Διάλεξη 2 (εξ αποστάσεως)

Δευτέρα 6 Απριλίου 2020, 5μμ-7μμ (zoom meeting).

Version 2 (15/4/2020).

Γ. Ζωράρης

B.20

Οι ασκήσεις που ακολουθούν είναι εκείνες του ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 1,

όπου, για δοθείσες συναρτήσεις μίας ή περισσοτέρων μεταβλητών, το ζητούμενο

είναι να βρεθούν τα σημεία τοπικού μεγίστου και τα σημεία τοπικού ελαχίστου, εφόσον υπάρχουν.

Επιπλέον, να διερευνηθεί αν τα σημεία τοπικού ελαχίστου ή τοπικού μεγίστου είναι,

σημεία ολικού ελαχίστου ή ολικού μεγίστου, αντίστοιχα.

Άσκηση 1.1

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

α) $f(x) = x^2 + 2x$, β) $f(x) = x^2 e^{-x^2}$, γ) $f(x) = x + \sin(x)$

Λύση: Επειδή σε όλες τις περιπτώσεις $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ κάθε τοπικό ακρότατο x^* της f έχει την ιδιότητα: $f'(x^*)=0$, επειδή το $\mathbb{R}$ έχει μόνο εσωτερικά σημεία.

Επιπλέον, επειδή σε όλες τις περιπτώσεις $f \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ το πρόσημο της $f''(x^*)$ μπορεί να μας εξασφαλίσει αν το x^* είναι τοπικό ελάχιστο ($f''(x^*)>0$) ή τοπικό μέγιστο ($f''(x^*)<0$). Όταν $f''(x^*)=0$ χρειάζεται επιπλέον διερεύνηση.

α) $f'(x) = 2x+2$, $f''(x) = 2$

$f'(x^*)=0 \Leftrightarrow 2x^*+2=0 \Leftrightarrow x^*=-1$, $f''(x^*) = f''(-1) = 2 > 0$.

Επομένως η f έχει ένα μόνο τοπικό ακρότατο το $x^*=-1$, το οποίο είναι σημείο απόλυτου τοπικού ελαχίστου. Η f δεν έχει σημεία τοπικού μεγίστου και επομένως δεν υπάρχουν σημεία ολικού μεγίστου. Μένει να εξετάσουμε αν το $x^*=-1$ είναι επιπλέον σημείο ολικού ελαχίστου στο $\mathbb{R}$. Θα δούμε στη συνέχεια ότι αυτό ισχύει με τρεις διαφορετικούς τρόπους.

1ος: $f(x^*) = f(-1) = 1-2 = -1$, $f(x) = x^2+2x+1-1 = (x+1)^2-1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Επομένως: $f(x) > -1 = f(x^*) \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Άρα το $x^*=-1$ είναι σημείο απόλυτου ολικού ελαχίστου.

2ος $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x+2>0 \Leftrightarrow x>-1$, $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<-1$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$.

Έτσι: $f(x) > f(-1) \quad \forall x \in (-\infty,-1)$ και $f(x) > f(-1) \quad \forall x \in (-1,+\infty)$. Άρα $f(x) > f(-1) \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

3ος Επειδή $f''(x)>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και το $\mathbb{R}$ είναι κυρτό σύνολο το οποίο έχει εσωτερικά σημεία, έπεται ότι η f είναι κυρτή. Επομένως κάθε σημείο τοπικού ελαχίστου είναι σημείο ολικού ελαχίστου. Έτσι το $x^*=-1$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου και μάλιστα σημείο απόλυτου ολικού ελαχίστου. Καθώς δεν υπάρχει άλλο σημείο τοπικού ελαχίστου.

