_4=14 \end{matrix}$. Από τη δεύτερη γραμμή συμπεραίνουμε ότι: το D είναι φραγμένο. Άρα η d στο D ελαχιστοποιείται και η ελάχιστη τιμή λαμβάνεται σε κάποια από τις κορυφές K_1, K_2, K_3. Όμως: $d(K_1)=f(2,2)=f(\Gamma)$, $d(K_2)=f(1,0)=f(A)$, $d(K_3)=f(4,0)=f(B)$. Επομένως η ελάχιστη τιμή του d στο D λαμβάνεται στο $K_1=(2,2,0,0)$. Έτσι προκύπτει ξανά το σημείο Γ ως σημείο ολικού ελαχίστου της f στο S. ■ 14.4

Άσκηση 6.4.

$m=2, n=4$ $\quad A=\begin{array}{cccc} \left[\begin{matrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -6 & 7 \end{matrix}\right] \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \end{array}$ $\quad b=\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} > 0$

α) $\{\alpha_1,\alpha_2\}, \{\alpha_1,\alpha_3\}, \{\alpha_1,\alpha_4\}, \{\alpha_2,\alpha_3\}, \{\alpha_2,\alpha_4\}, \{\alpha_3,\alpha_4\}$.

β) Περ. 1 $\{\alpha_1,\alpha_2\}$

$$\lambda\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2\lambda+3k=8 \\ -\lambda+2k=3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 7k=14 \\ \lambda=2k-3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} k=2 \\ \lambda=1 \end{matrix}.$$

Άρα: $x^B=(1,2,0,0)$

Περ. 2 $\{\alpha_1,\alpha_3\}$

$$\lambda\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} -1 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2\lambda-k=8 \\ -\lambda-6k=3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -12k-k-6=8 \\ \lambda=-6k-3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} k=-\frac{14}{13}<0 \\ \lambda=\frac{45}{13} \end{matrix}.$$

Δεν υπάρχει βασική εφικτή λύση ως προς την $\{\alpha_1,\alpha_3\}$.

Περ. 3. $\{\alpha_1,\alpha_4\}$

$$\lambda\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2\lambda+4k=8 \\ -\lambda+7k=3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda+2k=4 \\ -\lambda+7k=3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 9k=7 \\ \lambda=7k-3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} k=7/9 \\ \lambda=\frac{49}{9}-3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} k=7/9 \\ \lambda=\frac{49-27}{9} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} k=7/9 \\ \lambda=\frac{22}{9} \end{matrix}.$$

Άρα $x^B=(7/9, 0, 0, \frac{22}{9})$

Περ. 4. $\{\alpha_2, \alpha_3\}$

$$\lambda\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}+\kappa\begin{bmatrix}-1\\-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}3\lambda-\kappa=8\\2\lambda-6\kappa=3\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\kappa=3\lambda-8\\2\lambda-6(3\lambda-8)=3\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\kappa=3\lambda-8\\2\lambda-18\lambda+48=3\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\kappa=3\lambda-8\\16\lambda=45\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\kappa=\frac{7}{16}\\ \lambda=\frac{45}{16}\end{matrix}$$

Άρα $x^B=\left(0, \frac{45}{16}, \frac{7}{16}, 0\right)$.

Περ. 5 $\{\alpha_2, \alpha_4\}$

$$\lambda\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}+\kappa\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}3\lambda+4\kappa=8\\2\lambda+7\kappa=3\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\frac{3}{2}(3-7\kappa)+4\kappa=8\\ \lambda=\frac{3-7\kappa}{2}\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}9-21\kappa+8\kappa=16\\ \lambda=\frac{3-7\kappa}{2}\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}-13\kappa=+7\\ \lambda=\frac{3-7\kappa}{2}\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\kappa=-\frac{7}{13}<0\\ \lambda=\frac{44}{13}\end{matrix}$$

Άρα δεν υπάρχει βασική εφικτή λύση ως προς $\{\alpha_2, \alpha_4\}$

Περ 6 $\{\alpha_3, \alpha_4\}$

$$\lambda\begin{bmatrix}-1\\-6\end{bmatrix}+\kappa\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}-\lambda+4\kappa=8\\-6\lambda+7\kappa=3\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\lambda=4\kappa-8\\-6(4\kappa-8)+7\kappa=3\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\lambda=4\kappa-8\\-24\kappa+48+7\kappa=3\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\lambda=4\kappa-8\\24\kappa-7\kappa=48-3\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\lambda=4\kappa-8\\17\kappa=45\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\lambda=\frac{44}{17}\\ \kappa=\frac{45}{17}\end{matrix}$$

Άρα: $x^B=\left(0, 0, \frac{44}{17}, \frac{45}{17}\right)$.

