Διάλεξη 3 (εξ αποστάσεως)

Πέμπτη 9 Απριλίου 2020

5μμ - 7μμ

(zoom meeting)

Version 1 (17/4/2020)

Γ. Ζαφείρης.

Θεώρημα (ικανές συνθήκες $2^{ης}$ τάξης).

Έστω $f, (h_i)_{i=1}^{m}, (g_j)_{j=1}^{p} \in C^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ και $S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{ll} h_i(x) = 0 & i = 1, \dots, m \\ g_j(x) \leq 0 & j = 1, \dots, p \end{array} \right\}$.

Έστω $x^* \in S$. Το $x^* \in S$ είναι σημείο αυστηρού τοπικού ελαχίστου της f στο S όταν:

A. υπάρχουν $(\lambda_j)_{j=1}^{m} \subset \mathbb{R}$ και $(\mu_k)_{k=1}^{p} \subset [0, +\infty)$ τ.ω.

$$\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla h_j(x^*) + \sum_{k=1}^{p} \mu_k \nabla g_k(x^*) = 0$$

$$\mu_j g_j(x^*) = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, p$$

και ο πίνακας

$$\Lambda(x^*) = Hf(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j Hh_j(x^*) + \sum_{k=1}^{p} \mu_k Hg_k(x^*)$$

είναι θ.ο. στο

$$\tilde{M}(x^*) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{ll} (\nabla h_i(x^*), y) = 0 & i = 1, \dots, m \\ (\nabla g_j(x^*), y) = 0 & \forall j \in \tilde{J}(x^*) \end{array} \right\}$$

και $\tilde{J}(x^*) = \left\{ j \in \{1, \dots, p\} : \mu_j > 0 \text{ και } g_j(x^*) = 0 \right\}$.

(B.3.2

Απόδειξη.

Έστω ότι το $x^* \in S$ δεν είναι σημείο αυστηρού τοπικού ελαχίστου της f στο S. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ακολουθία σημείων $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset S$ τ.ω $f(x_n) \leq f(x^*)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^*$ και $x_n \neq x^*$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Επιπλέον ορίζουμε: $s_n := \dfrac{x_n - x^*}{|x_n - x^*|}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, για τις οποίες έχουμε: $|s_n| = \left| \dfrac{x_n - x^*}{|x_n - x^*|} \right| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Έτσι: $x_n = x^* + |x_n - x^*| s_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Για απλούστευση στο συμβολισμό ορίζουμε: $\delta_n := |x_n - x^*| > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Επειδή $|s_n| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, δηλ. τα $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένα, υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(s_{e_n})_{n=1}^{\infty}$ της $(s_n)_{n=1}^{\infty}$. Έστω $s^* \in \mathbb{R}^n$ το όριο της $(s_{e_n})_{n=1}^{\infty}$, δηλ. $\lim_{n\to+\infty} s_{e_n} = s^*$ (Επειδή: $||s^*| - |s_{e_n}|| \leq |s_{e_n} - s^*|$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $|1 - |s^*|| \leq |s_{e_n} - s^*| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow |s^*| = 1$.)

Εφαρμόζοντας τον τύπο TAYLOR για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών έχουμε:

$$0 \geq f(x_{\ell_n}) - f(x^*) = (\nabla f(x^*), (x_{\ell_n} - x^*)) + (Hf(z_n)(x_{\ell_n} - x^*), (x_{\ell_n} - x^*))$$

$$\Rightarrow \quad 0 \geq (\nabla f(x^*), \delta_{\ell_n} s_{\ell_n}) + (Hf(z_n)\delta_{\ell_n} s_{\ell_n}, \delta_{\ell_n} s_{\ell_n})$$

$$\Rightarrow \quad 0 \geq \delta_{\ell_n} (\nabla f(x^*), s_{\ell_n}) + \delta_{\ell_n}^2 (Hf(z_n) s_{\ell_n}, s_{\ell_n})$$

$$\Rightarrow \quad 0 \geq (\nabla f(x^*), s_{\ell_n}) + \delta_{\ell_n} (Hf(z_n) s_{\ell_n}, s_{\ell_n})$$

$$\begin{aligned} z_n &= \theta^n x^* + (1-\theta^n) x_{\ell_n} \\ &= \theta^n x^* + (1-\theta^n)(x^* + \delta_{\ell_n} s_{\ell_n}) \\ &= \theta^n x^* + (1-\theta^n) x^* + (1-\theta^n)\delta_{\ell_n} s_{\ell_n} \\ &= x^* + (1-\theta^n)\delta_{\ell_n} s_{\ell_n} \end{aligned}$$

