ΜΕΜ-293 ΘΕΩΡΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ.

Πέμπτη 23/4/2020

5η εξ αποστάσεως διάλεξη

5μμ - 7μμ

(zoom)

version 1.0

# ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \langle c, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ , όπου η $f$ είναι γραμμική

$c \in \mathbb{R}^n$

μη ενδιαφέρουσα περίπτωση!

Προφανώς $\nabla f(x) = c$. Όταν $c=0$ τότε $f(x)=0$. Γι' αυτό ενδιαφερόμαστε μόνο για την περίπτωση $c \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι η $f$ δεν μπορεί να λάβει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή στο εσωτερικό σημείο ενός συνόλου $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Στο γραμμικό προγραμματισμό οι ισοτικοί περιορισμοί $(h_i)_{i=1}^{m}$ και οι ανισοτικοί περιορισμοί $(g_j)_{j=1}^{p}$ είναι γραμμικοί όπου είναι της ακόλουθης μορφής

$$h_i(x) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j - b_i , \quad i=1,\dots,m$$

$$g_j(x) = \sum_{j=1}^{n} B_{ij} x_j - d_j , \quad i=1,\dots,p$$

όπου $S = \{ x \in \mathbb{R}^n : h_i(x)=0, \ i=1,\dots,m, \text{ και } g_j(x) \leq 0, \ j=1,\dots,p \}$

(B 5. 2

Επειδή τα εσωτερικά σημεία του $S$ δεν έχουν σημασία στο πρόβλημα αναζήτησης της μέγιστης ή ελάχιστης τιμής της $f$ και επειδή η $f$ και οι περιορισμοί $(h_i)_{i=1}^{m}$ και $(g_j)_{j=1}^{p}$ είναι γραμμικοί, κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μετατρέπεται στη λεγόμενη "κανονική μορφή" (standard form):

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$h_i(x) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j - b_i = 0 \quad , i = 1, \dots, m$$

$$g_j(x) = -x_j \leq 0 \quad , j = 1, \dots, n$$

$$b_i \geq 0 \quad , i = 1, \dots, m$$

η οποία έχει μία πιο "συμπαγή" διατύπωση ως εξής:

$$\min (c, x)$$

$$Ax = b \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$x \geq 0 \qquad b \in \mathbb{R}^{m}, \text{ με } b \geq 0, \quad c \in \mathbb{R}^{n}$$

δηλ.

$$\min_{x \in S} (c, x)$$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, \ Ax = b\}$$

Προβλήματα αυτής της μορφής προκύπτουν στην πράξη ως προβλήματα μέγιστου κέρδους ή ελάχιστου κόστους.

## Παράδειγμα:

Ένα εργαστήριο ζαχαροπλαστικής παράγει κάθε μέρα δύο γλυκά Α, Β σε πακέτα. Για την παρασκευή κάθε πακέτου γλυκού χρησιμοποιούνται υλικά $Y_1, Y_2, Y_3$ σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

| | A | B |
|---|---|---|
| $Y_1$ | 2 κιλά | 1 κιλό |
| $Y_2$ | 3 κιλά | 8 κιλά |
| $Y_3$ | 0 κιλά | 1 κιλό |

Η διαθεσιμότητα υλικών, ανά ημέρα, είναι:

| | |
|---|---|
| $Y_1$ | 10 κιλά |
| $Y_2$ | 24 κιλά |
| $Y_3$ | 2 κιλά |

και το κέρδος από την πώληση κάθε πακέτου είναι

| A | B |
|---|---|
| 14 ευρώ | 10 ευρώ |

. Το ζητούμενο είναι να προγραμματιστεί η ημερήσια παραγωγή πακέτων για κάθε γλυκό, έτσι ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος, με την υπόθεση ότι η ζήτηση είναι τέτοια ώστε να εξασφαλίζεται η διάθεση όλου του παραγόμενου προϊόντος.

Έστω: $x_1$ η ημερήσια παραγωγή πακέτων γλυκού Α και $x_2$ η ημερήσια παραγωγή πακέτων γλυκού Β.

