4η εξ αποστάσεως διάλεξη

ΜΕΜ-293 Θ. Βελτιστοποίησης

Μ. Δευτέρα 13/4/2020

5μμ - 7μμ

(zoom meeting)

Version 1

17/4/2020

Γ. Ζουράρης

Ασκηση 2.1

B 4.1

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x_1^4 + x_2^4 - 32x_1^2 \quad \forall\, x=(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$

α) Βρείτε $x \in \mathbb{R}^2$ τ.ω $Hf(x)$ να μην είναι θετικά ημιοριμένος και να μην είναι αρνητικά ημιοριμένος.

Απάντηση:

Πρώτα υπολογίζουμε την Εσσιανή της f

$\partial_{x_1} f(x) = 4x_1^3 - 64x_1 \qquad \partial_{x_2} f(x) = 4x_2^3$

$\partial^2_{x_1} f(x) = 12x_1^2 - 64 \qquad \partial^2_{x_2} f(x) = 12x_2^2$

$\partial_{x_2 x_1} f(x) = 0$

Επομένως: $\mathcal{H}f(x) = \begin{bmatrix} 12x_1^2 - 64 & 0 \\ 0 & 12x_2^2 \end{bmatrix} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2$ Ο $\mathcal{H}f(x)$ έχει

ιδιοτιμές: $\lambda_1(x) = 12x_1^2 - 64$ και $\lambda_2(x) = 12x^2$. Αρκεί να διαλέξουμε το x έτσι ώστε οι ιδιοτιμές $\lambda_1(x), \lambda_2(x)$ να έχουν διαφορετικό πρόσημο. Μια επιλογή είναι: $x = (1,1)$, καθώς τότε $\lambda_2(x) = 12$ και $\lambda_1(x) = 12 - 64 = -52 < 0$. $\diamond$

β) Δείξτε ότι η f είναι coercive

Λύση: Σύμφωνα με τον ορισμό αρκεί να δείξουμε ότι: $\lim_{|x|\to +\infty} f(x) = +\infty$, όπου: $|x| = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$ για κάθε $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$. Παρατηρούμε ότι:

$$f(x) = x_1^4+x_2^4 - 32x_1^2 = (x_1^4+x_2^4)\left(1 - \frac{32\,x_1^2}{x_1^4+x_2^4}\right) \quad \forall x\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\} \qquad (1)$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2 &\le 1\cdot x_1^2 + 1\cdot x_2^2 \\ &\le \sqrt{2}\,\sqrt{x_1^4+x_2^4} \quad \forall x\in\mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Άρα: $x_1^4+x_2^4 \ge \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)^2 \ \forall x\in\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow x_1^4+x_2^4 \ge \frac{1}{2}|x|^4 \ \forall x\in\mathbb{R}^2$. Επομένως $\lim_{|x|\to+\infty}(x_1^4+x_2^4) = +\infty$. (2)

Επίσης: $0 \le \dfrac{x_1^2}{x_1^4+x_2^4} \le \dfrac{2|x|^2}{|x|^4} = \dfrac{2}{|x|^2} \ \forall x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0$. Άρα $\lim_{|x|\to+\infty}\dfrac{x_1^2}{x_1^4+x_2^4} = 0$. (3)

Από (1),(2),(3) έπεται: $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty\,(1-0) = +\infty$.

B 4.3

γ) Βρείτε τα σημεία στα οποία η f λαμβάνει ολικό ελάχιστο. Υπάρχουν σημεία τοπικού ελαχίστου?

<u>Λύση:</u> Η f έχει σημείο ολικού ελαχίστου x^* στο $\mathbb{R}^2$, επειδή είναι coercive. Επειδή το $\mathbb{R}^2$ έχει μόνο εσωτερικά σημεία, έπεται ότι: $\nabla f(x^*)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x_1^*)^3-64x_1^*=0 \\ 4(x_2^*)^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1^*((x_1^*)^2-16)=0 \\ x_2^*=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^*(x_1^*-4)(x_1^*+4)=0 \\ x_2^*=0 \end{cases} \Leftrightarrow x^* \in \{(0,0),(4,0),(-4,0)\}.$$

Επιπλέον:

$$Hf(0,0)=\begin{bmatrix} -64 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Hf(4,0)=Hf(-4,0)=\begin{bmatrix} 192-64 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 128 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $Hf(0,0)$ είναι αρνητικά ημιορισμένος, επομένως το $(0,0)$ δεν είναι σημείο τοπικού ελαχίστου. Αντίθετα οι πίνακες $Hf(4,0)$, $Hf(-4,0)$ είναι θετικά ημιορισμένοι και τα $(\pm 4,0)$ δεν είναι σημεία τοπικού μεγίστου αλλά υποψήφια σημεία τοπικού ελαχίστου. Επειδή ξέρουμε ότι υπάρχει σημείο ολικού ελαχίστου αναγκαστικά θα είναι κάποιο από τα $(\pm 4,0)$. Όμως: $f(4,0)=f(-4,0)$, Άρα, η f έχει μόνο σημεία ολικού ελαχίστου στο $\mathbb{R}^2$, τα σημεία $(4,0)$ και $(-4,0)$.

