MEM-293 Θεωρία Βελτιστοποίησης

ΜΑΘΗΜΑ 15 (ασύγχρονο)

<u>Λύσεις των Ασκήσεων του Φυλλαδίου 5</u>

<u>Λύση Άσκησης 5.1</u> Έχουμε $f(x)=x_1^2+x_2^2$ $\forall x\in\mathbb{R}^2$ και ανισοτικό περιορισμό $g_1(x)=-x_1-x_2-1$ $\forall x\in\mathbb{R}^2$.

α) Παρατηρούμε ότι $\nabla g_1(x)=(-1,-1)^T\neq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}^2$. Όταν $x\in S$ με $g_1(x)=0$, δηλ. $J(x)=\{1\}$, τότε: $\nabla g_1(x)\neq 0$.
Επομένως όλα τα ενεργά σημεία των περιορισμών είναι ομαλά.

β) Έστω $x\in S$ σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο S.

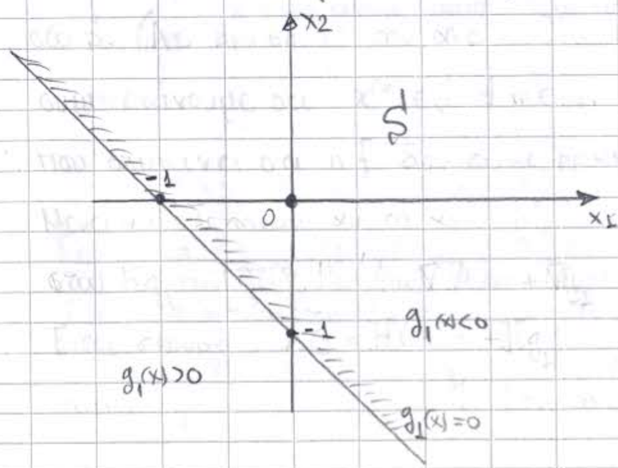
<u>Περίπτωση 1:</u> $J(x)=\emptyset$ δηλ. $g_1(x)<0$.

Άρα $\nabla f(x)=0 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0\in S$, καθώς $g_1(0)=-1<0$. □

<u>Περίπτωση 2:</u> $J(x)=\{1\}$ δηλ. $g_1(x)=0 \Leftrightarrow x_1+x_2=-1$

Επειδή το x είναι ομαλό σημείο των περιορισμών (καθώς όλα τα ενεργά σημεία των περιορισμών είναι ομαλά), υπάρχει $\mu\geq 0$ τ.ω. $\nabla f(x)+\mu\nabla g_1(x)=0 \Leftrightarrow 2x+\mu\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{matrix}2x_1-\mu=0\\2x_2-\mu=0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}x_1=\mu/2\\x_2=\mu/2\end{matrix}$. Επιπλέον, $g_1(x)=0$ $\Leftrightarrow -\frac{\mu}{2}-\frac{\mu}{2}-1=0 \Leftrightarrow -\mu-1=0 \Leftrightarrow \mu=-1<0$. Άρα το x δεν είναι ομαλό σημείο του περιορισμού g_1. □

Η παραπάνω διερεύνηση μας οδήγησε στο σημείο: $x=0$ με $J(x)=\emptyset$ και $\mu=0$. Επειδή: $f(x)>0$ $\forall x\in\mathbb{R}^2$ με $x\neq 0$, έπεται ότι το $x=0$ είναι το μοναδικό σημείο ολικού ελαχίστου της f στο S.



<u>Σημ.</u> Εναλλακτικά καταφεύγουμε στις συνθήκες 2ης τάξης. Εδώ έχουμε: $Hf(x)=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$ και $Hg_1(x)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ $\forall x\in\mathbb{R}^2$. Άρα: $\Lambda(x)=Hf(x)+\mu Hg_1(x)=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$ που είναι θ.ο. Επομένως το $x=0$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου. Επειδή το S είναι κυρτό και η f κυρτή, το $x=0$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f στο S. ■

<u>Λύση Άσκησης 5.2</u> Εδώ έχουμε $f(x)=x_1^2+(x_2-1)^2+4x_3^2 \ \forall x\in\mathbb{R}^3$, $g_1(x)=x_1+x_2+2x_3-18 \ \forall x\in\mathbb{R}^3$ και $g_2(x)=4-2x_1-x_3 \ \forall x\in\mathbb{R}^3$.

α) Πρώτα παρατηρούμε ότι: $\nabla g_1(x)=(1,1,2)^T$ και $\nabla g_2(x)=(-2,0,-1)^T$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^3$.

Έστω $x\in S$ ενεργό σημείο των περιορισμών. Τότε έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

<u>Περίπτωση α1:</u> $J(x)=\{1\}$ δηλ. $g_1(x)=0$. Επειδή $\nabla g_1(x)=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\neq 0$, το x είναι ομαλό σημείο του περιορισμού g_1. □

<u>Περίπτωση α2:</u> $J(x)=\{2\}$ δηλ. $g_2(x)=0$. Επειδή $\nabla g_2(x)=\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}\neq 0$, το x είναι ομαλό σημείο του περιορισμού g_2. □

<u>Περίπτωση α3:</u> $J(x)=\{1,2\}$ δηλ. $g_1(x)=g_2(x)=0$. Επειδή τα διανύσματα $(1,1,2)^T$ και $(-2,0,-1)^T$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, το x είναι ομαλό σημείο των περιορισμών g_1,g_2. □

Άρα όλα τα $x\in S$ τα οποία είναι ενεργά σημεία των περιορισμών είναι ομαλά.

β) Έστω $x\in S$ σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο S. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

<u>Περίπτωση β1:</u> $J(x)=\emptyset$, δηλ. $g_1(x)<0$ και $g_2(x)<0$.

Τότε $\nabla f(x)=0 \Leftrightarrow 2(x_1, x_2-1, 4x_3)^T=0 \Leftrightarrow x=(0,1,0)^T$. Επειδή $g_1(x)=0+1+0-18=-17<0$ και $g_2(x)=4-0-0=4>0$, συμπεραίνουμε ότι: $(0,1,0)^T\notin S$. Άρα το x δεν μπορεί να είναι ανενεργό σημείο των περιορισμών. □

<u>Περίπτωση β2:</u> $J(x)=\{1\}$, δηλ. $g_1(x)=0$ και $g_2(x)<0$.