Τότε η συνάρτηση κέρδους f θα δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = 14 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2$$

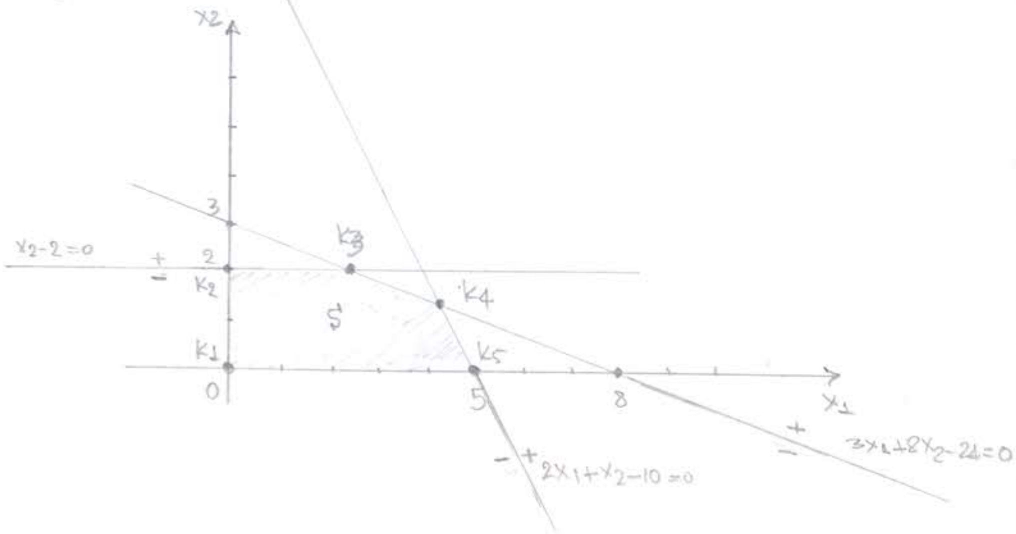
Προφανώς: $\boxed{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0}$ Επιπλέον, οι ποσότητες $x_1, x_2$ περιορίζονται από τα διαθέσιμα υλικά.

Έτσι:

υλικό $Y_1$: $2 \cdot x_1 + x_2 \leq 10$

υλικό $Y_2$: $3 \cdot x_1 + 8x_2 \leq 24$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 - 10 \leq 0 \\ 3x_1 + 8x_2 - 24 \leq 0 \\ x_2 - 2 \leq 0 \end{array}}$

υλικό $Y_3$: $0 \cdot x_1 + x_2 \leq 2$




$$S := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{c} x_1, x_2 \geq 0 \\ x_2 - 2 \leq 0 \\ 2x_1 + x_2 - 10 \leq 0 \\ 3x_1 + 8x_2 - 24 \leq 0 \end{array} \right\}$$

Το S (είναι πεντάπλευρο) έχει κορυφές:

$K_1 = (0,0)$, $K_2 = (0,2)$

$K_3 = (8/3, 2)$, $K_4 = \left(\frac{56}{13}, \frac{18}{13}\right)$

$K_5 = (5,0)$

(B.5.5

Επειδή το $S$ είναι κλειστό και φραγμένο η $f$ έχει σημείο ολικού μεγίστου $x^*$. το οποίο δεν είναι εσωτερικό σημείο του $S$. Άρα: $x^* \in \partial S$. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι το $x^*$ μπορεί να είναι κάποια από τις κορυφές $\{K_1, K_2, K_3, K_4, K_i\}$ του $S$. Ας προσπαθήσουμε να δώσουμε μία εξήγηση.

Επειδή $x^* \in S$, σίγουρα βρίσκεται σε μία πλευρά $K_i K_j$. Αν δεν είναι κάποια


από τις κορυφές $K_i, K_j$ τότε υπάρχει $\theta \in (0,1)$ τ.ω. $x^* = \theta K_i + (1-\theta) K_j$. Επειδή η $f$ είναι γραμμική έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x^*) &= (c, x^*) \\ &= \theta (c, K_i) + (1-\theta)(c, K_j) \\ &= \theta f(K_i) + (1-\theta) f(K_i) \end{aligned}$$

Ξέρουμε ότι $f(K_i) \le f(x^*)$ και $f(K_j) \le f(x^*)$. Όμως, όταν $f(K_i) < f(x^*)$ ή $f(K_j) < f(x^*)$

τότε $f(x^*) < \theta f(x^*) + (1-\theta) f(x^*) = f(x^*)$, δηλ. άτοπο. Άρα $f(K_i) = f(x^*)$ και $f(K_j) = f(x^*)$.

Άρα τα $K_i, K_j$ θα είναι σημεία ολικού μεγίστου.