β) $f'(x) = 2x e^{-x^2} + x^2 e^{-x^2}(-2x) = 2x e^{-x^2} - 2x^3 e^{-x^2}$

$= 2x e^{-x^2}(1-x^2) = 2x(1-x)(1+x)e^{-x^2}$

$f''(x) = 2e^{-x^2}(1-x^2) + 2x(-2x)e^{-x^2}(1-x^2) + 2x e^{-x^2}(-2x)$

$= 2e^{-x^2}(1-x^2) + 2e^{-x^2}(-2x^2)(1-x^2) + 2e^{-x^2}(-2x^2)$

$= 2e^{-x^2}(1-x^2)(1-2x^2) + 2e^{-x^2}(-2x^2)$

$= 2e^{-x^2}\left[(1-x^2)(1-2x^2) - 2x^2\right]$

$= 2e^{-x^2}\left[1-2x^2-x^2+2x^4-2x^2\right]$

$= 2e^{-x^2}\left[1+2x^4-5x^2\right]$

Επομένως $f'(x^*)=0 \Leftrightarrow x^* \in \{0,1,-1\}$.

Επιπλέον: $f''(0) = 2\cdot 1(1+0-0) = 2>0$,

$f''(1) = 2e^{-1}(1+2-5) = \frac{2}{e}(3-5) = -4/e<0$,

$f''(-1) = 2e^{-1}(1+2-5) = \frac{2}{e}(3-5) = -4/e<0$.

Επομένως το $x^*=0$ είναι σημείο απόλυτου τοπικού ελαχίστου και τα $x^*=\pm1$ είναι σημεία απόλυτου τοπικού μεγίστου. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $x\neq 0$, έχουμε: $f(x)=x^2e^{-x^2}>0=f(0)$. Άρα το $x^*=0$ είναι σημείο απόλυτου ολικού ελαχίστου. (Σημειώνουμε ότι η f δεν είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ διότι: $f''(1) = -4/e<0$).

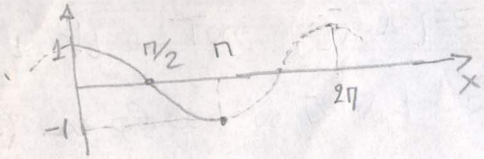
Από τον τύπο της f' συμπεραίνουμε ότι:

	-1		0		1	
$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$. Άρα: $f(-1)\geq f(x)$ $\forall x\in(-\infty,0]$. Επίσης, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$. Άρα: $f(1)\geq f(x)$ $\forall x\geq 0$. Επειδή $f(\pm1)=\frac{1}{e}$, έπεται ότι $f(\pm1)\geq f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Άρα τα $x^*=\pm1$ είναι σημεία ολικού μεγίστου.

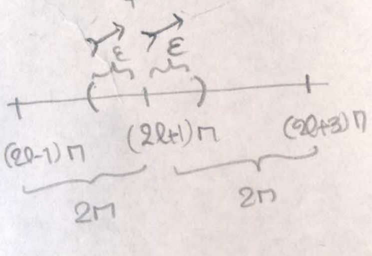
γ) $f'(x) = 1+\cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$

$f'(x^*)=0 \Leftrightarrow \cos(x^*)=-1 \Leftrightarrow x^* = (2\ell+1)\pi$ $\forall \ell\in\mathbb{Z}$.



$f''(x^*) = -\sin((2\ell+1)\pi) = -\sin(2\ell\pi+\pi) = -\sin(\pi) = 0$

Άρα οι συνθήκες 2ης τάξης δεν οδηγούν σε συμπέρασμα. Σ' αυτή την περίπτωση "δουλεύουμε" πάνω στη συνάρτηση. Έστω $x^* = (2\ell+1)\pi$ για κάποιο $\ell\in\mathbb{Z}$ και $0<\varepsilon\leq\pi/2$. Τότε: $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[x^*-\varepsilon, x^*)\cup(x^*, x^*+\varepsilon]$. Άρα υπάρχει $x_A^\varepsilon\in(x^*, x^*+\varepsilon]$ με $f(x_A^\varepsilon)>f(x^*)$ και $x_B^\varepsilon\in[x^*-\varepsilon, x^*)$ με $f(x^*)>f(x_B^\varepsilon)$. Άρα το x^* δεν μπορεί να είναι τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο.



<u>Σημ.</u> Επειδή $f'(x)\geq 0$ στο $[x^*, x^*+\varepsilon]$ η f είναι αύξουσα στο $[x^*, x^*+\varepsilon]$.

