ΜΕΜ-293 Θεωρία Βελτιστοποίησης

6η εξ αποστάσεως διάλεξη

Δευτέρα 27/4/2020

5μμ-7μμ

(zoom)

version 1

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ενδιαφερόμαστε για την εύρεση του σημείου ολικού ελαχίστου γραμμικής συνάρτησης: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με: $f(x) = (c,x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$,

όπου: $c \in \mathbb{R}^n$ με: $c \neq 0$ κάτω από περιορισμούς της μορφής:

$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

όπου: $b \in \mathbb{R}^n$ με $b \geq 0$ και $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Αυτή είναι η τυπική μορφή του προβλήματος του γραμμικού προγραμματισμού.

Έτσι $\quad \min f(x)$
$\quad x \in S$

όπου: $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b \text{ και } x \geq 0\}$

Σημ. Το S μπορεί να είναι κενό συνεπώς το πρόβλημα δεν είναι καλά τεθημένο. Όταν το S είναι φραγμένο, επειδή επιπλέον είναι κλειστό και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^n$, πάντα υπάρχει σημείο ολικού ελαχίστου. Όταν το S δεν είναι φραγμένο μπορεί η f να μην έχει ολικό ελάχιστο.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Κάθε $x \in S$ καλείται <u>εφικτή λύση</u> και το S <u>σύνολο των εφικτών λύσεων</u>.

Ένα $x \in S$ καλείται <u>βασική εφικτή λύση</u> όταν οι μη μηδενικές συντεταγμένες του x αντιστοιχούν σε γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A. Επιπλέον, το x καλείται <u>μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση</u> όταν έχει ακριβώς m μηδενικές (θετικές) συντεταγμένες και <u>εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση</u> όταν έχει λιγότερες από m μη μηδενικές συντεταγμένες.

Παρατήρηση

Όταν ο πίνακας A έχει στήλες $(a_k)_{k=1}^n$ η σχέση $Ax=b \Leftrightarrow b=\sum_{j=1}^{n} x_j a_j$.

Όταν $x\in S$ είναι βασική εφικτή λύση τότε υπάρχει σύνολο δεικτών $I\subset\{1,\dots,n\}$.

τ.ω (α) $x_j=0$ για καθε $j\notin I$ και (β) $(a_k)_{k\in I}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Έτσι: $b=\sum_{j\in I} x_j a_j$. Όταν $b=0$ τότε αναγκαστικά $x_j=0$ $\forall j\in I$. Άρα δεν

υπάρχει μη μηδενική βασική εφικτή λύση. Σ' αυτή την περίπτωση το $x=0$ θεωρείται

εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση. Τέλος, για να υπάρχει μη εκφυλισμένη βασική εφικτή

λύση είναι απαραίτητο ο A να έχει m γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες δηλ $\operatorname{rank}(A)=m$.

Θεώρημα. (Θεμελιώδες Θεώρημα Γραμμικού Προγραμματισμού)

α) Όταν $S\neq\emptyset$ τότε υπάρχει βασική εφικτή λύση.

β) Όταν η f έχει σημείο ολικού ελαχίστου x^* στο S, τότε η f έχει σημείο ολικού ελαχίστου y^* στο S

που είναι μια βασική εφικτή λύση.

Απόδειξη. Έστω $(a_k)_{k=1}^n \subset \mathbb{R}^m$ οι στήλες του A.

α) Όταν $b=0$ τότε το $x=0$ είναι μια εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση.

Έστω $b\neq 0$. Επειδή $S\neq\emptyset$, υπάρχει: $x\in S$. Επιπλέον, $x\neq 0$. (διότι αν $x=0$ τότε $b=Ax=0$ ενώ $b\neq 0$).

Έστω ότι το x έχει $1\le p\le n$ θετικές συντεταγμένες και $(i_\ell)_{\ell=1}^{p}\subset\{1,\dots,n\}$ οι δείκτες των θετικών συντεταγμένων.