για κάποιο $\theta^n \in (0,1)$

Παίρνοντας το όριο για $n \to +\infty$ καταλήγουμε στη σχέση:

$$0 \geq (\nabla f(x^*), s^*) \qquad (1)$$

Επειδή $(x_{\ell_n})_{n=1}^{\infty} \subset S$, ισχύει ότι: $h_i(x_{\ell_n}) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Εφαρμόζοντας τον τύπο του TAYLOR, έπεται:

$$0 = h_i(x_{\ell_n}) = \overbrace{h_i(x^*)}^{0} + (\nabla h_i(x^*), x_{\ell_n} - x^*) + (Hh_i(y^n)(x_{\ell_n} - x^*), x_{\ell_n} - x^*)$$

$$y^n = x^* + (1-\theta^n)\delta_{\ell_n} s_{\ell_n}$$

για κάποιο $\theta^n \in (0,1)$

$$\Rightarrow \quad 0 = \delta_{\ell_n} (\nabla h_i(x^*), s_{\ell_n}) + \delta_{\ell_n}^2 (Hh_i(y^n) s_{\ell_n}, s_{\ell_n})$$

B.3.4.

$$\Rightarrow \quad 0 = (\nabla h_i(x^*), s_{\ell_n}) + \delta_{\ell_n} (Hh_i(y^n) s_{\ell_n}, s_{\ell_n}) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Παίρνοντας το όριο για $n \to +\infty$, καταλήγουμε στη σχέση

$$\boxed{0 = (\nabla h_i(x^*), s^*) \quad \text{για } i = 1, \ldots, m \quad (2)}$$

Όταν $k \in J(x^*)$, δηλ. $g_k(x^*) = 0$, έχουμε:

$$0 \geq g_k(x_{\ell_n}) = \overbrace{g_k(x^*)}^{0} + (\nabla g_k(x^*), x_{\ell_n} - x^*) + (Hg_k(\tilde{z}^n)(x_{\ell_n} - x^*), x_{\ell_n} - x^*)$$

$\tilde{z}^n = x^* + (1-\theta^n)\delta_{\ell_n} s_{\ell_n}$ για κάποιο $\theta^n \in (0,1)$

$$\Rightarrow \quad 0 \geq (\nabla g_k(x^*), s_{\ell_n}) + \delta_{\ell_n} (Hg_k(\tilde{z}^n) s_{\ell_n}, s_{\ell_n})$$

καταλήγουμε στη σχέση: $0 \geq (\nabla g_k(x^*), s^*)$. (3)

Επειδή: $\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \nabla h_j(x^*) + \sum_{k=1}^{p} \mu_k \nabla g_k(x^*) = 0$, έπεται ότι:

$$(\nabla f(x^*), s^*) + \sum_{j=1}^{m} (\nabla h_j(x^*), s^*) = -\sum_{k=1}^{p} \mu_k (\nabla g_k(x^*), s^*)$$

$$\xrightarrow[(2)]{(1)} \quad 0 \geq -\sum_{k=1}^{p} \mu_k (\nabla g_k(x^*), s^*) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{p} \mu_k (\nabla g_k(x^*), s^*) \geq 0.$$

Περίπτωση 1. $\tilde{J}(x^*) \neq 0$.

Όταν $j \notin \tilde{J}(x^*)$ τότε: $\mu_j = 0$ ή $g_j(x^*) < 0$. Επιπλέον, όταν $g_j(x^*) < 0$, η ιδιότητα $\mu_j g_j(x^*) = 0$, μας δίνει $\mu_j = 0$. Άρα: $j \notin \tilde{J}(x^*) \Rightarrow \mu_j = 0$. Έτσι: $0 \leq \sum_{k=1}^{p} \mu_k (\nabla g_k(x^*), s^*) = \sum_{k \in \tilde{J}(x^*)} \mu_k (\nabla g_k(x^*), s^*)$, δηλ.

$$\sum_{k \in \tilde{J}(x^*)} \mu_k (\nabla g_k(x^*), s^*) \geq 0$$

(B 3.5

Αν για κάποιο $k_0 \in \tilde{J}(x^*)$ έχουμε $(\nabla g_{k_0}(x^*), s^*) < 0$. Τότε

$$0 \leq \underbrace{\sum_{\substack{k\in\tilde{J}(x^*)\\ k\neq k_0}} \mu_k (\nabla g_k(x^*), s^*)}_{\leq 0} + \underset{>0}{\mu_{k_0}} \underset{<0}{(\nabla g_{k_0}(x^*), s^*)} \leq \mu_{k_0} (\nabla g_{k_0}(x^*), s^*) < 0$$

που οδηγεί σε άτοπο. Άρα: $(\nabla g_k(x^*), s^*) = 0 \quad \forall k \in \tilde{J}(x^*)$.