γ) Ας αναζητήσουμε $x \in S'$ με: $x=(\lambda,\kappa,\mu,0)$ και $\lambda,\kappa,\mu>0$. Τότε: $Ax=b \Rightarrow$

$$\lambda\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+\kappa\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix}-1\\-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}2\lambda+3\kappa-\mu=8\\-\lambda+2\kappa-6\mu=3\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}4\kappa-12\mu-6+3\kappa-\mu=8\\ \lambda=2\kappa-6\mu-3\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}7\kappa-13\mu=14\\ \lambda=2\kappa-6\mu-3\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}7\kappa=14+13\mu\\ \lambda=2\kappa-6\mu-3\end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \kappa=2+\frac{13}{7}\mu,\ \lambda=4+\frac{26}{7}\mu-6\mu-3 \Leftrightarrow \kappa=2+\frac{13}{7}\mu,\ \lambda=1+\frac{26-6\cdot7}{7}\mu \Leftrightarrow \kappa=2+\frac{13}{7}\mu,\ \lambda=1-\frac{16}{7}\mu.$$

Η απαίτηση $\lambda>0$ οδηγεί στον περιορισμό $\frac{7}{16}>\mu$. Άρα για κάθε $\mu\in\left(0,\frac{7}{16}\right)$ η $x=\left(1-\frac{16}{7}\mu,\ 2+\frac{13}{7}\mu,\ \mu,\ 0\right)$ είναι εφικτή λύση η οποία δεν είναι βασική.

δ) $$\begin{matrix}2x_1+3x_2-x_3+4x_4=8\\-x_1+2x_2-6x_3+7x_4=3\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}2x_1+3x_2-x_3+4x_4=8\\-3x_1-x_2-5x_3+3x_4=-5\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}2x_1+3x_2-x_3+4x_4=8\\-5x_1-4x_2-4x_3-x_4=-13\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}2x_1+3x_2-x_3+4x_4=8\\5x_1+4x_2+4x_3+x_4=13\end{matrix}$$

Άρα το S' είναι φραγμένο

<u>Σημείωση</u> Επειδή το S είναι κυρτό έχουμε ότι: $\lambda A+(1-\lambda)B \in S$ για κάθε $A,B\in S$ και $\lambda\in(0,1)$

Διαλέγοντας π.χ. $A=(1,2,0,0)$ και $B=(7/9,0,0,\frac{22}{9})$ τότε τα σημεία:

$$\lambda A+(1-\lambda)B = \left(\lambda+7/9(1-\lambda),\ 2\lambda,\ 0,\ (1-\lambda)\frac{22}{9}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{9}\lambda+7/9,\ 2\lambda,\ 0,\ (1-\lambda)\frac{22}{9}\right) \in S \quad \forall \lambda\in(0,1).$$

χωρίς να είναι βασικές εφικτές λύσεις.

Λύση Άσκησης 6.6.

Εδώ $m=3,\ n=4$, $A\in\mathbb{R}^{3\times4}$ με

$$A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}\ \alpha_1 & \ \alpha_2 & \ \alpha_3 & \ \alpha_4\end{matrix}\end{array}, \quad b\in\mathbb{R}^3 \text{ με } b=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}>0$$

Είναι γραμμικά ανεξάρτητες οι ακόλουθες τριάδες στηλών $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$, $\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\}$. Επειδή $\alpha_2=\alpha_4$ οι τριάδες $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\}$ και $\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες. (Όλες οι δυνατές τριάδες είναι $\binom{4}{3}=\frac{4!}{3!\,1!}=4$.)