Έτσι: $b=\sum_{\ell=1}^{p} x_{i_\ell} a_{i_\ell}$. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

(B 6.3

<u>Περίπτωση 1</u>: Τα $(a_{il})_{l=1}^{p}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{R}^m$ (επομένως $1 \le p \le m$).

Τότε το x είναι μία βασική εφικτή λύση η οποία είναι εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση όταν $p<m$.

<u>Περίπτωση 2</u>: Τα $(a_{il})_{l=1}^{p}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα στοιχεία του $\mathbb{R}^m$. Τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $(y_{il})_{l=1}^{p}$ τ.ω

$$\sum_{l=1}^{p} y_{il} a_{il} = 0 \quad \text{και} \quad \sum_{l=1}^{p} |y_{il}| \neq 0.$$

Άρα

$$b = \sum_{l=1}^{p} x_{il} a_{il} - \varepsilon \sum_{l=1}^{p} y_{il} a_{il} \qquad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad b = \sum_{l=1}^{p} (x_{il} - \varepsilon y_{il}) a_{il} \qquad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Ορίζουμε διάνυσμα $y \in \mathbb{R}^n$ ως εξής: $y = \sum_{l=1}^{p} y_{il} e_{il}$ όπου $(e_k)_{k=1}^{n}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ και $z^\varepsilon = x - \varepsilon y$ για κάθε $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Ο σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι για κατάλληλη τιμή του ε το z^ε είναι στοιχείο του S με <u>το πολύ</u> $p-1$ μη μηδενικές συντεταγμένες.

<u>Υποπερίπτωση 2.1</u> $y_{il} \le 0$, $l = 1, \dots, p$.

Έτσι $z_i^\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{όταν } i \notin I \\ x_i + \varepsilon |y_i| & \text{όταν } i \in I \end{cases}$ $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$. (Όταν $\varepsilon \geq 0$ τότε $z_i^\varepsilon \ge x_i > 0$ $\forall i \in I$, δηλ. το z^ε έχει p μη μηδενικές συντεταγμένες).

B6.4

Επειδή $\sum_{i\in I}|y_i| \neq 0$, υπάρχει $i_0 \in I$ τέτοιο ώστε $y_{i_0} < 0$. Επομένως το σύνολο:

$\left\{ \frac{x_i}{|y_i|} : i\in I \text{ και } |y_i|>0 \right\}$ είναι μη κενό. Έστω $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$ με: $-\varepsilon_0 = +\min\left\{ \frac{x_i}{|y_i|} : i\in I \text{ και } |y_i|>0 \right\}$

Όταν $i \in I$ και $|y_i|=0$ τότε $z_i^{\varepsilon_0} = x_i + \varepsilon_0|y_i| = x_i > 0$. Όταν $i\in I$ και $|y_i|>0$ τότε:

$z_i^{\varepsilon_0} = x_i + \varepsilon_0|y_i| = |y_i|\left(\frac{x_i}{|y_i|}+\varepsilon_0\right) \geq 0$. Άρα $z^{\varepsilon_0} \geq 0$ και από την (1) έχουμε: $Az^{\varepsilon_0} = b$.

Έτσι $z^{\varepsilon_0} \in S$. Αν $j_0 \in I$ τω $\frac{x_{j_0}}{|y_{j_0}|} = \min\left\{ \frac{x_i}{|y_i|} : i\in I \text{ και } |y_i|>0 \right\}$, τότε $\varepsilon_0 = \frac{x_{j_0}}{|y_{j_0}|}$. Επομένως,

$z_j^{\varepsilon_0} = 0 \ \forall j \notin I$ και $z_{j_0}^{\varepsilon_0} = |y_{j_0}|\left(\frac{x_{j_0}}{|y_{j_0}|}+\varepsilon_0\right) = 0$. Άρα το z^{ε_0} έχει το πολύ $p-1$ μη μηδενικές συντεταγμένες.

Υποπερίπτωση 2 Τουλάχιστον ένα από τα $(y_i)_{i\in I}$ είναι θετικό.

Εδώ διαλέγουμε: $\varepsilon_0 = \min\left\{ \frac{x_i}{y_i} : i \in I \text{ και } y_i > 0 \right\}$.