B.4.4

δ) Δείξτε ότι δεν υπάρχει σημείο στο οποίο η f λαμβάνει ολικό ή τοπικό μέγιστο.

<u>Λύση.</u> Επειδή η f είναι coercive, συμπεραίνουμε ότι δεν είναι άνω φραγμένη στο $\mathbb{R}^2$ και επομένως δεν μπορεί να έχει σημείο ολικού μεγίστου.

Υποψήφιο τοπικό μεγίστου είναι το σημείο $(0,0)$. Όμως οι ικανές συνθήκες $2^{ης}$ τάξης δεν οδηγούν σε συμπέρασμα, γι' αυτό θα στηριχθούμε στον τύπο της f.

Παρατηρούμε ότι $f(x) = x_1^2(x_1^2-32)+x_2^4 \quad \forall x\in\mathbb{R}^2$. Άρα $f(0,x_2) = x_2^4 \quad \forall x_2\in\mathbb{R}$.
Αυτό σημαίνει ότι $f(0,x_2) > f(0,0) \quad \forall x_2\in\mathbb{R},\ x_2\neq 0$. Άρα το $(0,0)$ δεν μπορεί να είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f στο $\mathbb{R}^2$. Έτσι η f δεν έχει σημεία τοπικού μεγίστου στο $\mathbb{R}^2$.

Άσκηση 2.2

B 4.5

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = x^3 + e^{3y} - 3xe^y \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

α) Βρείτε τα σημεία τοπικού ελαχίστου της f

β) Εξηγείστε γιατί δεν υπάρχουν σημεία τοπικού ή ολικού μεγίστου της f

γ) Δείξτε ότι δεν υπάρχει σημείο ολικού ελαχίστου της f

Λύση:

γ)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = \lim_{x\to-\infty} (x^3+1-3x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1+\frac{1}{x^3}-\frac{3}{x^2}\right) = -\infty$$

Επομένως η f δεν είναι κάτω φραγμένη, άρα δεν υπάρχει σημείο ολικού ελαχίστου

Επιπλέον $\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1+\frac{1}{x^3}-\frac{3}{x^2}\right) = +\infty$

Επομένως η f δεν είναι άνω φραγμένη, άρα δεν υπάρχει σημείο ολικού μεγίστου.

Επειδή το $\mathbb{R}^2$ έχει μόνο εσωτερικά σημεία, τα σημεία τοπικού μεγίστου ή τοπικού ελαχίστου μηδενίζουν το ∇f.

$$\nabla f(x,y) = (\partial_x f(x,y), \partial_y f(x,y)) = (3x^2-3e^y, 3e^{3y}-3xe^y)$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-3e^y=0 \\ 3e^{3y}-3xe^y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^y=x^2 \\ e^{2y}-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^y=e^{4y} \\ x=e^{2y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{3y}=1 \\ x=e^{2y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(1,0).$$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -3e^y \\ -3e^y & 9e^{3y}-3xe^y \end{bmatrix}, \quad Hf(1,0) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 9-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$6>0$

$\det Hf(1,0) = 36-9 = 27>0.$

Άρα η $Hf(1,0)$ είναι θ.ο. Άρα το $(1,0)$ είναι σημείο απόλυτου τοπικού ελαχίστου. Έτσι η f δεν έχει σημεία τοπικού μεγίστου στο $\mathbb{R}^2$.

B4.6

Άσκηση 2.3

Έστω $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ η οποία έχει τον Εσσιανό πίνακα $Hf(x)$ θετικά ημιορισμένο σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι αν $\nabla f(x^*)=0$ για κάποιο $x^* \in \mathbb{R}^n$, τότε το x^* είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f στο $\mathbb{R}^n$.

