ΜΕΜ-293 Θεωρία Βελτιστοποίησης

ΜΑΘΗΜΑ 16 (σύγχρονο)

Λύσεις των Ασκήσεων του Φυλλαδίου 7

Λύση Άσκησης 7.1

Για την μετατροπή του προβλήματος σε κανονική μορφή εισάγουμε επιπλέον μη αρνητικές μεταβλητές x_3, x_4 γράφοντας τους ανισοτικούς περιορισμούς ως ισοτικούς ως εξής: $\begin{matrix} x_1+x_2+x_3=4 \\ 2x_1-x_2-x_4=2. \end{matrix}$ Έτσι το πρόβλημα παίρνει την τελική μορφή

$\min\limits_{x\in S} f(x)$ όπου: $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ με $f(x)=(c,x)$ $\forall x\in\mathbb{R}^4$ και $c=(-1,1,0,0)^T \in \mathbb{R}^4$, $S:=\{x\in\mathbb{R}^4 : Ax=b,\ x\geq 0\}$ με

$$b=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}>0 \text{ και } A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & -1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 4}$$

Έτσι: $m=2, n=4$ και $\operatorname{rank}(A)=2=m$.

Επιπλέον επειδή δεν είναι προφανής μία βασική εφικτή λύση εφαρμόζουμε τη M-μέθοδο προσθέτοντας μια ακόμα αρνητική μεταβλητή x_5. Το νέο πρόβλημα παίρνει τη μορφή:

$\min\limits_{x\in\tilde{S}} f_M(x)$ με: $f_M(x)=(\tilde{C},x)$ $\forall x\in\mathbb{R}^5$ και $C=(-1,1,0,0,M)^T\in\mathbb{R}^5$, $\tilde{S}:=\{x\in\mathbb{R}^5 : \tilde{A}x=b,\ x\geq 0\}$ με

$$b=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}>0 \text{ και } \tilde{A}:=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 5}$$

Έτσι: $m=2, n=5$, $\operatorname{rank}(\tilde{A})=2=m$.

Σημειώνουμε ότι η παράμετρος M είναι θετική με όσο χρειάζεται μεγάλη τιμή.

tableau1

		c	-1	1	0	
B	C_B	x_B	α_1	α_2	α_4	θ
α_3	0	4	1	1	0	4
α_5	$-M$	2	2	-1	-1	1
		$2M$	$2M$	$-M$	$-M$	z^k
			$2M+1$	$-M-1$	$-M$	z^k-c_k

tableau2

		c	$-M$	1	0	
B	C_B	x_B	α_5	α_2	α_4	θ
α_3	0	3	$-1/2$	$3/2$	$1/2$	6
α_1	-1	1	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	—
		-1	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	z^k
			$-\frac{1}{2}-M$	$-1/2$	$+1/2$	z^k-c_k

tableau 1:

Η αρχική βασική εφικτή λύση είναι $x_B=(0,0,4,0,2)^T$.

Έχουμε: $z^1-c_1=2M+1>0$. Επομένως $k_0=1$ (in). Επίσης: $j_0=5$ (out) και $\theta^0=1$.

Έτσι ο οδηγός είναι $y^1_5=2$.

tableau 2:

$$x_B=\underbrace{x_B}_{\text{tableau1}}-\theta^0 y^1+\theta^0 e_1^{\mathbb{R}^5}=4e_3^{\mathbb{R}^5}+2e_5^{\mathbb{R}^5}-\left[e_1^{\mathbb{R}^5}+2e_5^{\mathbb{R}^5}\right]+e_1^{\mathbb{R}^5}=e_1^{\mathbb{R}^5}+3e_3^{\mathbb{R}^5}=(1,0,3,0,0)^T$$

$$y^1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\qquad y^5=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0-\frac{1}{2}\cdot 1\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}\qquad y^4=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0+\frac{1}{2}\cdot 1\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

οδηγός $y^1_5=2$

$$y^2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1+\frac{1}{2}\cdot 1\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Έχουμε $z^4-c_4=\frac{1}{2}$. Άρα $k_0=4$ (in). Επίσης $\theta^0=6$ και $j_0=3$ (out). Οδηγός είναι

$$y^{k_0}_{j_0}=y^4_3=\frac{1}{2}.$$

7.2

tableau 3

		c	M	1	0	
B	c_B	x_B	α_5	α_2	α_3	θ
α_4	0	6	-1	3	2	
α_1	-1	4	0	1	1	
		-4	0	-1	-1	z^*
			-M	-2	-1	z^*-c_j