Επειδή το x είναι ομαλό σημείο των περιορισμών έπεται ότι υπάρχει $\mu_1\geq 0$ τ.ω. $\nabla f(x)+\mu_1\nabla g_1(x)=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} 2x_1+\mu_1&=0 \\ 2(x_2-1)+\mu_1&=0 \\ 8x_3+2\mu_1&=0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1&=-\mu_1/2 \\ x_2&=1-\mu_1/2 \\ x_3&=-\mu_1/4 \end{aligned}$$

Επιπλέον, $g_1(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{\mu_1}{2}+1-\frac{\mu_1}{2}-\frac{\mu_1}{2}-18=0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}\mu_1-17=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\mu_1=-17 \Leftrightarrow \mu_1=-\frac{34}{3}<0$.

Το x δεν μπορεί να ενεργό σημείο μόνο του περιορισμού g_1 □

<u>Περίπτωση β3:</u> $J(x)=\{2\}$, δηλ. $g_1(x)<0$ και $g_2(x)=0$.

Επειδη το x είναι ομαλό σημείο των περιορισμών έπεται ότι υπάρχει $\mu_2\geq 0$ τ.ω. $\nabla f(x)+\mu_2\nabla g_2(x)=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} 2x_1-2\mu_2&=0 \\ 2(x_2-1)&=0 \\ 8x_3-\mu_2&=0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1&=\mu_2 \\ x_2&=1 \\ x_3&=\tfrac{1}{8}\mu_2 \end{aligned}$$

Επιπλέον, $g_2(x)=0 \Leftrightarrow 4-2\mu_2-\frac{1}{8}\mu_2=0 \Leftrightarrow \frac{17}{8}\mu_2=4 \Leftrightarrow \mu_2=\frac{32}{17}$. Έτσι: $x=(\frac{32}{17},1,\frac{4}{17})^T$. Επειδή: $g_1(x)=\frac{32}{17}+1+\frac{8}{17}-18=-17+\frac{40}{17}=-\frac{249}{17}<0$, έχουμε $x\in S$. □

Περίπτωση β4: $J(x)=\{1,2\}$, δηλ. $g_1(x)=g_2(x)=0$. (15.3

Επειδή το x είναι ομαλό σημείο των περιορισμών έπεται ότι υπάρχουν $\mu_1,\mu_2\geq 0$ τ.ω.

$$\nabla f(x)+\mu_1\nabla g_1(x)+\mu_2\nabla g_2(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1+\mu_2-2\mu_2=0 \\ 2(x_2-1)+\mu_1=0 \\ 8x_3+2\mu_1-\mu_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\mu_2-\frac{1}{2}\mu_1 \\ x_2=1-\frac{\mu_1}{2} \\ x_3=\frac{1}{8}(\mu_2-2\mu_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_1(x)=0 \\ g_2(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+2x_3=18 \\ 2x_1+x_3=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=18-x_2-2x_3 \\ x_3=4-2x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=18-x_2-2(4-2x_1) \\ x_3=4-2x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=10-x_2+4x_1 \\ x_3=4-2x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=10+3x_1 \\ x_3=4-2x_1 \end{cases}$$

Επομένως:
$$\begin{cases} 1-\frac{\mu_1}{2}=10+3(\mu_2-\frac{1}{2}\mu_1) \\ \frac{1}{8}(\mu_2-2\mu_1)=4-2(\mu_2-\frac{1}{2}\mu_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\frac{\mu_1}{2}=10+3\mu_2-\frac{3}{2}\mu_1 \\ \frac{1}{8}\mu_2-\frac{1}{4}\mu_1=4-2\mu_2+\mu_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\mu_1=20+6\mu_2-3\mu_1 \\ \mu_2-2\mu_1=32-16\mu_2+8\mu_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\mu_1-6\mu_2=18 \\ 10\mu_1-17\mu_2=-32 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1=9+3\mu_2 \\ 90+30\mu_2-17\mu_2=-32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1=9+3\mu_2 \\ 13\mu_2=-122 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1=9+3\mu_2 \\ \mu_2=-\frac{122}{13}<0. \end{cases}$$

Επομένως το x δεν μπορεί να είναι ενεργό σημείο των περιορισμών g_1 και g_2. □

Η διερεύνηση μας οδήγησε στο σημείο: $x=\left(\frac{32}{17},1,\frac{4}{17}\right)^T$ με $\mu_2=\frac{32}{17}$, $\mu_1=0$. Επιπλέον $f(x)=\left(\frac{32}{17}\right)^2+4\frac{16}{17^2}=\frac{1024+64}{17^2}=\frac{1088}{289}$.

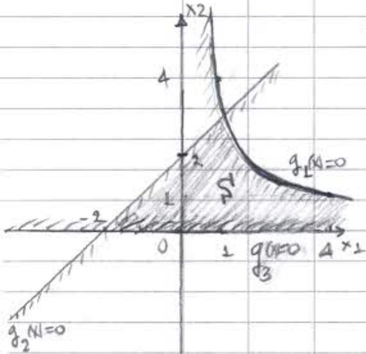
Ας εξετάσουμε τις συνθήκες $2^{ης}$ τάξης. Έχουμε ότι: $Hf(z)=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ $\forall z\in\mathbb{R}^3$ και $Hg_2(z)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\forall z\in\mathbb{R}^3$.

Άρα ο πίνακας $L(x)=Hf(x)+\mu_2 Hg_2(x)=diag(2,2,8)$ είναι θ.ο. στο $\mathbb{R}^3$ άρα και στο εφαπτόμενο επίπεδο $M(x)$. Επομένως, το x είναι σημείο τοπικού ελαχίστου. Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}^3$ και το S είναι κυρτό (επειδή οι g_1, g_2 είναι γραμμικές), επομένως το x είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f στο S. ■

Λύση Άσκησης 5.3.

Το πρόβλημα έχει ανισοτικούς περιορισμούς: $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με: $g_1(x) = x_1x_2 - 4$, $g_2(x) = -2 - x_1 + x_2$ και $g_3(x) = -x_2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$. Έτσι: $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : g_j(x) \le 0,\ j = 1,2,3\}$. Επιπλέον: $f(x) = 2x_1 + x_2 \ \forall x \in \mathbb{R}^2$.

α) Πρώτα παρατηρούμε ότι: $\nabla g_1(x) = (x_2, x_1)^T$, $\nabla g_2(x) = (-1, 1)^T$ και $\nabla g_3(x) = (0, -1)^T$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$.
Έστω $x \in S$ ενεργό σημείο των περιορισμών. Τότε διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:



Το S δεν είναι φραγμένο.