Λύση: Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ με $x \neq x^*$. Ορίζουμε $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$g(t) = f(x^* + t(x - x^*)) \quad \forall t \in [0,1]$$

Έτσι:

$$f(x) = g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(\xi) \quad \text{για κάποιο } \xi \in (0,1).$$

Επομένως:

$$f(x) = f(x^*) + (\underbrace{\nabla f(x^*)}_{=0}, x - x^*) + \frac{1}{2} \underbrace{(Hf(x^* + \xi(x-x^*))(x-x^*), x-x^*)}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \geq f(x^*).$$

∎

Άσκηση 2.4

B 4.7

Έστω $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ της οποίας ο Εσσιανός πίνακας είναι θετικά ορισμένος σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^n$.

α) Δείξτε ότι υπάρχει το πολύ ένα στοιχείο $x \in \mathbb{R}^2$ τ.ω. $\nabla f(x) = 0$.

<u>Λύση</u>. Έστω $y, z \in \mathbb{R}^n$ με: $y \neq z$ και $\nabla f(y) = 0$ και $\nabla f(z) = 0$.

Έστω $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με: $g(t) = f(y + t(z-y))$ $\forall t \in [0,1]$.

Τότε: $g'(t) = (\nabla f(y + t(z-y)), z-y)$ για κάθε $t \in [0,1]$. Επομένως:

$$g'(0) = (\underbrace{\nabla f(y)}_{=0}, z-y) = 0 \quad \text{και} \quad g'(1) = (\underbrace{\nabla f(z)}_{=0}, z-y) = 0 .$$

Επειδή $f \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ έπεται ότι η g είναι $C^2([0,1]; \mathbb{R})$. Από το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τ.ω. $g''(\xi) = 0 \Leftrightarrow \left(Hf(y + \xi(z-y))\, z-y, z-y\right) = 0 \Leftrightarrow z = y$ επειδή ο πίνακας $Hf(y + \xi(z-y))$ είναι θ.ο. Έτσι καταλήξαμε σε άτοπο. Αυτό σημαίνει ότι το ∇f μηδενίζεται το πολύ σε ένα σημείο του $\mathbb{R}^n$.

B 4.8

β) Δείξτε με κατάλληλο παράδειγμα, ότι η f μπορεί να μην έχει στο $\mathbb{R}^n$ κάποιο ακρότατο, δηλ. κάποιο σημείο τοπικού ελαχίστου ή τοπικού μεγίστου.

Λύση: Έστω $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sum_{i=1}^{n} e^{x_i}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Τότε: $\partial_{x_j} f(x) = e^{x_j}$, $j = 1, \dots, n$.

$$\partial_{x_k x_j} f(x) = \begin{cases} e^{x_j} & , k=j \\ 0 & , k \neq j \end{cases} \quad ; \; k,j = 1, \dots, n.$$

Άρα: $\nabla f(x) = (e^{x_1}, \dots, e^{x_n}) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

που σημαίνει ότι η f δεν έχει σημείο τοπικού ελαχίστου και δεν έχει σημείο τοπικού μεγίστου.

Επιπλέον $Hf(x) = diag(e^{x_1}, \dots, e^{x_n})$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, ο οποίος είναι θ.ο.

(B 4.9

γ) Έστω ότι έχουμε $x^* \in \mathbb{R}^n$ τ.ω. $\nabla f(x^*) = 0$. Τότε: $f(x) > f(x^*)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq x^*$

<u>Λύση</u> Με τον τύπο του Taylor έχουμε

$$f(x) = f(x^*) + \underbrace{\left(\nabla f(x^*), x - x^*\right)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(Hf\left(x^* + \xi(x-x^*)\right)(x-x^*), (x-x^*)\right)}_{\substack{>0 \\ x \neq x^* \\ Hf \text{ θ.ο. στο } \mathbb{R}^n}} \qquad \xi \in (0,1)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) > f(x^*).$$

∎

B. 4.10

Άσκηση 2.5

$$f(x) = e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2} - x_1^4 - x_2^6 - x_3^6 \quad \forall x\in\mathbb{R}^3$$

Δείξτε ότι η συνάρτηση f έχει σημείο ολικού ελαχίστου στο $\mathbb{R}^3$

Λύση: Η ιδέα είναι να εξετάσουμε αν η f είναι coercive.

Παρατηρούμε ότι
$$f(x) = e^{|x|^2} - x_1^4 - x_2^6 - x_3^6 = e^{|x|^2}\left(1 - \frac{x_1^4+x_2^6+x_3^6}{e^{|x|^2}}\right) \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$ ή ισοδύναμα ότι για κάθε $(x^{(m)})_{m=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}^3$ με $\lim\limits_{m\to+\infty}|x^{(m)}| = +\infty$ έχουμε: $\lim\limits_{m\to+\infty} f(x^{(m)}) = +\infty$.