tableau 3

$$x_B = 3\cdot e_3^{R\Gamma} + e_1^{R\Gamma} - 6\left(\tfrac{1}{2} e_3^{R\Gamma} - \tfrac{1}{2} e_1^{R\Gamma}\right) + 6\cdot e_4^{R\Gamma}$$
$$= e_1^{R\Gamma} + 3e_1^{R\Gamma} + 6e_4^{R\Gamma} = 4e_1^{R\Gamma} + 6e_4^{R\Gamma} = (4,0,0,6,0)^T$$

$$y^4 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

δηλαδή $y^4_{\alpha 5} = 1/2$

$$y^5 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 - (-1)(-1/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 - 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y^2 = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ -1/2 - 3\cdot(-1/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1/2 + 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 0 - 2(-1/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Έτσι η βέλτιστη λύση είναι $x_B = (4,0,0,6,0)$ με βέλτιστη τιμή $\underset{x}{f}(x_5) = f(4,0,0,6) = -4 < 0$ (Η x_B δεν έχει μη μηδενική M-συντεταγμένη δηλ. $(x_B)_5 = 0$ γιατί είναι λύση του αρχικού προβλήματος)

7.3

Λύση Άσκησης 7.2

Εδώ έχουμε: $f(x)=(c,x)\ \forall x\in\mathbb{R}^4$ με $c=(2,0,-3,0)^T\in\mathbb{R}^4$. Επίσης $b=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}>0$ και

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times4}\quad \text{με } \operatorname{rank}(A)=3$$

Εφαρμόζουμε τη M μέθοδο προσθέτοντας 3 μεταβλητές $x_5,x_6,x_7\geq 0$ ως εξής:

$$f_M(x)=(c_M,x)\ \forall x\in\mathbb{R}^7 \quad \text{με } c=(2,0,-3,0,M,M,M)^T.$$

$$b=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}>0,\quad \tilde{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&0&0\\1&-1&1&-1&0&1&0\\1&1&-1&-1&0&0&1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times7}.$$

tableau 1

		c	2	0	-3	0	
B	C_B	x_B	α_1	α_2	α_3	α_4	θ
α_5	M	2	1	1	1	1	2
α_6	M	1	1	-1	1	-1	1
α_7	M	1	1	1	-1	1	1
		4M	3M	M	M	M	z^k
			3M-2	M	M+3	M	z^k-c_k

tableau 2

		c	M	0	-3	0	
B	C_B	x_B	α_7	α_2	α_3	α_4	θ
α_5	M	1	-1	0	2	0	1/2
α_6	M	0	-1	-2	2	-2	0
α_1	2	1	1	1	-1	1	—
		M+2	-2M+2	-2M+2	4M-2	-2M+2	z^k
			-3M+2	-2M+2	4M+1	-2M+2	z^k-c_k

tableau 1

Η αρχική βασική εφικτή λύση είναι $x_B=(0,0,0,0,2,1,1)^T=2e_5^{\mathbb{R}^7}+1e_6^{\mathbb{R}^7}+1e_7^{\mathbb{R}^7}$

Έστω $M\geq 3$. Τότε $z^k-c^k>0$ για $k=1,2,3,4$. Η πιο μεγάλη τιμή είναι $3M-2$.

Άρα $k_0=1$ (in). Τότε $\theta^0=1$ και $j_0\in\{6,7\}$. Διαλέγουμε $j_0=7$ (out).

Έτσι οδηγός είναι $y_7^1=1$.

tableau 2.

$$x_B=2e_5^{\mathbb{R}^7}+1e_6^{\mathbb{R}^7}+1e_7^{\mathbb{R}^7}-(e_5^{\mathbb{R}^7}+e_6^{\mathbb{R}^7}+e_7^{\mathbb{R}^7})+e_1^{\mathbb{R}^7}$$
$$=e_5^{\mathbb{R}^7}+e_1^{\mathbb{R}^7}=(1,0,0,0,1,0,0)^T.$$

Η x_B είναι εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση.

$$y^1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\qquad y^2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1-1\cdot1\\-1-1\cdot1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}\qquad y^3=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1-(-1)\cdot1\\1-(-1)\cdot1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}$$

$\underbrace{y_7^1=1}_{\text{οδηγός}}$

$$y^4=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1-1\cdot1\\-1-1\cdot1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}\qquad y^7=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}0-1\cdot1\\0-1\cdot1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

Έχουμε $z^3-c_3=4M+1>0$. Άρα $k_0=3$ (in). Τότε: $\theta^0=0$ με $j_0=6$ (out). Ο οδηγός είναι $y_6^3=2$

tableau3

		C	M	0	M	0	
B	C_B	x_B	α_7	α_2	α_6	α_4	θ
α_5	M	1	0	2	-1	2	$1/2$
α_3	-3	0	$-1/2$	-1	$1/2$	-1	—
α_1	2	1	$1/2$	0	$1/2$	0	—
		$M+2$	$5/2$	$2M+3$	$-M-1/2$	$2M+3$	z^k
			$5/2-M$	$2M+3$	$-2M-1/2$	$2M+3$	z^k-c_k

tableau4.