Επιπλέον για κάθε $x\in(x^*, x^*+\varepsilon]$ ισχυεί ότι: $f(x)>f(x^*)$, διότι αν υπάρχει $x\in(x^*, x^*+\varepsilon]$ τ.ω.

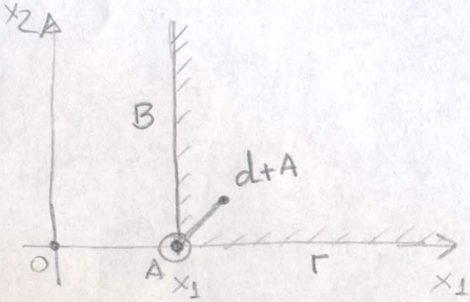
$f(x)=f(x^*)$, τότε υπάρχει $\xi\in(x^*, x)$ τ.ω $f'(\xi)=0$

(με βάση το Θ. Rolle), κάτι που δεν μπορεί να συμβεί, επειδή $f'(z)>0$ $\forall z\in(x^*, x^*+\varepsilon]$. Το ίδιο επιχείρημα

εξασφαλίζει ότι: $f(x)<f(x^*)$ $\forall x\in[x^*-\varepsilon, x^*)$. ∎

<u>Άσκηση 1.2</u>

Έστω: $D=\{x\in\mathbb{R}^2 : x_1\geq 1, x_2\geq 0\}$ και $f: D\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x_1^2+x_2^2$ $\forall x\in D$.



<u>Λύση</u>

Επειδή $f\in C^1(D,\mathbb{R})$ μπορούμε να ελέγξουμε τις αναγκαίες συνθήκες $1^{ης}$ τάξης.

$\nabla f(x)=(\partial_{x_1}g(x), \partial_{x_2}g(x))=(2x_1, 2x_2)=2x$. Όταν x είναι

εσωτερικό σημείο D έχουμε $x_1>1$ και $x_2>0$, δηλ. $x\neq 0$, και επομένως $\nabla f(x)\neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι κανένα εσωτερικό σημείο του

D δεν μπορεί να είναι τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο της f.

Το επόμενο βήμα είναι να αναζητήσουμε στο σύνορο ∂D του D

υποψήφια ακρότατα. Παρατηρούμε ότι:

$$\partial D=\underbrace{\{(1,0)\}}_{A}\cup\underbrace{\{(1,x_2): x_2>0\}}_{B}\cup\underbrace{\{(x_1,0): x_1>1\}}_{\Gamma}$$

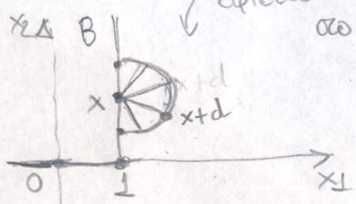
<u>Π1</u> $x=(1,0)$

Τότε $\nabla f(1,0)=(2,0)$. Έστω $d\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ μια εφικτή διεύθυνση του x στο D.

Τότε $d=(d_1,d_2)$ με: $d_1\geq 0, d_2\geq 0$. Έτσι: $(\nabla f(1,0), d)=2d_1\geq 0$.

Άρα το $x=(1,0)$ είναι υποψήφιο τοπικό ελάχιστο.

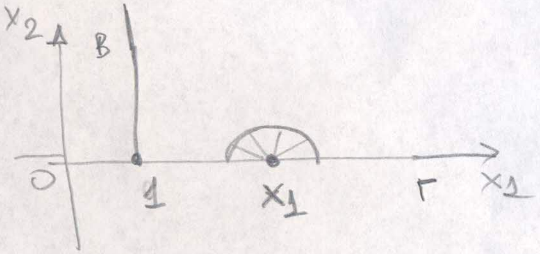
<u>Π2</u> $x \in B \Leftrightarrow x_1 = 1$ & $x_2 > 0$.