Άρα $\varepsilon_0 = \frac{x_{l_0}}{y_{l_0}} > 0$ για κάποιο $l_0 \in I$. Έτσι:

$$z^{\varepsilon_0}_i = \begin{cases} 0 & \text{όταν } i \notin I \\ x_{l_0} - \varepsilon_0 y_{l_0} = 0 & \text{όταν } i = l_0 \\ x_i - \varepsilon_0 y_i \geq 0 & \text{όταν } i \in I \setminus \{l_0\} \text{ και } y_i > 0 \\ x_i + \varepsilon_0 |y_i| > 0 & \text{όταν } i \in I \text{ και } y_i \leq 0 \end{cases}, \text{ για } i = 1, \ldots, n.$$

Άρα $z^{\varepsilon_0} \geq 0$ και από την (1) $Az^{\varepsilon_0} = b$. Έτσι: $z^{\varepsilon} \in S$ και έχει το πολύ $p-1$ μη μηδενικές συντεταγμένες.

Αν οι στήλες του A που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές συντεταγμένες του z^{ε_0} είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, τότε το z^{ε_0} είναι μία βασική εφικτή λύση. Αν δεν είναι επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία με το z^{ε_0} στη θέση του x, με σκοπό να καταλήξουμε σε νέο στοιχείο του S με το πολύ $p-2$ μη μηδενικές συντεταγμένες κ.ο.κ. Η διαδικασία τερματίζει αναγκαστικά όταν δώσει εφικτή λύση $\tilde{z}$ με ένα μόνο 1 μη μηδενικό στοιχείο. Τότε η αντίστοιχη στήλη του A είναι μη μηδενική τότε το $\tilde{z}$ θα είναι βασική εφικτή λύση. (Αν η αντίστοιχη στήλη του A είναι μηδενική τότε $A\tilde{z} = 0 = b$ άτοπο).

(B 6.6

β) Τώρα υποθέτουμε ότι υπάρχει $x^* \in S$ τ.ω $f(x^*) = \min_{x\in S} f(x)$.

Αν $x^*=0$ τότε $b=0$ και το x^* είναι μία εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση

Εστω ότι $x^*\neq 0$ και ότι έχει $1\leq p\leq n$ θετικές συντεταγμένες με δείκτες $\{i_\ell\}_{\ell=1}^{p}$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

<u>Περίπτωση β1:</u> Οι στήλες $(a_{i_\ell})_{\ell=1}^{p}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{R}^m$ $(1\leq p\leq m)$

οπότε το x^* είναι μία βασική εφικτή λύση, η οποία είναι εκφυλισμένη όταν $p<m$.

<u>Περίπτωση β2:</u> Οι στήλες $(a_{i_\ell})_{\ell=1}^{p}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα στοιχεία του $\mathbb{R}^m$

Τότε υπάρχουν $(y_{i_\ell})_{\ell=1}^{p}\subset\mathbb{R}$ τ.ω. $\sum_{\ell=1}^{p} y_{i_\ell} a_{i_\ell}=0$ και $\sum_{\ell=1}^{p}|y_{i_\ell}|\neq 0$. Άρα:

$$b=\sum_{\ell=1}^{p}(x^*_{i_\ell}-\varepsilon y_{i_\ell})\, a_{i_\ell} \qquad \forall \varepsilon\in\mathbb{R}.$$

Έστω: $I=\{i_\ell\}_{\ell=1}^{p}$ και $y\in\mathbb{R}^n$ με: $y_i=\begin{cases} y_i & \text{όταν } i\in I\\ 0 & \text{όταν } i\notin I\end{cases}$ $i=1,\dots,n$. Επιπλέον ορίζουμε:

$z^\varepsilon = x-\varepsilon y$ για κάθε $\varepsilon\in\mathbb{R}$. Έτσι: $b=Az^\varepsilon$ $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}$.