Επιστρέφουμε στις σχέσεις που δίνει η εφαρμογή του τύπου TAYLOR:

$$0 \geq f(x_{e_n}) - f(x^*) = (\nabla f(x^*), x_{e_n} - x^*) + (Hf(z^n)(x_{e_n} - x^*), x_{e_n} - x^*)$$

$$0 = h_i(x_{e_n}) - h_i(x^*) = (\nabla h_i(x^*), x_{e_n} - x^*) + (Hh_i(y^n)(x_{e_n} - x^*), x_{e_n} - x^*) \quad , i = 1, \dots, m.$$

$$0 \geq \underset{\geq 0}{g_k(x_{e_n})} - \underbrace{g_k(x^*)}_{0} = (\nabla g_k(x^*), x_{e_n} - x^*) + (Hg_k(\bar{z}^n)(x_{e_n} - x^*), x_{e_n} - x^*) \quad , k \in \tilde{J}(x^*) \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

Άρα:

$$0 \geq \left(\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{k\in\tilde{J}(x^*)} \mu_k \nabla g_k(x^*), (x_{e_n} - x^*)\right)$$

$$+ \left(\left(Hf(z^n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i Hh_i(y^n) + \sum_{k\in\tilde{J}(x^*)} \mu_k Hg_k(\bar{z}^n)\right)(x_{e_n} - x^*), x_{e_n} - x^*\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(B 3.6

$$\Rightarrow \quad 0 \geq \Big(\underbrace{\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{k=1}^{p} \mu_k \nabla g_k(x^*)}_{=0}, x_{\delta n} - x^* \Big)$$

$$+ \delta_n^2 \left(\left(Hf(z^n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i Hh_i(y^n) + \underbrace{\sum_{k=1}^{p} \mu_k Hg_k(\tilde{z}^n)}_{\substack{\mu_k = 0 \text{ όταν} \\ k \notin J(x^*)}} \right) s_{\delta n}, s_{\delta n} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \geq \left(\left(Hf(z^n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i Hh_i(y^n) + \sum_{k=1}^{p} \mu_k Hg_k(\tilde{z}^n) \right) s_{\delta n}, s_{\delta n} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Επειδή $|z^n - x^*| \leq \delta_{\delta n}$, $|y^n - x^*| \leq \delta_{\delta n}$, $|\tilde{z}^n - x^*| \leq \delta_n$, έπεται ότι $\lim_{n\to+\infty} z^n = x^*$, $\lim_{n\to+\infty} \tilde{z}^n = x^*$ και $\lim_{n\to+\infty} y^n = x^*$.

Επειδή $f, (h_i)_{i=1}^{m}, (g_k)_{k=1}^{p} \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ παίρνοντας το όριο για $n \to +\infty$ έχουμε:

$$0 \geq \left(\left(Hf(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i Hh_i(x^*) + \sum_{k=1}^{p} \mu_k Hg_k(x^*) \right) s^*, s^* \right)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \geq \left(\Lambda(x^*) s^*, s^* \right).$$

(B 3.7

Όμως: $(\nabla h_i(x^*), s^*) = 0 \quad i=1,\dots,m$ (βλ. (2))

$(\nabla g_k(x^*), s^*) = 0 \quad \forall k \in \mathcal{J}(x^*)$ (βλ. (3)),

που συνεπάγονται ότι: $s^* \in \widetilde{M}(x^*)$. Επειδή $s^* \neq 0$ και $\Lambda(x^*)$ είναι θ.ο. στο $\widetilde{M}(x^*)$

έπεται ότι: $(\Lambda(x^*) s^*, s^*) > 0$. Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο.

B.3.8

<u>Περίπτωση 2</u> $\mathcal{J}(x^*) = \emptyset$.