Τότε: $\nabla f(x) = 2(1, x_2) = (2, 2x_2)$. Έστω $d \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ μια εφικτή διεύθυνση του x στο D, τότε: $d_1 \geq 0$ και $d_2 \in \mathbb{R}$. Έτσι:

$(\nabla f(x), d) = 2d_1 + 2x_2 d_2 = 2(d_1 + x_2 d_2)$. Όταν $d_1, d_2 > 0$ τότε $(\nabla f(x), d) > 0$. Όταν $d_1 = \frac{1}{2}x_2^2$ και $d_2 = -x_2$, τότε:

$(\nabla f(x), d) = 2\left(\frac{1}{2}x_2^2 - x_2^2\right) = -x_2^2 < 0$. Άρα το x δεν μπορεί να είναι τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο της f στο D.



<u>Π3</u> $x \in Γ \Leftrightarrow x_1 > 1$ και $x_2 = 0$.

Τότε: $\nabla f(x) = (2x_1, 0)$. Οι εφικτές διευθύνσεις της f στο D είναι $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ με: $d_1 \in \mathbb{R}$ και $d_2 \geq 0$. Έτσι: $(\nabla f(x), d) = 2x_1 d_1$. Όταν $d_1 \geq 0$ τότε: $(\nabla f(x), d) \geq 0$. Όταν: $d = (-x_1, 1)$ τότε: $(\nabla f(x), d) = -2x_1^2 < 0$. Επομένως το x δεν μπορεί να είναι τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο της f στο D.

Η διερεύνηση οδηγεί στο $x^* = (1, 0)$, όπου: $f(x^*) = 1$. Μένει να εξετάσουμε αν είναι πράγματι τοπικό ελάχιστο.

<u>1ος</u> Όταν $x \in D$ και $x \neq (1,0)$, τότε: $x_1 > 1$, $x_2 \geq 0$ και κατά συνέπεια: $f(x) = x_1^2 + x_2^2 > 1 + x_2^2 \geq 1 = f(x^*)$

Έτσι το x^* είναι σημείο απόλυτου ολικού ελαχίστου.

<u>2ος</u> Έστω $x, y \in D$ και $θ \in [0,1]$. Ορίζουμε: $z = θx + (1-θ)y = (θx_1 + (1-θ)y_1, θx_2 + (1-θ)y_2)$. Επειδή: $x_2, y_2 \geq 0$ και $θ, (1-θ) \geq 0$, έπεται ότι: $z_2 = θx_2 + (1-θ)y_2 \geq 0$. Επειδή $x_1, y_1 \geq 1$ έπεται: $z_1 = θx_1 + (1-θ)y_1 \geq θ + (1-θ) = 1$. Έτσι: $z \in D$. Αυτό σημαίνει ότι το D είναι κυρτό.

Επιπλέον $Hf(x) = \begin{bmatrix} \partial^2_{x_1} f(x) & \partial_{x_1 x_2} f(x) \\ \partial_{x_1 x_2} f(x) & \partial^2_{x_2} f(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\forall x \in D$, που σημαίνει ότι η $Hf(x)$ είναι θετικά ορισμένη για κάθε $x \in D$.

Επειδή το D είναι κυρτό σύνολο με εσωτερικά σημεία και η $Hf(x)$ είναι θ.ο. για κάθε $x \in D$, έπεται ότι η f είναι κυρτή.

> Έχουμε δείξει ότι αν έχουμε ένα κυρτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ και μία συνάρτηση $f \in C^1(\Omega;\mathbb{R})$ η οποία είναι κυρτή στο Ω και υπάρχει $x^* \in \Omega$ τ.ω $(\nabla f(x^*), y - x^*) \geq 0 \ \forall y \in \Omega$, τότε το x^* είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f στο Ω

Έστω $x = (x_1, x_2) \in D$. Τότε: $x_1 \geq 1$ και $x_2 \geq 0$. Επιπλέον, $(\nabla f(x^*), x - x^*) = (2(1,0), (x_1 - 1, x_2 - 0))$

$$= 2((1,0), (x_1 - 1, x_2)) = 2[1 \cdot (x_1 - 1) + 0 \cdot x_2] = 2(x_1 - 1) \geq 0.$$

Με βάση τα παραπάνω, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το $x^* = (1,0)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f στο D. Επειδή η f δεν έχει άλλο σημείο τοπικού ελαχίστου, συμπεραίνουμε ότι το x^* είναι σημείο απόλυτου ολικού ελαχίστου της f στο D. ∎

Άσκηση 1.3.