Έτσι: B 5. 6

$$f(K_1) = 0$$

$$f(K_2) = 20.$$

$$f(K_3) = 14 \cdot \frac{8}{3} + 10 \cdot 2 = 20 + \frac{112}{3} = \frac{172}{3}$$

$$f(K_4) = 14 \cdot \frac{56}{13} + 10 \cdot \frac{18}{13} = \frac{784+180}{13} = \frac{964}{13}$$

Άρα το $K_4$ είναι σημείο ολικού μεγίστου της $f$ στο $S$.

$$f(K_5) = 14 \cdot 5 + 10 \cdot 0 = 14 \cdot 5 = 70.$$

Αν εφαρμόσουμε τις συνθήκες Kuhn–Tucker καταλήγουμε στο σύστημα.

$$\underbrace{\begin{bmatrix}14\\10\end{bmatrix}}_{\nabla f(x)} + \mu_1 \underbrace{\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}}_{\nabla g_1} + \mu_2 \underbrace{\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}}_{\nabla g_2} + \mu_3 \underbrace{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}}_{\nabla g_3} + \mu_4 \underbrace{\begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix}}_{\nabla g_4} + \mu_5 \underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}_{\nabla g_5} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$g_1(x) = -x_1 \le 0$$

$$g_2(x) = -x_2 \le 0$$

$$g_3(x) = 2x_1 + x_2 - 10 \le 0$$

$$g_4(x) = 3x_1 + 8x_2 - 24 \le 0$$

$$g_5(x) = x_2 - 2 \le 0$$

$$\mu_j \, g_j(x) = 0.$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις ως προς το $J(x)$, δηλ. συνολικά $\sum_{\ell=0}^{5} \binom{5}{\ell} - 1 = 2^5 - 1$ περιπτώσεις.

(B.5.7

Πώς μπορούμε να γράψουμε το πρόβλημα σε κανονική μορφή?

1 Ήδη έχουμε $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

2. Προσθέτουμε επιπλέον μεταβλητές $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$ ως εξής:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

$$3x_1 + 8x_2 + x_4 = 24$$

$$x_2 + x_5 = 2$$

Στην ουσία μεγαλώνουμε το χωρίο χωρίς να επηρεάζεται η f

Επίσης έχουμε $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 24 \\ 2 \end{pmatrix} \geq 0.$

## Γενικοί κανόνες μετατροπής σε κανονική μορφή

1. Στις ανισοτικές συνθήκες προσθέτουμε επιπλέον μη αρνητικές μεταβλητές:

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j - b_i \leq 0$$

$$\rightarrow \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j - b_i + x_{n+1} = 0$$

$$x_{n+1} \geq 0$$

2. Αν $b_i < 0$ στην ισοτική συνθήκη, τότε πολ/ζουμε με (-1) δηλ.

$$- \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j - x_{n+1} = -b_i$$

και απορροφούμε την αλλαγή προσήμου στους συντελεστές των συντελεστών του $x$

3. Αν $x_i \in \mathbb{R}$ δηλ. δεν καλύπτεται από κάποιο περιορισμό τότε αντικαθιστούμε:

$$x_i = x_e - x_s$$

με $x_e \geq 0$, $x_s \geq 0$.

(B.5.9

Κάτι άλλο που μπορεί να γίνει είναι απαλοιφή ενός ισοτικού περιορισμού λύνοντας ως προς αυτή τη μεταβλητή π.χ

$$\min \quad \overbrace{x_1+3x_2+4x_3}^{f(x)}$$

υπό:

$$x_1+2x_2+x_3=5 \quad \} \, h_1(x)$$

$$2x_1+3x_2+x_3=6 \quad \} \, h_2(x)$$

$$x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Εδώ $x_1 \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι ο πρώτος ισοτικός περιορισμός δίνει:

$$x_1 = 5-2x_2-x_3$$

και με αντικατάσταση στην $f$ έχουμε:

$$x_1+3x_2+4x_3 = 5-2x_2-x_3+3x_2+4x_3$$
$$= 5+x_2+3x_3$$

και στην $h_2$ έχουμε.

$$2x_1+3x_2+x_3=6 \Leftrightarrow 10-4x_2-2x_3+3x_2+x_3=6$$
$$\Leftrightarrow -x_2-x_3=-4$$
$$\Leftrightarrow x_2+x_3=4$$

Έτσι απαλοίψαμε την μεταβλητή $x_1$ και το πρόβλημα παίρνει τη μορφή

$$\boxed{\begin{array}{l} \min \quad x_2+3x_3 \\ x_2+x_3=4 \\ x_2, x_3 \geq 0 \end{array}}$$

που είναι κανονική.