		C	M	M	M	0	
B	C_B	x_B	α_7	α_5	α_6	α_4	θ
α_2	0	$1/2$	0	$1/2$	$-1/2$	1	
α_3	-3	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	0	0	
α_1	2	1	$1/2$	0	$1/2$	0	
		$+1/2$	$5/2$	$-3/2$	1	0	z^k
			$5/2-M$	$-3/2-M$	$1-M$	0	z^k-c_k
			≤ 0	≤ 0	≤ 0	≤ 0	

tableau3

Επειδή $\theta^0=0$ η x_B παραμένει η ίδια. Συνεχίζουμε την διαδικασία:

$$y^3=\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix} \quad \ast\ y^7=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}-1+\frac{1}{2}\cdot 2\\-\frac{1}{2}\\1+\frac{1}{2}(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$y^3_6=2 \quad \ast\ y^2=\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}0+1\cdot 2\\-1\\1+1(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix} \quad y^4=\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}0+1\cdot 2\\-1\\1+1\cdot(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$\ast\ y^6=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}0-\frac{1}{2}\cdot 2\\\frac{1}{2}\\0-\frac{1}{2}(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Έχουμε $z^2-c_2=z^4-c_4=2M+3$. Διαλέγουμε $k_0=2$ (in). Επιπλέον $\theta^0=\frac{1}{2}$ και $j_0=5$. Ο επόμενος οδηγός θα είναι $y^2_5=2$.

tableau 4.

$$x_B=e_5^{R^7}+e_1^{R^7}-\frac{1}{2}\left(2e_5^{R^7}-e_3^{R^7}\right)+\frac{1}{2}e_2^{R^7}=e_1^{R^7}+\frac{1}{2}e_3^{R^7}+\frac{1}{2}e_2^{R^7}=\left(1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0,0,0,0\right)^T$$

$$y^2=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix} \quad y^7=\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix},\quad y^5=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0-\frac{1}{2}(-1)\\0-\frac{1}{2}\cdot 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}$$

$$y^2_5=2 \quad y^6=\begin{bmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)\\\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$y^4=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1\\-1-1(-1)\\0-1\cdot 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

Έτσι καταλήξαμε στη βέλτιστη βασική εφικτή λύση: $x_B=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,0,0)^T$ η οποία έχει μηδενικές τις M-μεταβλητές. Έτσι η $\tilde{x}_B=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)^T$ είναι μία βέλτιστη βασική λύση του αρχικού προβλήματος.

Σημ. Στο tableau 2 εμφανίστηκε μία βασική εφικτή λύση η οποία είναι εκφυλισμένη. Δεν σταματήσαμε τον αλγόριθμο. Έτσι στο tableau 3 πήραμε την ίδια βασική εφικτή λύση όμως άλλαξαν οι βασικές στήλες και στο tableau 4 καταλήξαμε σε μία βέλτιστη βασική εφικτή λύση μη εκφυλισμένη.

<u>Σημ.</u> Ας θεωρούμε $\varepsilon>0$ (αρκετά μικρό) στη θέση x_6^B στο tableau 2. Συνεχίζοντας την εφαρμογή του Simplex έχουμε τα ακόλουθα:

tableau 2'

		c	M	0	-3	0	
B	C_B	x_B	a_7	a_2	a_3	a_4	θ
a_5	M	1	-1	0	2	0	$\frac{1}{2}$
a_6	M	ε	-1	-2	2	-2	$\frac{\varepsilon}{2}$
a_1	2	1	1	1	-1	1	—
		$M(1+\varepsilon)+2$	$-2M+2$	$-2M+2$	$4M+2$	$-2M+2$	z^k
			$-3M+2$	$-2M+2$	$4M+1$	$-2M+2$	z^k-c^k

tableau 3'

		c	M	0	M	0	
B	C_B	x_B	a_7	a_2	a_6	a_4	θ
a_5	M	$1-\varepsilon$	0	2	-1	2	$\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}$
a_3	-3	$\varepsilon/2$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	-1	—
a_1	2	$1+\varepsilon/2$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	—
		$M(1+\varepsilon/2)-\frac{3}{2}\varepsilon$	$5/2$	$2M+3$	$-M-\frac{1}{2}$	$2M+3$	z^k
			$\frac{5}{2}-M$	$2M+3$	$-2M-\frac{1}{2}$	$2M+3$	z^k-c^k

tableau 4'

		c	M	M	M	0	
B	C_B	x_B	a_7	a_5	a_6	a_4	θ
a_2	0	$\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	
a_3	-3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	
a_1	2	$1+\varepsilon/2$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	
		$\frac{1}{2}+\varepsilon$	$5/2$	$-3/2$	1	0	z^k
			$\frac{5}{2}-M$	$-\frac{3}{2}-M$	$1-M$	0	z^k-c_k