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με: $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 - 12x_2 + 20 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$.

Λύση:

$\partial_{x_1} f(x) = 3x_1^2 - 3$, $\partial_{x_2} f(x) = 3x_2^2 - 12$

$$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1^2 = 1 \\ x_2^2 = 4 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = \pm 1 \\ x_2 = \pm 2 \end{matrix} \Leftrightarrow x \in \{(1,2), (1,-2), (-1,2), (-1,-2)\}$$

$$Hf(x) = \begin{bmatrix} \partial^2_{x_1} f(x) & \partial_{x_1 x_2} f(x) \\ \partial_{x_1 x_2} f(x) & \partial^2_{x_2} f(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & 6x_2 \end{bmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

Π1 $x^* = (1,2)$

$\nabla f(x^*) = 0$, $Hf(x^*) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ ο οποίος είναι θ.ο.

Άρα το x^* είναι σημείο απόλυτου τοπικού ελαχίστου της f

Π2. $x^* = (-1,-2)$

$\nabla f(x^*) = 0$, $Hf(x^*) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ ο οποίος είναι αρνητικά ορισμένος

Άρα το x^* είναι σημείο απόλυτου τοπικού μεγίστου της f.

Π3. $x^* = (-1,2)$

Τότε $\nabla f(x^*) = 0$, $Hf(x^*) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$. Ο $Hf(x^*)$ έχει ιδιοτιμές: $\lambda_1 = -6 < 0$ και $\lambda_2 = 12 > 0$. Άρα δεν είναι θετικά ημιορισμένος και ούτε είναι αρνητικά ημιορισμένος. Συνεπώς το x^* δεν είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή τοπικού ελαχίστου.

Π4. $x^* = (1,-2)$

$\nabla f(x^*) = 0$, $Hf(x^*) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$. Ο $Hf(x^*)$ έχει ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 6 > 0$ και $\lambda_2 = -12 < 0$. Άρα δεν είναι θ. ημιορισμένος και δεν είναι α. ημιορισμένος. Επομένως το x^* δεν μπορεί να είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή σημείο τοπικού ελαχίστου.

Σημ. Τα $(-1,2)$, $(1,-2)$ καλούνται σαγματικά σημεία διότι έχουν εφικτές διευθύνσεις στις οποίες φαίνονται ως τοπικά ελάχιστα και εφικτές διευθύνσεις στις οποίες φαίνονται ως τοπικά μέγιστα.

Επειδή: $\lim\limits_{x_1\to+\infty} f(x_1,0)=\lim\limits_{x_1\to+\infty} x_1^3-3x_1+20$

$$=\lim_{x_1\to+\infty} x_1^3\left(1-\frac{3}{x_1^2}+\frac{20}{x_1^3}\right)=+\infty.$$

και $\lim\limits_{x_1\to-\infty} f(x_1,0)=\lim\limits_{x_1\to-\infty} x_1^3\left(1-\frac{3}{x_1^2}+\frac{20}{x_1^3}\right)=-\infty$

συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι άνω φραγμένη και δεν είναι κάτω φραγμένη.

Επομένως η f δεν έχει σημείο ολικού μεγίστου και δεν έχει σημείο ολικού ελαχίστου.

Άσκηση 1.4

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ με $f(x)=e^{x_1}+e^{x_2}+e^{x_3}+2e^{-(x_1+x_2+x_3)}\quad \forall x\in\mathbb{R}^3$

Λύση: Παρατηρούμε ότι:

$\lim\limits_{x_1\to+\infty} f(x_1,0,0)=\lim\limits_{x_1\to+\infty} e^{x_1}+2+2e^{-x_1}=+\infty$, συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι άνω φραγμένη επομένως δεν έχει σημείο ολικού μεγίστου. Για τα υπόλοιπα ερωτήματα θα ακολουθήσουμε την συνήθη διαδικασία, καθώς $f\in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$.