Έστω ότι υπάρχει $j_0 \in \{1,\dots,p\}$ με: $\mu_{j_0} > 0$. Τότε η συνθήκη: $\mu_{j_0} g_{j_0}(x^*) = 0$ δίνει: $g_{j_0}(x^*) = 0$.

Άρα: $j_0 \in \mathcal{J}(x^*)$, που μας οδηγεί σε άτοπο. Άρα: $\mu_j = 0$, $j = 1,\dots,p$. Επομένως:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla h_j(x^*) = 0.$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Taylor έχουμε:

$$f(x_{\varepsilon_n}) - f(x^*) = (\nabla f(x^*), x_{\varepsilon_n} - x^*) + (Hf(z^n)(x_{\varepsilon_n} - x^*), x_{\varepsilon_n} - x^*)$$

$$\underbrace{h_i(x_{\varepsilon_n})}_{=0} - \underbrace{h_i(x^*)}_{=0} = (\nabla h_i(x^*), x_{\varepsilon_n} - x^*) + (Hh_i(y^n)(x_{\varepsilon_n} - x^*), x_{\varepsilon_n} - x^*) \qquad i = 1,\dots,m$$

Άρα:
$$\underbrace{f(x_{\varepsilon_n}) - f(x^*)}_{\geq 0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (h_i(x_{\varepsilon_n}) - h_i(x^*))}_{=0} = \Big(\overbrace{\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(x^*)}^{=0}, x_{\varepsilon_n} - x^*\Big)$$
$$+ \left(\left(Hf(z^n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i Hh_i(y^n)\right)(x_{\varepsilon_n} - x^*), (x_{\varepsilon_n} - x^*)\right)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \geq \delta_{\varepsilon_n}^2 \left(\left(Hf(z^n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i Hh_i(y^n)\right) s_{\varepsilon_n}, s_{\varepsilon_n}\right) \Rightarrow 0 \geq \left(\left(Hf(z^n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i Hh_i(y^n)\right) s_{\varepsilon_n}, s_{\varepsilon_n}\right), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Παρατηρώντας ότι $|z^n - x^*| \leq \delta_{\varepsilon_n}$ και $|y^n - x^*| \leq \delta_{\varepsilon_n}$, έπεται ότι $\lim_{n\to+\infty} z^n = x^*$ και $\lim_{n\to+\infty} y^n = x^*$.

(B.3.9

Επειδή $f, (h_i)_{i=1}^m \in C^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ έπεται ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} Hf(z^n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i Hh_i(y^n) = Hf(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i Hh_i(x^*) = \Lambda(x^*)$$

Έτσι:

$$0 \geq \lim_{n\to+\infty} \left(\left(Hf(z^n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i Hh_i(y^n)\right) s_{en}, s_{en} \right)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \geq (\Lambda(x^*) s^*, s^*).$$

Έχουμε ήδη δει ότι: $(\nabla h_i(x^*), s^*) = 0 \quad i=1,\dots,m$ (βλ. (2)), άρα: $s^* \in \widetilde{M}(x^*)$.
Επειδή ο πίνακας $\Lambda(x^*)$ είναι θ.ο. στον $\widetilde{M}(x^*)$ και $s^* \neq 0$, έπεται: $(\Lambda(x^*) s^*, s^*) > 0$

Έτσι καταλήξαμε σε άτοπο. ∎

B 3.10

<u>Κυρτότητα</u>

Έχουμε ήδη δει ότι αν η f είναι κυρτή σε ένα κυρτό σύνολο Ω, τότε ένα σημείο τοπικού ελαχίστου είναι σημείο ολικού μεγίστου. Όταν δουλεύουμε με ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς τότε το χωρίο στο οποίο αναζητούμε το τοπικό ελάχιστο της f είναι το $S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{matrix} h_i(x) = 0 & i=1,\dots,m \\ g_j(x) \leq 0 & j=1,\dots,p \end{matrix} \right\}$.

Επομένως μας ενδιαφέρει πότε το S είναι κυρτό. Αυτό ισχύει όταν:

$$h_i(x) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j + b_i \qquad i=1,\dots,m \qquad \text{(affine function)}$$

και τα $(g_j(x))_{j=1}^{p}$ είναι κυρτές συναρτήσεις...

Έστω: $\theta \in [0,1]$ και $x, y \in S$. Θα δείξουμε ότι: $\theta x + (1-\theta) y \in S$,

δηλ. $h_i(\theta x + (1-\theta) y) = 0 \quad i=1,\dots,m$ και

$$g_j(\theta x + (1-\theta) y) \leq 0 \quad j=1,\dots,p.$$

(Β.3.11.