Περίπτωση α1: $J(x) = \{1\}$ δηλ. $g_1(x) = 0$, $g_2(x) < 0$, $g_3(x) < 0$.

Τότε: $\nabla g_1(x) = 0$ ανν $x = 0$. Όμως $g_1(0) = -4 < 0$. Άρα $\nabla g_1(x) \neq 0$ όταν το x είναι ενεργό στον περιορισμό g_1. Έτσι το x είναι ομαλό σημείο του περιορισμού g_1 □

Περίπτωση α2: $J(x) = \{2\}$ δηλ. $g_1(x) < 0$, $g_2(x) = 0$, $g_3(x) < 0$.

Επειδή $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$, το x είναι ομαλό σημείο του περιορισμού g_2. □

Περίπτωση α3: $J(x) = \{3\}$ δηλ. $g_1(x) < 0$, $g_2(x) < 0$, $g_3(x) = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$.

Επειδή $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, το x είναι ομαλό σημείο του περιορισμού g_3. □

Περίπτωση α4: $J(x) = \{1, 2\}$, δηλ. $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = 0$, $g_3(x) < 0$.

Επειδή $g_1(x) = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 = 4$, έπεται ότι $x_1x_2 \neq 0$. Άρα $\nabla g_1(x) \neq 0$. Θα εξετάσουμε τη γραμμική ανεξαρτησία των $\{\nabla g_1(x), \nabla g_2(x)\}$. Έστω $\lambda_1 \nabla g_1(x) + \lambda_2 \nabla g_2(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 x_2 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \lambda_1 x_2 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_1 x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \lambda_1 x_2 \\ \lambda_1(x_1 + x_2) = 0 \end{cases} \underset{\substack{x_1 + x_2 \neq 0 \\ \text{διότι} \\ x_1, x_2 \text{ ομόσημα} \\ \text{και μη μηδενικά}}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$. Άρα το x είναι ομαλό σημείο των περιορισμών g_1 και g_2. □

Περίπτωση α5: $J(x) = \{1, 3\}$, δηλ. $g_1(x) = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 = 4$, $g_2(x) < 0$, $g_3(x) = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$.

Όμως δεν μπορεί να ισχύει: $x_1x_2 = 4$ και $x_2 = 0$. Επομένως η περίπτωση απορρίπτεται. □

15.5

Περίπτωση α6. $J(x)=\{2,3\}$ δηλ. $g_1(x)<0$, $g_2(x)=0 \Leftrightarrow -x_1+x_2=2$, $g_3(x)=0 \Leftrightarrow x_2=0$.

Επομένως: ($g_2(x)=0$ και $g_3(x)=0$) $\Leftrightarrow$ $x=(-2,0)^T$. Επιπλέον, $g_1(-2,0)=-2-4=-6<0$. Άρα $x=(-2,0)^T\in S$.

Επίσης τα $\nabla g_2(x)=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ και $\nabla g_3(x)=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έτσι το x είναι ομαλό σημείο των ανισοτικών περιορισμών g_2 και g_3. □

Περίπτωση α7 $J(x)=\{1,2,3\}$ δηλ. $g_1(x)=0$, $g_2(x)=0$, $g_3(x)=0$. Απορρίπτεται (βλ. Περίπτωση α5). □

Επομένως όλα τα $x\in S$ τα οποία είναι ενεργά σημεία των περιορισμών είναι ομαλά.

β) Έστω $x\in S$ σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο S.

Περίπτωση β1: $J(x)=\emptyset$, δηλ. $g_j(x)<0$ για $j=1,2,3$.

Τότε: $\nabla f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=0$ που δεν ισχύει. Άρα το x δεν μπορεί να είναι ανενεργό σημείο των περιορισμών. □

Περίπτωση β2: $J(x)=\{1\}$, δηλ. $g_1(x)=0$, $g_2(x)<0$, $g_3(x)<0$.

Επομένως υπάρχει $\mu_1\geq 0$ τ.ω. $\nabla f(x)+\mu_1\nabla g_1(x)=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\mu_1\begin{pmatrix}x_2\\x_1\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{matrix}\mu_1 x_2+2=0\\ \mu_1 x_1+1=0\end{matrix}$. Προφανώς $\mu_1\neq 0$, και

Έτσι έχουμε: $x_2=-\frac{2}{\mu_1}$, $x_1=-\frac{1}{\mu_1}$. Επιπλέον, $g_1(x)=0 \Leftrightarrow x_1x_2=4 \Leftrightarrow \frac{2}{(\mu_1)^2}=4 \Leftrightarrow \mu_1^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \mu_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Έτσι: $x=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$. Επειδή $g_2(x)=-2-x_1+x_2=-2+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}=-2-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{4+\sqrt{2}}{2}<0$

και $g_3(x)=-x_2=\frac{2}{\sqrt{2}}>0$, έπεται $x\notin S$. Άρα το x δεν μπορεί να είναι ενεργό μόνο του περιορισμού g_1. □

Περίπτωση β3: $J(x)=\{2\}$, δηλ. $g_1(x)<0$, $g_2(x)=0$, $g_3(x)<0$.

Επομένως υπάρχει $\mu_2\geq 0$ τ.ω. $\nabla f(x)+\mu_2\nabla g_2(x)=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\mu_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{matrix}2-\mu_2=0\\ 1+\mu_2=0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\mu_2=2\\ 3=0\end{matrix}$

Άρα το x δεν μπορεί να είναι ενεργό σημείο μόνο του περιορισμού g_2. □

Περίπτωση β4: $J(x)=\{3\}$, δηλ. $g_1(x)<0$, $g_2(x)<0$, $g_3(x)=0$.

Επομένως υπάρχει $\mu_3\geq 0$ τ.ω. $\nabla f(x)+\mu_3\nabla g_3(x)=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\mu_3\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{matrix}2=0\\ 1-\mu_3=0\end{matrix}$.

Άρα το x δεν μπορεί να είναι ενεργό σημείο μόνο του περιορισμού g_3. □

Περίπτωση β5: $J(x)=\{1,2\}$, δηλ. $g_1(x)=0,\ g_2(x)=0,\ g_3(x)<0$.