$\partial_{x_2} f(x)=e^{x_1}-2e^{-(x_1+x_2+x_3)}$, $\partial_{x_2} f(x)=e^{x_2}-2e^{-(x_1+x_2+x_3)}$, $\partial_{x_3} f(x)=e^{x_3}-2e^{-(x_1+x_2+x_3)}$

2.8

$$\nabla f(x) = 0 \iff \begin{cases} e^{x_1} = 2e^{-(x_1+x_2+x_3)} \\ e^{x_2} = 2e^{-(x_1+x_2+x_3)} \\ e^{x_3} = 2e^{-(x_1+x_2+x_3)} \end{cases} \iff \begin{cases} e^{x_1} = e^{x_2} \\ e^{x_2} = e^{x_3} \\ e^{x_2} = e^{-(x_1+x_2+x_3)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_2 = x_3 \\ e^{x_1} = e^{-3x_1} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_2 = x_3 \\ x_1 = -3x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}.$$

Άρα: $\nabla f(x) = 0 \iff x = 0$. Τότε: $f(0) = 3-$

$$\partial^2_{x_1} f(x) = e^{x_1} + 2e^{-(x_1+x_2+x_3)}, \quad \partial_{x_1x_2} f(x) = 2e^{-(x_1+x_2+x_3)}, \quad \partial_{x_1x_3} f(x) = 2e^{-(x_1+x_2+x_3)}$$

$$\partial^2_{x_2} f(x) = e^{x_2} + 2e^{-(x_1+x_2+x_3)}, \quad \partial_{x_2x_3} f(x) = 2e^{-(x_1+x_2+x_3)}$$

$$\partial^2_{x_3} f(x) = e^{x_3} + 2e^{-(x_1+x_2+x_3)}.$$

$$Hf(x) = \begin{bmatrix} e^{x_1}+2e^{-\phi(x)} & 2e^{-\phi(x)} & 2e^{-\phi(x)} \\ 2e^{-\phi(x)} & e^{x_2}+2e^{-\phi(x)} & 2e^{-\phi(x)} \\ 2e^{-\phi(x)} & 2e^{-\phi(x)} & e^{x_3}+2e^{-\phi(x)} \end{bmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$ όπου: $\phi(x) := x_1+x_2+x_3$

$$Hf(0) = \begin{bmatrix} 1+2 & 2 & 2 \\ 2 & 1+2 & 2 \\ 2 & 2 & 1+2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_{\text{συμμετρικός}}$$

$(Hf(0))_{11} = 3 > 0$

$\det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 9 - 4 > 0$

$$\det Hf(0) = 3\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 3(9-4) - 2(6-4) + 2(4-6)$$

$$= 3 \cdot 5 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) = 15 - 4 - 4 = 7 > 0$$

(2.9

Άρα $Hf(0)$ είναι θ.ο. και το σημείο $x^*=0$ είναι σημείο απόλυτου τοπικού ελαχίστου.

Άρα το $x^*=0$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f.

Μένει το ερώτημα αν το $x^*=0$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f.

Παρατηρούμε ότι:

$$Hf(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{x_3} \end{bmatrix}}_{A(x)} + 2e^{-\phi(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{B(x)}$$

Ο πίνακας $A(x)$ είναι θ.ο. καθώς είναι διαγώνιος με θετικά διαγώνια στοιχεία.

Ο πίνακας $B(x)$ είναι επίσης συμμετρικός πίνακας. Ας βρούμε τις ιδιοτιμές του.

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2-1\right) - (1-\lambda-1) + (1-1+\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(1+\lambda^2-2\lambda-1) + \lambda+\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda) + 2\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda\left[(1-\lambda)(\lambda-2)+2\right] = 0 \Leftrightarrow \lambda\left[\lambda-\cancel{2}-\lambda^2+2\lambda+\cancel{2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(-\lambda^2+3\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda\,\lambda(3-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\lambda=0}_{\text{διπλή}} \text{ ή } \lambda=3$$

. Επομένως ο $B(x)$ έχει μη αρνητικές ιδιοτιμές και είναι συμμετρικός.