Έστω $(x^{(m)})_{m=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}^3$ και $z_m := \max\{|x_1^{(m)}|, |x_2^{(m)}|, |x_3^{(m)}|\}$ $\forall m\in\mathbb{N}$. Τότε:

$$|x^{(m)}| = \left[|x_1^{(m)}|^2 + |x_2^{(m)}|^2 + |x_3^{(m)}|^2\right]^{1/2} \le \left[3z_m^2\right]^{1/2} \le \sqrt{3}\, z_m \quad \forall m\in\mathbb{N},$$

που σημαίνει ότι: $\lim\limits_{m\to+\infty} z_m = +\infty$. Επιπλέον έχουμε:

$$e^{|x^{(m)}|^2} = e^{(x_1^{(m)})^2+(x_2^{(m)})^2+(x_3^{(m)})^2} \ge e^{z_m^2} \quad \forall m\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^{z_m^2}} \ge \frac{1}{e^{|x^{(m)}|^2}} \quad \forall m\in\mathbb{N}.$$

Επομένως:

$$0 \leq \frac{x_1^{(m)4} + x_2^{(m)6} + x_3^{(m)6}}{e^{|x^{(m)}|^2}} \leq \frac{z_m^4 + 2z_m^6}{e^{z_m^2}} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Επειδή: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4}{e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^2}{2x e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2 \cdot \frac{x}{e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{2x e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x e^{x^2}} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^6}{e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6x^5}{2x e^{x^2}} = 3 \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4}{e^{x^2}} = 0$

Έχουμε: ότι

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{z_m^4 + 2z_m^6}{e^{z_m^2}} = 0 \Rightarrow \lim_{m\to+\infty} \frac{(x_1^{(m)})^4 + (x_2^{(m)})^6 + (x_3^{(m)})^6}{e^{|x^{(m)}|^2}} = 0.$$

Άρα: $\lim\limits_{m\to+\infty} f(x^{(m)}) = \lim\limits_{m\to+\infty} e^{|x^{(m)}|} \left(1 - \lim \frac{(x_1^{(m)})^4 + (x_2^{(m)})^6 + (x_3^{(m)})^6}{e^{|x^{(m)}|^2}}\right) = +\infty\,(1-0) = +\infty.$

Έτσι η f είναι coercive. Έχουμε δείξει ότι αν μια συνάρτηση είναι coercive, τότε έχει ολικό ελάχιστο και αν είναι C^1 τότε μηδενίζει το ∇f.

$\boxtimes$

Άσκηση 2.6

Έστω $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με: $f(x) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1 x_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$

α) Εξετάστε αν η f έχει τοπικό ελάχιστο, τοπικό μέγιστο, ολικό ελάχιστο και ολικό μέγιστο.

β) Εξετάστε αν η f είναι coercive.

Λύση.

α) $\nabla f(x) = (3x_1^2 - x_2, 3x_2^2 - x_1, 3x_3^2)$

$$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3x_1^2 \\ x_1 = 3x_2^2 \\ 3x_3^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2^2 \\ x_2 = 39x_2^4 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2^2 \\ x_3 = 0 \\ x_2(1-27x_2^3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2^2 \\ x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \text{ ή } x_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (0,0,0) \\ \text{ή} \\ x = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0) \end{cases}$$

$$Hf(x) = \begin{bmatrix} 6x_1 & -1 & 0 \\ -1 & 6x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 6x_3 \end{bmatrix}$$

<u>Περ 1</u> $x = (0,0,0)$

Τότε $Hf(x) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ας υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του $Hf(x)$.

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)(\lambda+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda \in \{0, 1, -1\}.$$

Επειδή ο $Hf(0)$ έχει θετική και αρνητική ιδιοτιμή δεν μπορεί να είναι θετικά ημιορισμένος ή αρνητικά ημιορισμένος. Άρα το 0 δεν μπορεί να είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή σημείο τοπικού ελαχίστου.

B4.13

Παρ. 2 . $x = (1/3, 1/3, 0)$.

$$Hf(x) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda \left[(2-\lambda)^2 - 1\right] = 0 \Leftrightarrow \lambda (2-\lambda-1)(2-\lambda+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda (\lambda-1)(\lambda-3) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{0,1,3\} \quad \text{δηλ. } \lambda \geq 0$$

Άρα ο πίνακας $Hf(x)$ είναι θετικά ημιορισμένος. Επομένως υπάρχει ένδειξη ότι το $(1/3, 1/3, 0)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου αλλά δεν είναι σίγουρο. Το $(1/3, 1/3, 0)$ σίγουρα δεν είναι σημείο τοπικού μεγίστου.