Υπάρχουν $\mu_1,\mu_2\geq 0$ τ.ω. $\nabla f(x)+\mu_1\nabla g_1(x)+\mu_2\nabla g_2(x)=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\mu_1\begin{pmatrix}x_2\\x_1\end{pmatrix}+\mu_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{matrix}\mu_1x_2-\mu_2+2=0\\ \mu_1x_1+\mu_2+1=0\end{matrix}$

Επιπλέον έχουμε: $\begin{matrix}x_1x_2=4\\x_1-x_2=-2\end{matrix}$. Βάζουμε όλες τις σχέσεις μαζί:

$$\begin{cases}\mu_1x_2-\mu_2+2=0\\ \mu_1x_1+\mu_2+1=0\\ x_1x_2=4\\ x_1-x_2=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mu_1x_2-\mu_2+2=0\\ \mu_1(x_1-x_2)+2\mu_2-1=0\\ x_1x_2=4\\ x_1-x_2=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mu_1x_2-\mu_2+2=0\\ -2\mu_1+2\mu_2=1\\ x_2=4/x_1\\ x_1-4/x_1=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mu_2=2+\mu_1x_1\\ \mu_1-\mu_2=-1/2\\ x_2=4/x_1\\ x_1^2+2x_1-4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\mu_2=2+\mu_1x_1\\ \mu_1-2-\mu_1x_1=-\frac{1}{2}\\ x_2=\frac{4}{x_1}\\ x_1=-1\pm\sqrt5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mu_2=2+\mu_1x_1\\ \mu_1(1-x_1)=\frac{3}{2}\\ x_2=\frac{4}{x_1}\\ x_1=-1\pm\sqrt5\end{cases}$$

Υπ. β5.1 $x_1=-1-\sqrt5$. Τότε: $g_3(x)=-x_2=\frac{4}{1+\sqrt5}>0$. Άρα $x\notin S$.

Υπ. β5.2 $x_1=\sqrt5-1$. Τότε $x_2=\frac{4}{\sqrt5-1}$. Επιπλέον, $\mu_1(1-x_1)=\frac{3}{2}\Rightarrow\mu_1(1-\sqrt5+1)=\frac{3}{2}\Rightarrow\mu_1(2-\sqrt5)=\frac{3}{2}\Rightarrow\mu_1=\frac{3}{2(2-\sqrt5)}<0.$

Επομένως το x δεν μπορεί να είναι ενεργό σημείο των περιορισμών g_1,g_2. □

Περίπτωση β6. $J(x)=\{1,3\}$, δηλ. $g_1(x)=0,\ g_2(x)<0,\ g_3(x)=0$. Δεν μπορεί να ισχύει (βλ. Περίπτωση α5) □

Περίπτωση β7 $J(x)=\{2,3\}$, δηλ. $g_1(x)<0,\ g_2(x)=0,\ g_3(x)=0$. Τότε $x=(-2,0)^T$. Επιπλέον υπάρχουν $\mu_2,\mu_3\geq0$ τ.ω.

$\nabla f(x)+\mu_2\nabla g_2(x)+\mu_3\nabla g_3(x)=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\mu_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+\mu_3\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{matrix}2-\mu_2=0\\1+\mu_2-\mu_3=0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\mu_2=2\\\mu_2-\mu_3=1\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\mu_2=2\\\mu_3=1.\end{matrix}$ □

Περίπτωση β8. $J(x)=\{1,2,3\}$, δηλ. $g_1(x)=g_2(x)=g_3(x)$. Δεν μπορεί να ισχύει (βλ. Περίπτωση β6). □

Οι συνθήκες $1^{ης}$ τάξης μας οδήγησαν στο ακόλουθο σημείο:

$x=(-2,0)^T$ με: $\mu_1=0$, $\mu_2=2$, $\mu_3=1$. , $I(x)=\{2,3\}$

Παρατηρούμε ότι $Hf(x)=0$, $Hg_2(x)=0$, $Hg_3(x)=0$ και $Hg_1(x)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^2$

Τότε $\Delta(x)= Hf(x)+\sum_{j=1}^{3}\mu_j Hg_j(x)=0$, που δεν οδηγεί σε συμπέρασμα.

Για να καταλήξουμε σε κάποιο συμπέρασμα προσεγγίζουμε το πρόβλημα ως εξής:

Έστω $D:=\{x\in\mathbb{R}^2 : g_2(x)\le 0 \text{ και } g_3(x)\le 0\}$. Προφανώς $S \subsetneq D$.

Έστω $z\in D$ με $f(z)<f(-2,0) \Leftrightarrow 2z_1+z_2<-4$. Επειδή $g_3(x)\le 0$ έπεται $z_2\ge 0$. Άρα $2z_1\le 2z_1+z_2<-4$ $\Rightarrow 2z_1<-4 \Rightarrow \boxed{z_1<-2.}$ Επιπλέον: $g_2(z)\le 0 \Rightarrow -2-z_1+z_2\le 0$. Επειδή $z_2\ge 0$, έπεται $-2-z_1\le 0 \Rightarrow \boxed{z_1\ge -2.}$

Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι υπάρχει $z\in D$ τ.ω. $f(z)<f(-2,0)$. Άρα το $x=(-2,0)^T$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f στο D και επομένως της f στο S καθώς $(-2,0)^T\in S$.

Σημ. Ο λόγος που μας οδήγησε στο να ορίσουμε το D χωρίς τον περιορισμό g_1 είναι το γεγονός ότι το $\binom{-2}{0}$ δεν είναι ενεργό σημείο του g_1 και ότι η f είναι γραμμική.

Λύση Άσκησης 5.6

Έχουμε $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x_1^2 + x_2^2 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^2$ και ισοτικό περιορισμό $h_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $h_1(x) = (x_1-2)^3 - x_2^2 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^2$.
Έτσι $S' := \{x \in \mathbb{R}^2 : h_1(x) = 0\}$. Παρατηρούμε ότι $\nabla h_1(x) = (3(x_1-2)^2, -2x_2)$. Άρα $\nabla h_1(x) = 0 \iff$ $(-2x_2 = 0$ και $3(x_1-2)^2 = 0) \iff x_1 = 2, x_2 = 0 \iff x = (2,0)$. Επιπλέον $h_1(2,0) = 0$. Άρα $(2,0)^T \in S'$. Καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι κάθε $x \in S'$ με $x \neq (2,0)^T$ είναι ομαλό σημείο του ισοτικού περιορισμού h_1.

Έστω $x \in S'$ σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο S'. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $x \neq (2,0)$, δηλ. το x είναι ομαλό σημείο του ισοτικού περιορισμού h_1.

Τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\nabla f(x) + \lambda \nabla h_1(x) = 0 \iff \begin{cases} 2x_1 + 3\lambda(x_1-2)^2 = 0 \\ 2x_2 - 2\lambda x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 + 3\lambda(x_1-2)^2 = 0 \\ x_2(1-\lambda) = 0 \end{cases}$

Όμως $x \in S'$ που σημαίνει $h_1(x) = 0 \iff (x_1-2)^3 - x_2^2 = 0$. Συνολικά έχουμε τις ακόλουθες απαιτήσεις: $2x_1 + 3\lambda(x_1-2)^2 = 0$, $x_2(1-\lambda) = 0$, $(x_1-2)^3 - x_2^2 = 0$

Υπ. 1. $x_2 = 0$. Τότε $\begin{cases} 2x_1 + 3\lambda(x_1-2)^2 = 0 \\ (x_1-2)^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = 2 \end{cases}$ Άτοπο

Υπ. 2. $x_2 \neq 0$. Τότε $\lambda = 1$ και επομένως $\begin{cases} (x_1-2)^3 - x_2^2 = 0 \\ 3(x_1-2)^2 + 2x_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2^2 = (x_1-2)^3 \\ 3(x_1^2+4-4x_1) + 2x_1 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x_2^2 = (x_1-2)^3 \\ 3x_1^2 - 10x_1 + 12 = 0 \end{cases}$. Εδώ $\Delta = 100 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 100 - 144 = -44 < 0$, άρα δεν υπάρχουν πραγματικές ρίζες.

Έτσι το x δεν μπορεί να είναι ομαλό σημείο του ισοτικού περιορισμού h_1.

Περίπτωση 2: $x = (2,0)$. Τότε $f(x) = 4$.

Έστω $z \in S'$ με $z \neq (2,0)$. Τότε $(z_1-2)^3 = z_2^2$. Προφανώς $z_2 \neq 0$ και $z_1 > 2$. Θα δείξουμε ότι $f(z) > 4$. Έχουμε:

$f(z) > 4 \iff z_1^2 + z_2^2 > 4 \iff (z_1-2)^2 + z_1^2 > 4 \iff z_1^2 + 4 - 4z_1 + z_1^2 > 4 \iff 2z_1^2 - 4z_1 > 0 \iff z_1^2 - 2z_1 > 0 \iff z_1(z_1-2) > 0$

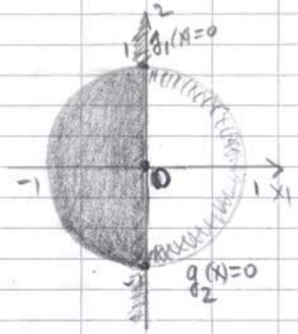
το οποίο ισχύει καθώς $z_1 > 2 > 0$. Άρα το $(2,0)^T$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f στο S'.

Σημείωση: $S' = \{(2+|t|^{2/3}, t) : t \in \mathbb{R}\}$ και $f(2+|t|^{2/3}, t) = t^2 + (2+|t|^{2/3})^2 \geq t^2 \;\; \forall t \in \mathbb{R}$. Άρα η f δεν είναι φραγμένη στο S.

Λύση Άσκησης 5.5.

Εδώ έχουμε $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(x)=-x_1^2-x_2^2$ $\forall x\in\mathbb{R}^2$ και ανισοτικούς περιορισμούς $g_1, g_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $g_1(x)=x_1$ και $g_2(x)=x_1^2+x_2^2-1$ $\forall x\in\mathbb{R}^2$. Επομένως $S:=\{x\in\mathbb{R}^2 : g_j(x)\le 0 \quad j=1,2\}$. Προφανώς το S είναι κλειστό και φραγμένο. Επομένως η f έχει σημείο ολικού ελαχίστου στο S.

α) Έχουμε $\nabla g_1(x)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ και $\nabla g_2(x)=2x$ $\forall x\in\mathbb{R}^2$. Θα εξετάσουμε αν όλα τα σημεία του S τα οποία είναι ενεργά σημεία των ανισοτικών περιορισμών, είναι ομαλά. Έστω $x\in S$.



<u>Περίπτωση α1</u> $J(x)=\{1\}$, δηλ. $g_1(x)=0$, $g_2(x)<0$. Έτσι $(x_1=0$ και $x_1^2+x_2^2<1)$ $\Leftrightarrow$ $(x_1=0$ και $|x_2|<1)$. Επιπλέον, $\nabla g_1(x)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\neq 0$. Άρα το x είναι ομαλό σημείο του περιορισμού g_1.

<u>Περίπτωση α2</u> $J(x)=\{2\}$, δηλ. $g_1(x)<0$, $g_2(x)=0$. Έτσι: $x_1<0$ και $x_1^2+x_2^2=1$. Επομένως $\nabla g_2(x)=2x\neq 0$. Άρα το x είναι ομαλό σημείο του περιορισμού g_2.

<u>Περίπτωση α3</u> $J(x)=\{1,2\}$, δηλ. $g_1(x)=0$, $g_2(x)=0$. Άρα: $(x_1=0$ και $x_1^2+x_2^2=1)$ $\Leftrightarrow$ $(x_1=0$ και $x_2=\pm 1)$ $\Leftrightarrow$ $x=(0,\varepsilon)$ με $\varepsilon=\pm 1$. Έστω $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ με: $\lambda_1\nabla g_1(x)+\lambda_2\nabla g_2(x)=0$ $\Leftrightarrow$ $\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+2\lambda_2\begin{pmatrix}0\\\varepsilon\end{pmatrix}=0$ $\Leftrightarrow$ $\begin{matrix}\lambda_1=0\\2\lambda_2\varepsilon=0\end{matrix}$ $\Leftrightarrow$ $\lambda_1=\lambda_2=0$. Έτσι τα $\{\nabla g_1(x),\nabla g_2(x)\}$ είναι γραμμ. ανεξάρτητα και το x είναι ομαλό σημείο των περιορισμών g_1, g_2.

β) Έστω x σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο S.