Περίπτωση 1 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$

$$\kappa\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned}\kappa+\lambda+\mu&=2\\ \kappa-\lambda+\mu&=1\\ \kappa+\lambda-\mu&=1\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}2\lambda&=1\\ 2\kappa&=2\\ \mu&=1-\kappa+\lambda\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}\lambda&=1/2\\ \kappa&=1\\ \mu&=1-1+1/2\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}\lambda&=1/2\\ \kappa&=1\\ \mu&=1/2\end{aligned}$$

Άρα: $x^B=(1,\tfrac12,\tfrac12,0)$

Εφικτή λύση που να αντιστοιχεί στις στήλες $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$

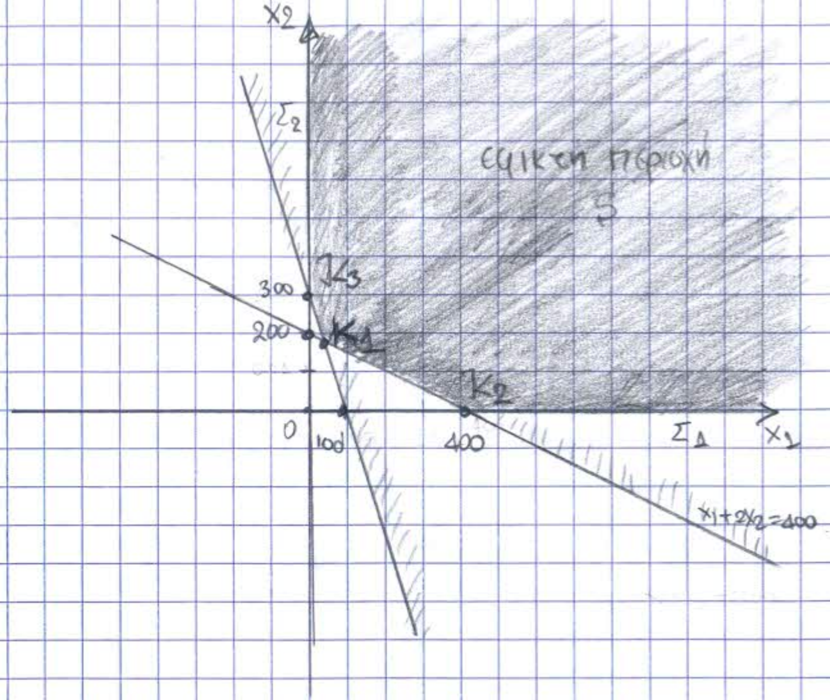
Περίπτωση 2 $\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\}$

$$\kappa\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned}\kappa+\lambda+\mu&=2\\ \kappa+\lambda-\mu&=1\\ \kappa-\lambda+\mu&=1\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}2\mu&=1\\ \lambda&=1+\mu-\kappa\\ 2\kappa&=2\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}\mu&=1/2\\ \lambda&=1+1/2-1\\ \kappa&=1\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}\mu&=1/2\\ \lambda&=1/2\\ \kappa&=1\end{aligned}$$

Άρα $x^B=(1,0,\tfrac12,\tfrac12)$.

Σημ. Επειδή $x_1+x_2+x_3+x_4=2$ και $x\geq0$, έπεται (βλ. Άσκηση 6.5) ότι το $S=\{x\in\mathbb{R}^4:\ Ax=b,\ x\geq0\}$ είναι φραγμένο. Άρα η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή μιας γραμμικής συνάρτησης λαμβάνεται σε κάποια από τις κορυφές: $(1,\tfrac12,\tfrac12,0)$ και $(1,0,\tfrac12,\tfrac12)$.

Λύση Άσκησης 6.3



α) $\begin{cases} 0.03x_1+0.01x_2=3 \\ 0.01x_1+0.02x_2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1+x_2=300 \\ x_1+2x_2=400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=300-3x_1 \\ x_1+600-6x_1=400 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2=300-3x_1 \\ -5x_1=-200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=300-120 \\ x_1=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=180 \\ x_1=40 \end{cases}$

Έτσι το σημείο τομής των ευθειών $0.03x_1+0.01x_2=3$ και $0.01x_1+0.02x_2=4$ είναι το σημείο $K_1=(40,180)$.

Η εφικτή περιοχή S δεν είναι φραγμένη.