Πράγματι:

$$h_i(\theta x+(1-\theta)y)=\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\,(\theta x_j+(1-\theta)y_j)+b_i$$

$$=\theta\underbrace{\left\{\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j+b_i\right\}}_{\substack{\shortparallel\\ h_i(x)\\ \shortparallel\\ 0}}+(1-\theta)\underbrace{\left\{\sum_{j=1}^{n} A_{ij}y_j+b_i\right\}}_{\substack{h_i(y)\\ \shortparallel\\ 0}}$$

$$=\theta\, h_i(x)+(1-\theta)h_i(y)=0 \quad , i=1,\dots,m,$$

και:

$$g_j(\theta x+(1-\theta)y)\overset{\text{κυρτότητα της } g_j}{\leq}\theta g_j(x)+(1-\theta)g_j(y)$$

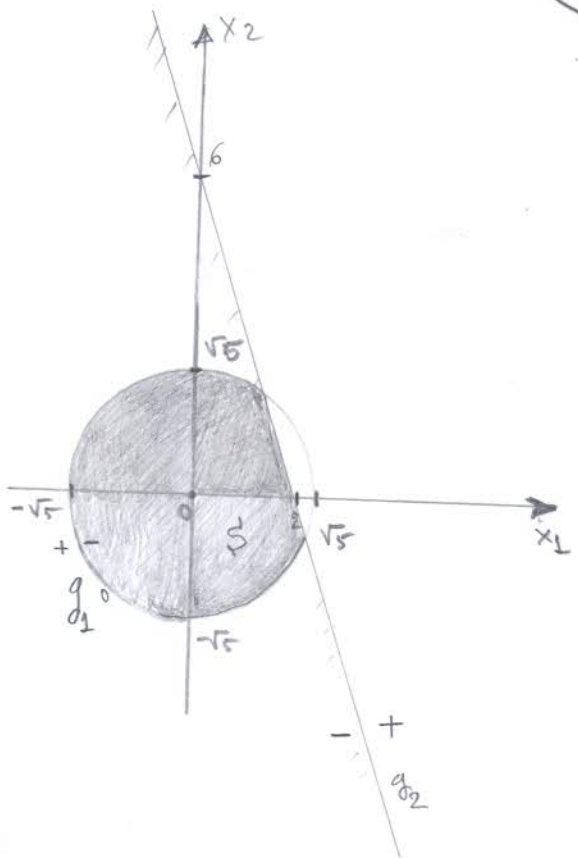
$$\leq 0 \quad , j=1,\dots,\ell .$$

B.3.12

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με: $f(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2$ και ανισοτικοί περιορισμοί $g_1, g_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 5$ και $g_2(x) = 3x_1 + x_2 - 6$. Μας ενδιαφέρει να βρούμε τα τοπικά ελάχιστα της f υπό τους περιορισμούς $g_1(x) \leq 0$ και $g_2(x) \leq 0$. Έτσι:

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^n : \; g_1(x) \leq 0 \; \text{και} \; g_2(x) \leq 0 \}.$$



Όπως φαίνεται στο σχήμα το S είναι τμήμα του κυκλικού δίσκου με κέντρο το 0 που αποκόπτεται από την ευθεία $3x_1 + x_2 = 6$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Με βάση τις αναγκαίες συνθήκες 1ης τάξης, αναζητούμε $x \in S$ και $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ τ.ω.

$$\nabla f(x) + \mu_1 \nabla g_1(x) + \mu_2 \nabla g_2(x) = 0$$

$$\mu_1 g_1(x) = 0, \quad \mu_2 g_2(x) = 0$$

Υπολογίζοντας πρώτα τα $\nabla f, \nabla g_1, \nabla g_2$ και παίρνουμε:

$$\nabla f(x) = (4x_1 + 2x_2 - 10, \; 2x_2 - 10 + 2x_1)$$

$$\nabla g_1(x) = (2x_1, 2x_2) = 2(x_1, x_2) \qquad \nabla g_2(x) = (3, 1)$$

B3.13

Έτσι:

$$(4x_1+2x_2-10)+\mu_1 2x_1+3\mu_2=0,$$

$$(2x_2-10+2x_1)+\mu_1 2x_2+\mu_2=0,$$

$$\mu_1(x_1^2+x_2^2-5)=0,\quad \mu_2(3x_1+x_2-6)=0,$$

$$(x_1,x_2)\in S.$$

Περίπτωση 1: $J(x)=\phi$

Τότε $g_1(x)<0$ και $g_2(x)<0$, και επομένως $\mu_1=\mu_2=0$.