<u>Περίπτωση β1:</u> $J(x)=\emptyset$, δηλ. $g_1(x)<0$ και $g_2(x)<0$. Τότε: $\nabla f(x)=0\Rightarrow -2x=0\Rightarrow x=0$. Όμως $g_1(0)=0$, άρα το 0 δεν είναι ανενεργό σημείο των περιορισμών □

<u>Περίπτωση β2:</u> $J(x)=\{1\}$, δηλ. $g_1(x)=0$, $g_2(x)<0$. Έτσι $x_1=0$ και $x_1^2+x_2^2<1$. Επιπλέον, υπάρχει $\mu_1\ge 0$ τ.ω. $\nabla f(x)+\mu_1\nabla g_1(x)=0$

$\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix}-2x_1\\-2x_2\end{pmatrix}+\mu_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=0$ $\Leftrightarrow$ $\begin{matrix}-2x_1+\mu_1=0\\-2x_2=0\end{matrix}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{matrix}x_1=+\mu_1/2\\x_2=0\end{matrix}$ $\Leftrightarrow$ $x=\left(\frac{\mu_1}{2},0\right)$. Επειδή $g_1(x)=0\Rightarrow x_1=0\Rightarrow \frac{\mu_1}{2}=0\Rightarrow \mu_1=0$. Έτσι $\mu_1=0$ και $x=0$. □

15.10

<u>Περίπτωση β3:</u> $J(x)=\{2\}$. Τότε: $g_1(x)<0$ και $g_2(x)=0$. Επιπλέον υπάρχει $\mu_2\geq 0$ τ.ω. $\nabla f(x)+\mu_2\nabla g_2(x)=0$

$$\Rightarrow -2x+2\mu_2 x=0 \Rightarrow -x+\mu_2 x=0 \Rightarrow (\mu_2-1)x=0 \underset{\{\text{διότι } g_2(0)=-1<0\}}{\overset{x\neq 0}{\Rightarrow}} \mu_2=1.$$

Επιπλέον, $x_1^2+x_2^2=1$, και $x_1<0$. Άρα: $x_1=-\sqrt{1-x_2^2}$ και $|x_2|<1$. □

<u>Περίπτωση β4:</u> $J(x)=\{1,2\}$. Τότε $(g_1(x)=0$ και $g_2(x)=0) \Leftrightarrow (x_1=0$ και $x_1^2+x_2^2=1) \Leftrightarrow (x_1=0$ και $x_2=\pm 1)$.

Επιπλέον υπάρχουν $\mu_1,\mu_2\geq 0$ τ.ω. $\nabla f(x)+\mu_1\nabla g_1(x)+\mu_2\nabla g_2(x)=0 \Leftrightarrow -2x+\mu_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+2\mu_2 x=0$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} -2x_1+2\mu_2x_1+\mu_1&=0\\ -2x_2+2\mu_2x_2&=0\end{aligned}$$

<u>Υπ. β4.1</u> $x=(0,1)$. Τότε $(\mu_1=0$ και $-2+2\mu_2=0) \Leftrightarrow (\mu_1=0$ και $\mu_2=1)$.

<u>Υπ. β4.2</u> $x=(0,-1)$ Τότε $(\mu_1=0$ και $+2-2\mu_2=0) \Leftrightarrow (\mu_1=0$ και $\mu_2=1)$.

Άρα: $x=(0,1)$ ή $(0,-1)$ με $\mu_1=0,\mu_2=1$ και $J(x)=\{2\}$. □

Καταλήξαμε στα σημεία: $x\in B=\{(-\sqrt{1-t^2},t):|t|\leq 1\}$ με $\begin{matrix}\mu_1=0\\\mu_2=1\end{matrix}$ (βλ. Περ. β3, β4) και $x=0$ με $\mu_1=0,\mu_2=0$, $J(x)=\{1\}$.

Επιπλέον $\mathcal{H}f(x)=\begin{bmatrix}-2&0\\0&-2\end{bmatrix}$, $\mathcal{H}g_1(x)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$, $\mathcal{H}g_2(x)=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^2$.

<u>Περ 1</u>: $x\in B$, $\mu_1=0,\mu_2=1$

Τότε $\Lambda(x)=\mathcal{H}f(x)+\sum_{j=1}^{2}\mu_j\mathcal{H}g_j(x)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$. Άρα οι συνθήκες 2ης τάξης δεν οδηγούν σε συμπέρασμα.

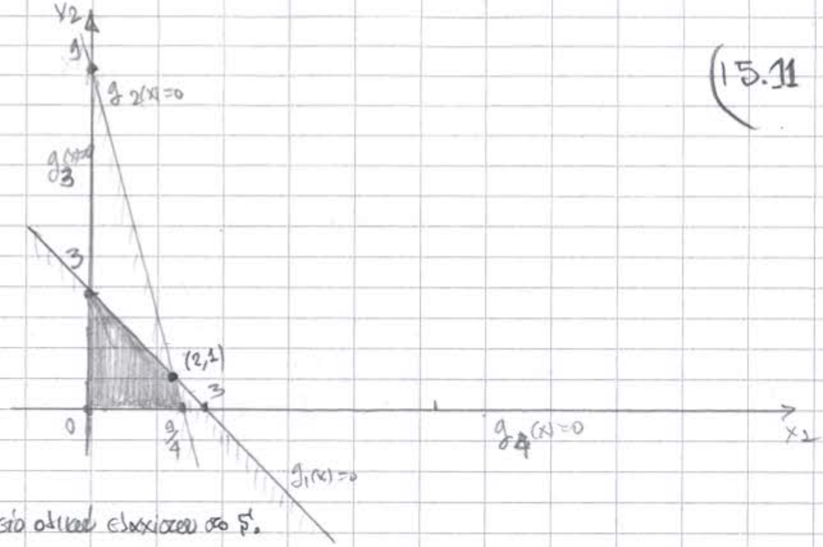
Παρατηρούμε ότι: όταν $z\in\mathcal{S}$ τότε: $z_1^2+z_2^2\leq 1\Rightarrow f(z)\geq -1$. Επειδή $f(z)=-1$ $\forall z\in B$, έπεται ότι όλα τα σημεία του B είναι σημεία ολικού ελαχίστου της f στο $\mathcal{S}$.

<u>Περ 2</u> $x=0$, $\mu_1=0,\mu_2=0$. Τότε $\Lambda(x)=\mathcal{H}f(x)+\sum_{j=1}^{2}\mu_j\mathcal{H}g_j(x)=\begin{bmatrix}-2&0\\0&-2\end{bmatrix}$ ο οποίος είναι αρνητικά ημιορισμένος. Άρα το x δεν είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο $\mathcal{S}$. ■

(<u>Σχημ</u> Το $\mathcal{S}$ αναλλοιωτό και φραγμένο. Επομένως η f έχει σημείο ολικού ελαχίστου στο $\mathcal{S}$ το οποίο θα ικανοποιεί τις συνθήκες 1ης τάξης καθώς όλα τα σημεία του $\mathcal{S}$ τα οποία είναι ενεργά των περιορισμών είναι ομαλά.)