Τότε: $z_i^\varepsilon=\begin{cases}0 & \text{όταν } i\notin I\\ x_i^*-\varepsilon y_i \geq x_i^*-|\varepsilon||y_i| & \text{όταν } i\in I\end{cases}$, $i=1,\dots,n$, $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}$

Αν $\hat{\varepsilon}_0 = \min \underbrace{\left\{ \frac{x_i^*}{|y_i|} : i \in I \text{ και } |y_i|>0 \right\}}_{\neq \phi} > 0$, τότε:

επειδή $\sum_{\ell=1}^{p} |y_{i_\ell}| \neq 0$

(B.6…)

$$z_i^{\varepsilon} = \begin{cases} 0 & \text{όταν } i \notin I \\ x_i^* > 0 & \text{όταν } i \in I \text{ και } |y_i| = 0 \text{ και } \varepsilon \in \mathbb{R} \\ |y_i| \left(\frac{x_i^*}{|y_i|} - |\varepsilon| \right) > 0 & \text{όταν } i \in I \text{ και } |y_i| > 0 \text{ και } |\varepsilon| \leq \hat{\varepsilon}_0 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Άρα $Az^{\varepsilon} = b$ και $z^{\varepsilon} \geq 0$ $\forall \varepsilon \in [-\hat{\varepsilon}_0, \hat{\varepsilon}_0]$. Ορίζουμε: $\varphi : [-\hat{\varepsilon}_0, \hat{\varepsilon}_0] \to \mathbb{R}$ με:

$\varphi(\varepsilon) = f(z^{\varepsilon}) = f(x^*) - \varepsilon f(y)$ $\forall \varepsilon \in [-\hat{\varepsilon}_0, \hat{\varepsilon}_0]$. Το $\varepsilon = 0$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου της φ στο $[-\hat{\varepsilon}_0, \hat{\varepsilon}_0]$.

Άρα $\varphi'(0) = 0 \Rightarrow f(y) = 0$. Έτσι: $f(z^{\varepsilon}) = f(x^*)$ $\forall \varepsilon \in [-\hat{\varepsilon}_0, \hat{\varepsilon}_0]$, δηλ. το z^{ε} είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f στο $[-\hat{\varepsilon}_0, \hat{\varepsilon}_0]$. Διαλέγοντας $\varepsilon = \hat{\varepsilon}_0$, έπεται ότι το z^{ε_0} είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f στο S και έχει το πολύ $p-1$ μη μηδενικές συντεταγμένες. Αν είναι βασικές τελειώσαμε. Αν δεν είναι επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία με το z^{ε_0} στη θέση του x^* κοκ.

(Η διαδικασία θα τερματίσει αναγκαστικά όταν το σημείο ολικού ελαχίστου της f στο S θα έχει μία μόνο μη μηδενική συντεταγμένη).

(B 6.8.

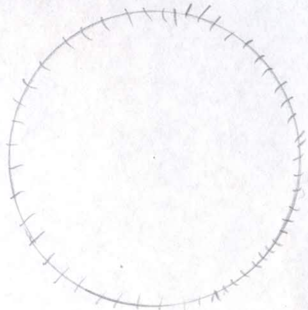
Ορισμός

Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό σύνολο. Ένα σημείο $z \in K$ λέμε ότι είναι ένα ακραίο σημείο του K (extreme point of K) όταν: $z \neq \theta x + (1-\theta) y \quad \forall \theta \in (0,1),\ \forall x, y \in K$ με $x \neq y$.

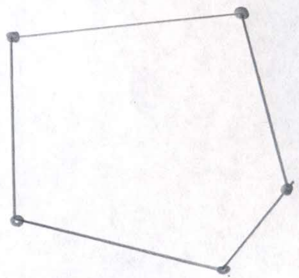
Παρατηρήσεις

1. Ένα ακραίο σημείο δεν μπορεί να γραφεί ως κυρτός συνδυασμός δύο διαφορετικών σημείων του K.

2. Ένα ακραίο σημείο δεν είναι εσωτερικό σημείο του K.

3. 