Άρα ο $B(x)$ είναι θ.ημιορισμένος, και ο $\underbrace{2e^{-\phi(x)}}_{>0}B(x)$ είναι θ.ημιορισμένος. Επομένως, ο $Hf(x)$ είναι θετικά ορισμένος για καθε $x\in\mathbb{R}^3$. Επειδή το $\mathbb{R}^3$ είναι κυρτό και έχει εσωτερικά σημεία έπεται ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}^3$! Άρα το $x^*=0$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f στο $\mathbb{R}^3$. Επειδή η f έχει μόνο ένα τοπικό ελάχιστο, έπεται ότι το $x^*=0$ είναι σημείο απόλυτου τοπικού ελαχίστου της f στο $\mathbb{R}^3$.

2.10

Άσκηση 1.5

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με: $f(x) = x_1^5 - x_1 x_2^6 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$

Λύση

$\partial_{x_1} f(x) = 5x_1^4 - x_2^6 \qquad \partial_{x_2} f(x) = -6x_1 x_2^5$

$$\nabla f(x) = 0 \iff \begin{cases} 5x_1^4 = x_2^6 \\ 6x_1 x_2^5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x_1^4 = x_2^2 \\ x_1 = 0 \text{ ή } x_2 = 0 \end{cases} \iff x = 0$$

$$Hf(x) = \begin{bmatrix} 20x_1^3 & -6x_2^5 \\ -6x_2^5 & -30x_1x_2^4 \end{bmatrix}$$

Άρα: $Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Επομένως οι ικανές συνθήκες $2^{ης}$ τάξης δεν ισχύουν.

Θα προσπαθήσουμε να καταλήξουμε σε κάποιο συμπέρασμα, με εργαλεία απειροστικού λογισμού.

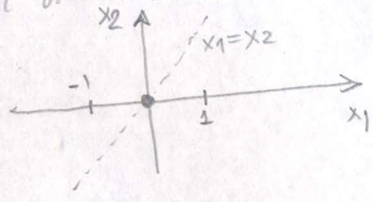
Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x_1 \to +\infty} f(x_1, 0) = \lim_{x_1 \to +\infty} x_1^5 = +\infty$$

και

$$\lim_{x_1 \to -\infty} f(x_1, 0) = \lim_{x \to -\infty} x_1^5 = -\infty.$$

Άρα η f δεν είναι άνω φραγμένη και δεν είναι κάτω φραγμένη. Άρα δεν έχει ολικό μέγιστο και δεν έχει ολικό ελάχιστο. Έστω: $x^* = (0,0)$ Τότε $f(x^*) = 0$.



Έστω $g(x_1) = f(x_1, x_1) = x_1^5 - x_1^7 = x_1^5(1 - x_1^2) \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}$.

Όταν $1 > x_1 > 0$ τότε $f(x_1, x_1) = g(x_1) > 0 = f(x^*)$.

όταν $-1 < x_1 < 0$ τότε $f(x_1, x_1) = g(x_1) < 0 = f(x^*)$. Άρα το $(0,0)$ δεν είναι σημείο τοπικού ελαχίστου και δεν είναι σημείο τοπικού μεγίστου.

Άσκηση 1.6

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x_1^2 - 4x_1 + 2x_2^2 + 7 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

Λύση

$$\partial_{x_1} f(x) = 2x_1 - 4 \quad , \quad \partial_{x_2} f(x) = 4x_2$$

$$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} 2x_1 - 4 = 0 \\ 4x_2 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow x = (2,0).$$

$$Hf(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ θ.ο. } \forall x \in \mathbb{R}^2$$

Άρα το (2,0) είναι σημείο απόλυτου τοπικού ελαχίστου.