β). Έστω: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με: $f(x)=0.4x_1+0.5x_2$ $\forall x\in\mathbb{R}^2$. Επειδή $\nabla f(x)=\begin{pmatrix}0.4\\0.5\end{pmatrix}\neq 0$ η f δεν έχει τοπικά ελάχιστα ή μέγιστα στο εσωτερικό του S. Το S έχει 3 ακραία σημεία: $K_1=(40,180)$, $K_2=(400,0)$, $K_3=(0,300)$ και οι αντίστοιχες τιμές της f είναι: $f(K_1)=0.4\cdot 40+0.5\cdot 180=16+90=106$, $f(K_2)=400\cdot 0.4=160$, $f(K_3)=0.5\cdot 300=150$. Έστω $\Sigma_1=\{(x_1,0): x_1\geq 400\}$ και $\Sigma_2=\{(0,x_2): x_2\geq 300\}$. Για κάθε $x\in\Sigma_1$, έχουμε: $f(x)=0.4\cdot x_1 \geq 0.4\cdot 400=f(400,0)=f(K_2)$. Για κάθε $x\in\Sigma_2$ έχουμε: $f(x)=0.5x_2=\frac{1}{2}x_2\geq\frac{1}{2}\cdot 300=f(0,300)=f(K_3)$. Επιπλέον, επειδή η f είναι γραμμική η ελάχιστη τιμή της f πάνω σε ένα ευθύγραμμο τμήμα λαμβάνεται στα άκρα του. Άρα: $\min\limits_{K_1K_2} f=\min\{f(K_1),f(K_2)\}=106=f(K_1)$, $\min\limits_{K_1K_3} f=\min\{f(K_1),f(K_3)\}=106=f(K_1)$, $\min\limits_{\Sigma_1} f=f(K_2)$, $\min\limits_{\Sigma_2} f=f(K_3)$. Άρα το K_1 είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f στο S.

γ) Εισάγουμε νέες μεταβλητές $x_3, x_4 \geq 0$, τις αντίστοιχες

$$0.03x_1 + 0.01x_2 - x_3 = 3$$

$$0.01x_1 + 0.02x_2 - x_4 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

το διάνυσμα $c = (0.4, 0.5, 0, 0)$ και τη συνάρτηση: $d: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ με $d(x) = (c, x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^4$

Επομένως η κανονική μορφή του προβλήματος είναι: $\min\limits_{x \in D} d(x)$, όπου:

$$D := \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = b, x \geq 0\} \text{ και } A \in \mathbb{R}^{2\times4} \text{ με } A = \begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} 0.03 & 0.01 & -1 & 0 \\ 0.01 & 0.02 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & x_3 & x_4 \end{array} \end{array}, \; b \in \mathbb{R}^2 \text{ με } b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} > 0.$$

Περ. 1 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$

$$\lambda \begin{bmatrix} 0.03 \\ 0.01 \end{bmatrix} + \kappa \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 3\lambda + \kappa = 300 \\ \lambda + 2\kappa = 400 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda = 40 \\ \kappa = 180 \end{array}$$

Άρα: $x^B = (40, 180, 0, 0)$

Περ. 2 $\{\alpha_1, \alpha_3\}$

$$\lambda \begin{bmatrix} 0.03 \\ 0.01 \end{bmatrix} + \kappa \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 3\lambda - 100\kappa = 300 \\ \lambda = 400 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 100\kappa = 1200 - 300 \\ \lambda = 400 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \kappa = 90 \\ \lambda = 400 \end{array}$$

Άρα: $x^B = (400, 0, 90, 0)$.

14.10

Περ. 3 $\{\alpha_1, \alpha_4\}$

$$\lambda \begin{bmatrix} 0.03 \\ 0.01 \end{bmatrix} + \kappa \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda = 300 \\ \lambda - 100\kappa = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 100 \\ 100\kappa = 100 - 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 100 \\ \kappa = -3 < 0 \end{cases}$$

Δεν υπάρχει βασική εφικτή λύση ως προς τη βάση $\{\alpha_1, \alpha_4\}$.

Περ. 4 $\{\alpha_2, \alpha_3\}$

$$\lambda \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix} + \kappa \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 100\kappa = 300 \\ 2\lambda = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 100\kappa = 100 \\ \lambda = 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 \\ \lambda = 200 \end{cases}$$

Άρα $x^B = (0, 200, 1, 0)$

Περ. 5 $\{\alpha_2, \alpha_4\}$

$$\lambda \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix} + \kappa \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 300 \\ 2\lambda - 100\kappa = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 300 \\ 100\kappa = 600 - 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 300 \\ \kappa = 2 \end{cases}$$

Άρα $x^B = (0, 300, 0, 1)$

Περ. 6 $\{\alpha_3, \alpha_4\}$

$$\lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \kappa \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -3 < 0 \\ \kappa = -4 < 0 \end{cases}$$

Δεν υπάρχει βασική εφικτή λύση ως προς τη βάση $\{\alpha_3, \alpha_4\}$.