<u>tableau 2'</u>

$x_B=(1,0,0,0,1,\varepsilon,0,0)^T$

όπως στο tableau 2 έχουμε $y^2=\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}$, $y^7=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$, $y^3=\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}$, $y^4=\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}$,

$z^3-c_3=4M+1>0$, $k_0=3$ (in). Όμως $\theta^0=\varepsilon/2$ για $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ (δηλ. μικρό θετικό ε), $j_0=6$ (out),

και ο οδηγός είναι $y^3_6=2$.

<u>tableau 3'</u>

$$
\begin{aligned}
x_B &= e_1^{\mathbb{R}^7}+e_5^{\mathbb{R}^7}+\varepsilon e_6^{\mathbb{R}^7}-\frac{\varepsilon}{2}\left(2e_5^{\mathbb{R}^7}+2e_6^{\mathbb{R}^7}-e_1^{\mathbb{R}^7}\right)+\frac{\varepsilon}{2}e_3^{\mathbb{R}^7}\\
&= e_1^{\mathbb{R}^7}+e_5^{\mathbb{R}^7}+\cancel{\varepsilon e_6^{\mathbb{R}^7}}-\varepsilon e_5^{\mathbb{R}^7}-\cancel{\varepsilon e_6^{\mathbb{R}^7}}+\frac{\varepsilon}{2}e_1^{\mathbb{R}^7}+\frac{\varepsilon}{2}e_3^{\mathbb{R}^7}\\
&= e_1^{\mathbb{R}^7}+(1-\varepsilon)e_5^{\mathbb{R}^7}+\frac{\varepsilon}{2}e_1^{\mathbb{R}^7}+\frac{\varepsilon}{2}e_3^{\mathbb{R}^7}\\
&= \underbrace{\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}_{>0}e_1^{\mathbb{R}^7}+\underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{>0}e_3^{\mathbb{R}^7}+\underbrace{(1-\varepsilon)}_{>0}e_5^{\mathbb{R}^7}.
\end{aligned}
$$

όπως στο tableau 3 έχουμε $y^7=\begin{pmatrix}0\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}$, $y^2=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $y^6=\begin{pmatrix}-1\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$, $y^4=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$

και $z^2-c_2=c^4-c_4=2M+3$. Διαλέγουμε $k_0=2$ (in) (επιλέγον) $\theta^0=\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}$

και $j_0=5$ (out). Ο επόμενος οδηγός είναι $y^2_5=2$

<u>tableau 4'</u>

$$
\begin{aligned}
x_B &= (1-\varepsilon)e_5^{\mathbb{R}^7}+\frac{\varepsilon}{2}e_3^{\mathbb{R}^7}+\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)e_1^{\mathbb{R}^7}-\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\left[2e_5^{\mathbb{R}^7}-e_3^{\mathbb{R}^7}\right]+\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)e_2^{\mathbb{R}^7}\\
&= (1-\varepsilon-1+\varepsilon)e_5^{\mathbb{R}^7}+\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)e_3^{\mathbb{R}^7}+\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)e_1^{\mathbb{R}^7}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)e_2^{\mathbb{R}^7}\\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)e_2^{\mathbb{R}^7}+\frac{1}{2}e_3^{\mathbb{R}^7}+\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)e_1^{\mathbb{R}^7}
\end{aligned}
$$

η οποία λύνει το $\min\limits_{x\in S_\varepsilon:=\{x\in\mathbb{R}^7:\ x\geq 0,\ Ax=(2,1+\varepsilon,1)^T\}} f_M(x)$

Έτσι το $\tilde{x}_B=\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)e_2^{\mathbb{R}^4}+\frac{1}{2}e_3^{\mathbb{R}^4}+\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)e_1^{\mathbb{R}^4}$ λύνει το $\min\limits_{x\in S_\varepsilon':=\{x\in\mathbb{R}^4:\ x\geq 0,\ Ax=(2,1+\varepsilon,1)^T\}} f(x)=\frac{1}{2}+\varepsilon$. Για $\varepsilon=0$ παίρνουμε τη λύση που βρήκαμε.