Έτσι: $\begin{matrix}4x_1+2x_2=10\\2x_1+2x_2=10\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}x_1=0\\x_2=5\end{matrix}$ δηλ. $x=(0,5)$.

$g_1(0,5)=0+25-5>0$!

$g_2(0,5)=3\cdot0+5-6=5-6=-1<0$ ✓

$\Rightarrow (0,5)\notin S$.

Άρα δεν υπάρχει τοπικό ακρότατο με $J(x)=\phi$.

(B3.14.

Περίπτωση **2:** $J(x)=\{2\}$.

$g_1(x)<0 \quad g_2(x)=0$

Έτσι: $\mu_1=0$ και το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\left.\begin{array}{l}(4x_1+2x_2-10)+3\mu_2=0\\ (2x_2-10+2x_1)+\mu_2=0\\ 3x_1+x_2-6=0,\ \mu_2\ge 0\\ x_1^2+x_2^2<5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}4x_1-10+12-6x_1+3\mu_2=0\\ 12-6x_1-10+2x_1+\mu_2=0\\ x_2=6-3x_1,\ \mu_2\ge 0\\ x_1^2+x_2^2<5\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}-2x_1+2+3\mu_2=0\\ -4x_1+2+\mu_2=0\\ x_2=6-3x_1,\ \mu_2\ge 0\\ x_1^2+x_2^2<5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}-2x_1+2+12x_1-6=0,\\ \mu_2=4x_1-2,\\ x_2=6-3x_1,\\ \mu_2\ge 0,\ x_1^2+x_2^2<5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}10x_1=4\\ \mu_2=4x_1-2\\ x_2=6-3x_1\\ \mu_2\ge 0,\ x_1^2+x_2^2<5\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}x_1=2/5\\ \mu_2=4\cdot\frac{2}{5}-2\\ x_2=6-3\cdot 2/5\\ \mu_2\ge 0,\ x_1^2+x_2^2<5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}x_1=2/5\\ x_2=6-6/5\\ \mu_2=\frac{8}{5}-\frac{10}{5}\\ \mu_2\ge 0,\ x_1^2+x_2^2<5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}x_1=2/5\\ x_2=\frac{30-6}{5}\\ \mu_2=-2/5\\ \mu_2\ge 0\\ x_1^2+x_2^2<5\end{array}\right]$$

Άρα δεν υπάρχει τοπικό ακρότατο με $J(x)=\{2\}$.

B.3.15

Περίπτωση 3: $J(x)=\{1\}$

Τότε $g_1(x)=0$ και $g_2(x)<0$. Επομένως $\mu_2=0$. Έτσι καταλήγουμε στο σύστημα:

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+2\mu_1 x_1=10 \\ 2x_1+2x_2+2\mu_1 x_2=10 \\ x_1^2+x_2^2=5,\ \mu_1\geq 0 \\ 3x_1+x_2<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1+2\mu_1(x_1-x_2)=0 \\ 2x_1+2x_2+2\mu_1x_2=10 \\ x_1^2+x_2^2=5,\ \mu_1\geq 0 \\ 3x_1+x_2<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2+2\mu_1)x_1=2\mu_1x_2 \\ 2x_1+(2+2\mu_1)x_2=10 \\ x_1^2+x_2^2=5,\ \mu_1\geq 0 \\ 3x_1+x_2<6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2+x_2^2=5,\ \mu_1\geq 0 \\ x_1+(1+\mu_1)x_2=5 \\ (1+\mu_1)x_1=\mu_1x_2 \\ 3x_1+x_2<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=5-(1+\mu_1)x_2 \\ x_1=\frac{\mu_1}{1+\mu_1}x_2 \\ x_1^2+x_2^2=5,\ \mu_1\geq 0 \\ 3x_1+x_2<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\mu_1}{1+\mu_1}x_2+(1+\mu_1)x_2=5 \\ x_1=\frac{\mu_1}{1+\mu_1}x_2 \\ x_1^2+x_2^2=5,\ \mu_1\geq 0 \\ 3x_1+x_2<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(1+\mu_1)^2+\mu_1}{1+\mu_1}x_2=5 \\ x_1=\frac{\mu_1}{1+\mu_1}x_2 \\ x_1^2+x_2^2=5,\ \mu_1\geq 0 \\ 3x_1+x_2<6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2=\frac{5(1+\mu_1)}{\mu_1+(1+\mu_1)^2},\ x_1=\frac{\mu_1}{1+\mu_1}x_2 \\ \mu_1\geq 0,\ x_1^2+x_2^2=5,\ 3x_1+x_2<6 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_2=\frac{5(1+\mu_1)}{\mu_1+(1+\mu_1)^2},\ x_1=\frac{5\mu_1}{\mu_1+(1+\mu_1)^2} \\ 3x_1+x_2<6,\ \mu_1\geq 0,\ x_1^2+x_2^2=5 \end{array}} \quad (\Sigma).$$