Λύση Άσκησης 5.4

(15.11)



$f(x) = -6x_1 - 3x_2 + x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_2^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2$

$g_1(x) = x_1 + x_2 - 3 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2$

$g_2(x) = 4x_1 + x_2 - 9 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2$

$g_3(x) = -x_1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2$

$g_4(x) = -x_2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2$

Έτσι: $S := \{x \in \mathbb{R}^2 : g_j(x) \le 0, j = 1,2,3,4\}$. Έστω $x \in S$. Τότε $0 \le \max\{x_1, x_2\} \le x_1 + x_2 \le 3$.

Άρα το S είναι φραγμένο. Επειδή το S είναι κλειστό και φραγμένο η f έχει σημείο ολικού ελαχίστου στο S.

α) Ας αναζητήσουμε τα σημεία $x \in S$ τα οποία είναι ομαλά σημεία των ενεργών περιορισμών:

Περίπτωση α1: $J(x) = \{1\}$, δηλ. $g_1(x) = 0$ και $g_j(x) < 0$ για $j = 2,3,4$. Επειδή $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$, το x είναι ομαλό σημείο του περιορισμού g_1

Περίπτωση α2: $J(x) = \{2\}$, δηλ. $g_2(x) = 0$ και $g_j(x) < 0$ για $j = 1,3,4$. Επειδή $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$, το x είναι ομαλό σημείο του περιορισμού g_2

Περίπτωση α3: $J(x) = \{3\}$, δηλ. $g_3(x) = 0$ και $g_j(x) < 0$ για $j = 1,2,4$. Επειδή $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$, το x είναι ομαλό σημείο του περιορισμού g_3

Περίπτωση α4: $J(x) = \{4\}$, δηλ. $g_4(x) = 0$ και $g_j(x) < 0$ για $j = 1,2,3$. Επειδή $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0$, το x είναι ομαλό σημείο του περιορισμού g_4

Περίπτωση α5: $J(x) = \{1,2\}$ ή $\{1,3\}$ ή $\{1,4\}$ ή $\{2,3\}$ ή $\{2,4\}$ ή $\{3,4\}$

Επειδή τα: $\{\nabla g_1(x), \nabla g_2(x)\}$, $\{\nabla g_1(x), \nabla g_3(x)\}$, $\{\nabla g_1(x), \nabla g_4(x)\}$, $\{\nabla g_2(x), \nabla g_3(x)\}$, $\{\nabla g_2(x), \nabla g_4(x)\}$, $\{\nabla g_3(x), \nabla g_4(x)\}$ είναι γραμμ. ανεξάρτητα

το x είναι ομαλό σημείο των αντίστοιχων περιορισμών.

Περίπτωση α6: $J = \{1,2,3\}$. Τότε $g_1(x) = g_2(x) = g_3(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_1 + x_2 = 3, 4x_1 + x_2 = 9 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 3, x_2 = 9$. Αδύνατο.

Περίπτωση α7: $J = \{1,2,4\}$ Τότε $g_1(x) = g_2(x) = g_4(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 3, 4x_1 + x_2 = 9, x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3, x_1 = 9/4, x_2 = 0$. Αδύνατο.

Περίπτωση α8: $J = \{1,3,4\}$. Τότε $g_1(x) = g_3(x) = g_4(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 3, x_1 = 0, x_2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 3, x_1 = x_2 = 0$. Αδύνατο.

Περίπτωση α9: $J = \{2,3,4\}$ Τότε $g_2(x) = g_3(x) = g_4(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0, 0 = 9$. Αδύνατο.

Περίπτωση α10: $J = \{1,2,3,4\}$. Τότε $g_j(x) = 0$, $j = 1,2,3,4$, που προφανώς είναι αδύνατο, με βάση τις Περιπτώσεις α6-α9.

15.12

Άρα όλα τα σημεία του S' που είναι ενεργά σημεία των ανισοτικών περιορισμών είναι ομαλά.

β) Έστω $x \in S'$ σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο S'. Εξετάζουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περ. β1 $J(x)=\emptyset$, δηλ. $g_j(x)<0$ για $j=1,2,3,4$.

Τότε $\nabla f(x)=0 \Leftrightarrow (2x_1-4x_2-6,\ -8x_2-4x_1-3)^T=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-2x_2=3 \\ 4x_1+8x_2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow x_1=\frac{18}{16},\ x_2=-\frac{15}{16}<0 \Leftrightarrow x=\left(\frac{9}{8},-\frac{15}{16}\right)$.

Επειδή $x_2<0$, έχουμε $x \notin S'$.

Περ. β2 $J(x)=\{1\}$, δηλ. $x_1+x_2=3$, $g_j(x)<0$ $j=2,3,4$.

Υπάρχει $\mu_1 \geq 0$ τ.ω. $\nabla f(x)+\mu_1\nabla g_1(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1-4x_2-6+\mu_1=0 \\ -4x_1-8x_2-3+\mu_1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1-4x_2=6-\mu_1 \\ 4x_1+8x_2=\mu_1-3 \end{cases} \overset{x_1=3-x_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 6-2x_2-4x_2=6-\mu_1 \\ 12-4x_2+8x_2=\mu_1-3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2=\frac{\mu_1}{6} \\ x_2=\frac{1}{4}(\mu_1-15) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=\frac{\mu_1}{6} \\ 4\mu_1=6\mu_1-90 \end{cases} \Leftrightarrow \mu_1=45,\ x_2=\frac{45}{6}$. Επομένως: $x_1=\frac{18-45}{6}=-\frac{27}{6}<0$.

Άρα: $x=(-27/6,\ 45/6) \notin S'$.

Περ. β3 $J(x)=\{2\}$, δηλ. $4x_1+x_2=9$, $g_j(x)<0$ για $j=1,3,4$.

Υπάρχει: $\mu_2 \geq 0$ τ.ω. $\nabla f(x)+\mu_2\nabla g_2(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1-4x_2-6+4\mu_2=0 \\ -4x_1-8x_2-3+\mu_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1-4x_2=6-4\mu_2 \\ 4x_1+8x_2=\mu_2-3 \end{cases} \overset{x_2=9-4x_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x_1-36+16x_1=6-4\mu_2 \\ 4x_1+72-32x_1=\mu_2-3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 18x_1=42-4\mu_2 \\ 28x_1=75-\mu_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (75-\mu_2)18=28(42-4\mu_2) \\ x_1=\frac{1}{9}(21-2\mu_2) \end{cases} \Leftrightarrow \mu_2=-\frac{87}{47},\ x_1=\frac{129}{47}$. Το x δεν μπορεί να είναι ενεργό σημείο μόνο του περιορισμού g_2.