Επίσης δεν υπάρχουν τοπικά μέγιστα (άρα δεν υπάρχουν και ολικά μέγιστα). Μένει το
ερώτημα αν το (2,0) είναι σημείο ολικού ελαχίστου. Επειδή η $Hf(x)$ είναι θ.ο. στο $\mathbb{R}^2$ και
το $\mathbb{R}^2$ είναι κυρτό με εσωτερικά σημεία, έπεται ότι η f είναι κυρτή άρα το (2,0) είναι σημείο
ολικού ελαχίστου της f στο $\mathbb{R}^2$. Επειδή το $\mathbb{R}^2$ έχει μόνο εσωτερικά σημεία, η απαίτηση $\nabla f(x) = 0$ δίνει
όλα τα σημεία που μπορούν να είναι τοπικά μέγιστα ή τοπικά ελάχιστα. Επειδή η f δεν έχει άλλο τοπικό ελάχιστο
το (2,0) θα είναι σημείο απόλυτου τοπικού ελαχίστου της f στο $\mathbb{R}^2$. ∎

Άσκηση 1.7

$$F(\alpha) = \int_0^1 \Big(g(t) - \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j t^{j-1}\Big)^2 dt \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Λύση: Υπολογίζουμε πρώτα το $\nabla F(\alpha) = (\partial_{\alpha_1} F(\alpha), \dots, \partial_{\alpha_{n+1}} F(\alpha))$. Για $k = 1, \dots, n+1$, έχουμε:

$$\partial_{\alpha_k} F(\alpha) = \int_0^1 2\Big(g(t) - \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j t^{j-1}\Big)\, \partial_{\alpha_k}\Big(g(t) - \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j t^{j-1}\Big) dt$$

$$= 2 \int_0^1 \Big(g(t) - \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j t^{j-1}\Big)\big(-t^{k-1}\big) dt$$

$$= -2 \int_0^1 g(t)\, t^{k-1} dt + 2 \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \int_0^1 t^{j-1} t^{k-1} dt.$$

Έτσι:

$$\nabla F(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n+1} \Big(\int_0^1 t^{j-1} t^{k-1} dt\Big) \alpha_j = \int_0^1 g(t)\, t^{k-1} dt \quad , k = 1, \dots, n+1 \quad (I)$$

Ορίζοντας $G \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ και $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ με:

$$b_k = \int_0^1 g(t)\, t^{k-1} dt \quad , k = 1, \dots, n+1$$

$$G_{kj} = \int_0^1 t^{j-1} t^{k-1} dt \quad , k, j = 1, \dots, n+1,$$

η (I) είναι το γραμμικό σύστημα: $G\alpha = b$. Ο πίνακας G είναι θετικά ορισμένος

καθώς: $(Gy, y) = \int_0^1 \Big|\sum_{j=1}^{n+1} y_j t^{j-1}\Big|^2 dt \geq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^{n+1}$, και $(Gy, y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n+1} y_j t^{j-1} = 0 \ \forall t \in [0,1]$

$\Leftrightarrow y_j = 0, j = 1, \dots, n+1 \Leftrightarrow y = 0.$

2.13

Έτσι ο G είναι αντιστρέψιμος και επομένως υπάρχει μοναδικό $\alpha^* \in \mathbb{R}^{n+1}$ τ.ω.

$$G\alpha^* = b$$

$$\Leftrightarrow \nabla F(\alpha^*) = 0,$$

Υπολογίζουμε την $HF(\alpha)$. Παρατηρούμε ότι, για $1 \leq k, \ell \leq n+1$, έχουμε:

$$\partial_{\alpha_\ell \alpha_k} F(\alpha) = 2\int_0^1 t^{\ell-1} t^{k-1}\, dt = 2\, G_{k\ell}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^{n+1},$$

δηλ. $HF(\alpha) = 2G$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Άρα η $HF(\alpha^*)$ είναι θ.ο. και το α^* είναι σημείο απόλυτου τοπικού ελαχίστου.

Επειδή η $HF(\alpha)$ είναι θ.ο. γιακάθε $\alpha \in \mathbb{R}^{n+1}$ και το $\mathbb{R}^{n+1}$ είναι κυρτό με εσωτερικά σημεία, έπεται ότι η F είναι κυρτή στο $\mathbb{R}^{n+1}$. Άρα το α^* είναι σημείο ολικού ελαχίστου, και μάλιστα σημείο απόλυτου ολικού ελαχίστου, διότι η F έχει μόνο ένα τοπικό ελάχιστο.

∎