$$x_1^2+x_2^2=5 \Leftrightarrow 5\left[\mu_1+(1+\mu_1)^2\right]^2=25\mu_1^2+25(1+\mu_1)^2 \Leftrightarrow 5\mu_1^2+5(1+\mu_1)^2=\left[\mu_1+(1+\mu_1)^2\right]^2$$

$$\Leftrightarrow 5\mu_1^2+5(1+\mu_1^2+2\mu_1)=(\mu_1+1+\mu_1^2+2\mu_1)^2 \Leftrightarrow 5+10\mu_1^2+10\mu_1=(\mu_1^2+3\mu_1+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 10\mu_1^2+10\mu_1+5=\mu_1^4+9\mu_1^2+1+2\mu_1^2+6\mu_1+6\mu_1^3 \Leftrightarrow \mu_1^4+6\mu_1^3+\mu_1^2-4\mu_1-4=0.$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή $\mu_1=1$ είναι λύση. Διαιρούμε με μ_1-1 και έχουμε·

(Β3.16)

$$
\begin{array}{r|l}
\mu_1^4+6\mu_1^3+\mu_2^2-4\mu_1-4 & \mu_1-1 \\ \hline
-\mu_1^4+\mu_1^3 & \mu_1^3+7\mu^2+8\mu_1+4 \\ \cline{1-1}
7\mu_1^3+\mu_2^2-4\mu_1-4 & \\
-7\mu_1^3+7\mu^2 & \\ \cline{1-1}
8\mu_1^2-4\mu_1-4 & \\
-8\mu_1^2+8\mu_1 & \\ \cline{1-1}
4\mu_1-4 & \\
-4\mu_1+4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Έτσι: $\mu_1^4+6\mu_1^3+\mu_1^2-4\mu_1-4=0 \Leftrightarrow (\mu_1-1)(\mu_1^3+7\mu_1^2+8\mu_1+4)=0$. Παρατηρούμε ότι $\mu_1^3+7\mu_1^2+8\mu_1+4\geq 4 \quad \forall\, \mu_1\geq 0$. Άρα δεν υπάρχουν άλλες λύσεις $\mu_1\geq 0$. Συνοψίζοντας έχουμε:

$$
(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1=\dfrac{5}{1+4},\ x_2=\dfrac{10}{1+4} \\ \mu_1=1,\ 3x_1+x_2<6 \end{array}
\Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1=5/5 \\ x_2=10/5 \\ \mu_1=1 \\ 3x_1+x_2<6 \end{array}
\Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=2 \\ \mu_1=1 \\ 3+2<6 \end{array}
\Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=2 \\ \mu_1=1. \end{array}
$$

B3.17

Περίπτωση 4 $J(x)=\{1,2\}$

Τότε: $g_1(x)=0$ και $g_2(x)=0$. Επομένως:

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2=5 \\ 3x_1+x_2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2+x_2^2=5 \\ x_2=6-3x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2+(6-3x_1)^2=5 \\ x_2=6-3x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2+9x_1^2+36-36x_1=5 \\ x_2=6-3x_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x_1^2-36x_1+31=0 \\ x_2=6-3x_1 \end{cases} \qquad \Delta=36^2-4\cdot10\cdot31=1296-1240=56$$

$$x_1=\frac{36\pm\sqrt{56}}{20}=\frac{36\pm2\sqrt{14}}{20}=\frac{18\pm\sqrt{14}}{10}$$