Περ. β4: $J(x)=\{3\}$, δηλ. $x_1=0$, $g_j(x)<0$ $j=1,2,4$. Υπάρχει $\mu_3 \geq 0$ τ.ω. $\nabla f(x)+\mu_3\nabla g_3(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1-4x_2-6-\mu_3=0 \\ -4x_1-8x_2-3=0 \end{cases} \overset{x_1=0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 4x_2=-6-\mu_3 \\ 8x_2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=-\frac{1}{4}(6+\mu_3) \\ x_2=-\frac{3}{8}<0 \end{cases}$

Επειδή $g_4(x)=-x_2=3/8>0$, συμπεραίνουμε ότι $x \notin S'$.

Περ. β5 $J(x)=\{4\}$ Τότε: $x_2=0$. Επιπλέον υπάρχει $\mu_4 \geq 0$ τ.ω $\nabla f(x)+\mu_4\nabla g_4(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1-4x_2-6=0 \\ -4x_1-8x_2-3-\mu_4=0 \end{cases}$.

Επειδή $x_2=0$, έπεται: $x_1=3$. Έτσι: $x=(3,0)^T$. Όμως: $g_2(3,0)=12-9=+3>0$. Άρα $x \notin S'$.

Περ. 66. $J(x)=\{1,2\}$

Τότε $\begin{cases} g_1(x)=0 \\ g_2(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=3 \\ 4x_1+x_2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=3-x_1 \\ 3x_1=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=1 \\ x_1=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\in S$, καθώς $x_1,x_2>0$

Επιπλέον υπάρχουν $\mu_1,\mu_2\geq 0$ τ.ω. $\nabla f(x)+\mu_1\nabla g_1(x)+\mu_2\nabla g_2(x)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1-4x_2-6+\mu_1+4\mu_2=0 \\ -4x_1-8x_2-3+\mu_1+\mu_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-4-6+\mu_1+4\mu_2=0 \\ -8-8-3+\mu_1+\mu_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1+4\mu_2=6 \\ \mu_1+\mu_2=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_2=-13/4<0. \\ \mu_1+\mu_2=19 \end{cases}$

Άρα το x δεν μπορεί να είναι ενεργό σημείο των περιορισμών g_1,g_2.

Περ. 67. $J(x)=\{1,3\}$

Τότε $\begin{cases} g_1(x)=0 \\ g_3(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=3 \\ x_1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=(0,3)^T\in S$, καθώς $g_2(0,3)=-6<0$ και $x_2>0$.

Επιπλέον υπάρχουν $\mu_1,\mu_3\geq 0$ τ.ω. $\nabla f(x)+\mu_1\nabla g_1(x)+\mu_3\nabla g_3(x)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1-4x_2-6+\mu_1-\mu_3=0 \\ -4x_1-8x_2-3+\mu_1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_3=27-6-12 \\ \mu_1=3+24=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_3=9 \\ \mu_1=27 \end{cases}$

Έτσι: $x=(0,3)^T$ και $\mu_1=27,\mu_3=9$.

Περ. 68 $J(x)=\{1,4\}$

Τότε $\begin{cases} g_1(x)=0 \\ g_4(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=(3,0)\notin S$ καθώς $g_2(3,0)=12-9=3>0$.

Περ. 69 $J(x)=\{2,3\}$

Τότε $\begin{cases} g_2(x)=0 \\ g_3(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1+x_2=9 \\ x_1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=9 \\ x_1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=(0,9)\notin S$ καθώς $g_1(0,9)=9-3=6>0$.

Περ. 610 $J(x)=\{2,4\}$

Τότε $\begin{cases} g_2(x)=0 \\ g_4(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1+x_2=9 \\ x_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=9/4 \\ x_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=(9/4,0)\in S$ καθώς $g_1(9/4,0)=9/4-\frac{12}{4}=-3/4<0$ και $g_3(9/4,0)=-9/4<0$.

Επιπλέον υπάρχουν $\mu_2,\mu_4\geq 0$ τ.ω. $\nabla f(x)+\mu_2\nabla g_2(x)+\mu_4\nabla g_4(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1-4x_2-6+4\mu_2=0 \\ -4x_1-8x_2-3+\mu_2-\mu_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\mu_2-6+\frac{9}{2}=0 \\ \mu_4=\mu_2-3-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\mu_2=\frac{3}{2} \\ \mu_4=\mu_2-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_2=\frac{3}{8} \\ \mu_4=-\frac{93}{8}<0. \end{cases}$

Επομένως το x δεν μπορεί να είναι ενεργό σημείο των περιορισμών g_2,g_4.

Περ. β11 $J(x)=\{3,4\}$

Τότε: $\begin{matrix} g_3(x)=0 \\ g_4(x)=0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1=0 \\ x_2=0 \end{matrix} \Leftrightarrow x=0 \in S$ καθώς: $g_1(0,0)=-3<0$, $g_2(0,0)=-9<0$.

Υπάρχουν: $\mu_3,\mu_4 \geq 0$ τ.ω. $\nabla f(x)+\mu_3\nabla g_3(x)+\mu_4\nabla g_4(0)=0 \Leftrightarrow \begin{matrix} -6-\mu_3=0 \\ -3-\mu_4=0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \mu_3=-6<0 \\ \mu_4=-3<0 \end{matrix}$

Επομένως το $x=(0,0)^T$ δεν μπορεί να είναι ενεργό σημείο των περιορισμών g_3, g_4.

Περ. β12 $J(x)=\{1,2,3\}$ ή $\{1,2,4\}$ ή $\{1,3,4\}$ ή $\{2,3,4\}$ ή $\{1,2,3,4\}$

Είδαμε (βλ. Περ. α6–α10) ότι δεν υπάρχουν $x \in S$ με πάνω από 2 ενεργούς περιορισμούς.

Καταλήξαμε στο σημείο:

$$x=(0,3)^T,\ \mu_1=27,\ \mu_3=9,\ \mu_2=\mu_4=0,\quad J(x)=\{1,3\}$$

Επειδή η f έχει σημείο ολικού ελαχίστου στο S, το οποίο ικανοποιεί τις αναγκαίες συνθήκες 1ης τάξης καθώς όλα τα σημεία του S τα οποία είναι ενεργά σημεία των περιορισμών είναι ομαλά. Όμως βρήκαμε ένα μόνο σημείο του S το οποίο ικανοποιεί τις αναγκαίες συνθήκες 1ης τάξης, το $x=\binom{0}{3}$. Άρα είναι το μοναδικό σημείο ολικού ελαχίστου της f στο S. Επιπλέον,

$f(0,3)=-45$ ∎