Παρατηρώντας ότι: $\lim\limits_{x_1 \to +\infty} f(x_1, 0, 0) = \lim\limits_{x_1 \to +\infty} x_1^3 = +\infty$ και $\lim\limits_{x_1 \to -\infty} f(x_1, 0, 0) = \lim\limits_{x_1 \to -\infty} x_1^3 = -\infty$. Άρα η f δεν είναι άνω φραγμένη και δεν είναι κάτω φραγμένη. Επομένως η f δεν έχει σημείο ολικού μεγίστου και δεν έχει σημείο ολικού ελαχίστου.

B4.14

Ας επιστρέψουμε στο σημείο $x=(1/3, 1/3, 0)$ για να διερευνήσουμε αν είναι σημείο τοπικού ελαχίστου. Ορίζουμε βοηθητική συνάρτηση $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$h(z) = f(1/3, 1/3, z) \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Επομένως:
$$h(z) = \frac{2}{27} + z^3 - \frac{1}{9} \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad h(z) = -1/9 + z^3 \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Άρα όταν $z>0$ τότε $h(z) > -\frac{1}{9} = h(0)$ και όταν $z<0$ τότε $h(z) < -\frac{1}{9} = h(0)$.

Άρα το $(1/3, 1/3, 0)$ δεν μπορεί να είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο $\mathbb{R}^2$

β) Έστω $(x^{(m)})_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^3$ με: $x_j^{(m)} = \begin{cases} -m & j=1 \\ 0 & j=2,3 \end{cases} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$

Άρα: $|x^{(m)}| = m \ \forall m \in \mathbb{N}$ και $f(x^{(m)}) = -m^3 \ \forall m \in \mathbb{N}$. Έτσι: $\lim_{m\to+\infty} f(x^{(m)}) = -\infty$ ενώ $\lim_{m\to+\infty} |x^{(m)}| = +\infty$. Άρα η f δεν μπορεί να είναι coercive.

(B4.15

Άσκηση 2.7

Έστω $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ και συναρτήσεις $f, f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \quad \text{και} \quad f_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} (x_j)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

α) Δείξτε ότι η f δεν είναι coercive

β) Δείξτε ότι η f_ε είναι coercive.

Λύση

β) $f_\varepsilon(x) = \varepsilon |x|^2 + \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow f_\varepsilon(x) = \varepsilon |x|^2 \left[1 + \frac{(a,x)}{|x|^2} \right] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε:

$$0 \leq \frac{|(a,x)|}{|x|^2} \leq \frac{1}{|x|^2} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{1}{|x|^2} |x|\,|a| \leq \frac{|a|}{|x|} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0$$

Επειδή $\lim_{|x| \to +\infty} \frac{|a|}{|x|} = 0$, έπεται ότι $\lim_{|x| \to +\infty} \frac{(a,x)}{|x|^2} = 0$. Άρα:

$$\lim_{|x| \to +\infty} f_\varepsilon(x) = \varepsilon \lim_{|x| \to +\infty} |x|^2 \left(1 + \lim_{|x| \to +\infty} \frac{(a,x)}{|x|^2} \right) = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

Άρα η f_ε είναι coercive.

B4.16

α) Περίπτωση 1: $a=0$

Τότε $f(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$. Άρα η f δεν είναι coercive.

Περίπτωση 2: $a\neq 0$

Τότε υπάρχει $i_0\in\{1,\dots,n\}$ τω $a_{i_0}\neq 0$. Επομένως: $f(x) = a_{i_0}x_{i_0} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} a_j x_j \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$

Διαλέγουμε ακολουθία $(x^{(m)})_{m=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}^n$ με: $x_j^{(m)} = \begin{cases} 0 & j\neq i_0 \\ -m\,a_{i_0}, & j=i_0 \end{cases}, \quad j=1,\dots,n.$

Προφανώς: $|x^{(m)}| = m\,|a_{i_0}| \quad \forall m\in\mathbb{N}$ και επομένως $\lim_{m\to+\infty}|x^{(m)}| = +\infty$.

Ας υποθέσουμε ότι η f είναι coercive. Τότε: $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{m\to+\infty} f(x^{(m)}) = +\infty$.

Όμως: $f(x^{(m)}) = a_{i_0}x_{i_0}^{(m)} = -m(a_{i_0})^2 \xrightarrow[m\to+\infty]{} -\infty$. Άτοπο. Άρα η f δεν είναι coercive.