→ τα σημεία τομής της ευθείας και του κύκλου.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{18\pm\sqrt{14}}{10} \\ x_2=6-3x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{18+\sqrt{14}}{10} \\ x_2=\frac{60-3\sqrt{14}-54}{10} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x_1=\frac{18-\sqrt{14}}{10} \\ x_2=\frac{60-54+3\sqrt{14}}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{18+\sqrt{14}}{10} \\ x_2=\frac{6-3\sqrt{14}}{10} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x_1=\frac{18-\sqrt{14}}{10} \\ x_2=\frac{6+3\sqrt{14}}{10} \end{cases}$$

Επιπλέον ψάχνουμε $\mu_1\geq0, \mu_2\geq0$ τω

$$\begin{cases} (4x_1+2x_2-10)+2\mu_1x_1+3\mu_2=0 \\ (2x_1+2x_2-10)+2\mu_1x_2+\mu_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\mu_2+2\mu_1(x_1-x_2)+2x_1=0 \\ \mu_2=-2\mu_1x_2-(2x_1+2x_2-10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_2=-x_1-\mu_1(x_1-x_2) \\ -x_1-\mu_1(x_1-x_2)=2\mu_1x_2-2(x_1+x_2-5) \end{cases}$$

αφαιρούμε τη 2η σχέση από την 1η

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu_2=-x_1-\mu_1(x_1-x_2) \\ \mu_1(2x_2+x_1-x_2)=-x_1+2x_1+2x_2-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_2=-x_1-\mu_1(x_1-x_2) \\ \mu_1(x_1+x_2)=x_1+2x_2-10 \end{cases}$$

(B 3.18

Όταν: $x_1 = \frac{18+\sqrt{14}}{10}$, $x_2 = \frac{6-3\sqrt{14}}{10}$ τότε:

$$x_1+x_2 = \frac{24-\sqrt{14}}{10} > 0$$

$$x_1+2x_2-10 = \frac{18+\sqrt{14}+12-6\sqrt{14}-100}{10} = \frac{-70-5\sqrt{14}}{10} < 0$$

άρα $\mu_2 < 0$

Όταν $x_1 = \frac{18-\sqrt{14}}{10}$, $x_2 = \frac{6+3\sqrt{14}}{10}$ τότε:

$$x_1+x_2 = \frac{24+2\sqrt{14}}{10} > 0$$

$$x_1+2x_2-10 = \frac{18-\sqrt{14}+12+6\sqrt{14}-100}{10} = \frac{-70+5\sqrt{14}}{10} = \frac{\sqrt{14}-14}{2} < 0$$

άρα $\mu_2 < 0$

Επομένως δεν υπάρχει ακρότατο $x \in S$ με $J(x) = \{1,2\}$.

B3.19

Η αναγκαίες συνθήκες 1ης τάξης μας οδήγησαν στις τιμές:

$$x^* = (1,2), \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 0$$

Ας ελέγξουμε τις ικανές συνθήκες 2ης τάξης. Έχουμε:

$$Hf(x) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad Hg_1(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(επειδή $\mu_2 = 0$ δεν υπολογίζουμε την Hg_2)

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Επομένως:

$$\Lambda(x) = Hf(x) + \mu_1 Hg_1(x) + \mu_2 Hg_2(x)$$

$$= \begin{bmatrix} 4+2\mu_1 & 2 \\ 2 & 2+2\mu_1 \end{bmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Έτσι: για $\mu_1 = 1$ και $x = (1,2)$ έχουμε $\Lambda(x) = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ο οποίος είναι θετικά ορισμένος στο $\mathbb{R}^2$. Άρα το $(1,2)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο S.

Μένει να εξετάσουμε αν το $(1,2)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f στο S.

1ος τρόπος: Επειδή το S είναι φραγμένο και κλειστό, η f έχει σημείο ολικού ελαχίστου, το οποίο είναι και σημείο τοπικού ελαχίστου. Επειδή το $(1,2)$ είναι το μοναδικό σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο S, έπεται ότι το $(1,2)$ σημείο απόλυτου ολικού ελαχίστου της f, B 3.20

2ος τρόπος: Επειδή οι g_1, g_2 είναι κυρτές, το S είναι ένα κυρτό σύνολο το οποίο έχει εσωτερικά σημεία. Επειδή $Hf(x) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\forall x \in S$, έπεται ότι η Hf είναι θ.ο. στο S, άρα η f είναι κυρτή στο S. Άρα το $(1,2)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f στο S, το οποίο επιπλέον είναι σημείο απόλυτου ολικού ελαχίστου της f στο S, επειδή η f έχει στο S ένα μόνο σημείο τοπικού ελαχίστου.