σε ένα κυκλικό δίσκο ακραία σημεία είναι όλα τα σημεία της περιφέρειας



ακραία σημεία είναι οι κορυφές

Το S' είναι κυρτό σύνολο

④ Θεώρημα:

Ένα διάνυσμα $x \in S'$ είναι ακραίο σημείο του S' ανν x είναι βασική εφικτή λύση του S'.

Απόδειξη

"$\Leftarrow$" Έστω $x \in S'$ βασική εφικτή λύση και $(i_\ell)_{\ell=1}^{p}$ οι δείκτες των θετικών συντεταγμένων. όπου $p \leq m$.

Τότε $b = \sum_{\ell=1}^{p} x_{i_\ell} a_{i_\ell}$ και $(a_{i_\ell})_{\ell=1}^{p}$ γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A.

Έστω ότι: $x = \theta y + (1-\theta) z$ για κάποιο $\theta \in (0,1)$ και $y, z \in S'$ με $y \neq z$. Αν $I = \{i_\ell\}_{\ell=1}^{p}$

τότε: $x_i = 0 \ \forall i \notin I \Rightarrow \underbrace{\theta}_{>0} \underbrace{y_i}_{\geq 0} + \underbrace{(1-\theta)}_{>0} \underbrace{z_i}_{\geq 0} = 0 \ \forall i \notin I \Rightarrow y_i = z_i = 0 \ \forall i \notin I$.

Έτσι: $\sum_{\ell=1}^{p} y_{i_\ell} a_{i_\ell} = b$ και $\sum_{\ell=1}^{p} z_{i_\ell} a_{i_\ell} = b$ καθώς $y, z \in S'$ και επομένως $Ay = b$, $Az = b$

$\Rightarrow \sum_{\ell=1}^{p} (y_{i_\ell} - z_{i_\ell}) a_{i_\ell} = 0 \Rightarrow y_{i_\ell} = z_{i_\ell}, \ \ell = 1, \dots, p$ Άρα $y = z$ άτοπο.

Επομένως το x είναι ακραίο σημείο του S'.

$\Rightarrow$ Έστω x ένα ακραίο σημείο του S. με $(i_\ell)_{\ell=1}^{p}$ οι δείκτες των μη μηδενικών (θετικών) συντεταγμένων.

Τότε: $b = \sum_{\ell=1}^{p} x_{i_\ell} a_{i_\ell}$. Αρκεί να δείξουμε ότι τα $(a_{i_\ell})_{\ell=1}^{p}$ είναι γραμμ. ανεξάρτητα.

Έστω ότι τα $(a_{i_\ell})_{\ell=1}^{p}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Τότε υπάρχουν $(y_{i_\ell})_{\ell=1}^{p} \subset \mathbb{R}$

με $\sum_{\ell=1}^{p} y_{i_\ell} a_{i_\ell} = 0$ και $\sum_{\ell=1}^{p} |y_{i_\ell}| \neq 0$. Ορίζουμε: $y = \sum_{\ell=1}^{p} y_{i_\ell} e_{i_\ell}$. Τότε:

ορίζουμε: $z^{\varepsilon} = x - \varepsilon y \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$. Είδαμε ότι μπορούμε να βρούμε $\hat{\varepsilon}_0 > 0$ τ.ω $z^{\varepsilon} \in S \quad \forall \varepsilon \in [-\hat{\varepsilon}_0, \hat{\varepsilon}_0]$.

Άρα: $x = \frac{1}{2}\underbrace{(x + \hat{\varepsilon}_0 y)}_{z^{\hat{\varepsilon}_0}} + \frac{1}{2}\underbrace{(x - \hat{\varepsilon}_0 y)}_{z^{-\hat{\varepsilon}_0}}$ ενώ $x + \varepsilon_0 y \neq x - \varepsilon_0 y$ διότι $\hat{\varepsilon}_0 y \neq 0$. $\boxed{\text{Άτοπο}}$

<u>Σημ</u> Έστω $b \neq 0$. Τότε το $x = 0$ είναι η μοναδική βασική εφικτή λύση. Επιπλέον το $x = 0$ είναι ακραίο σημείο του S. Με βάση την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος, δεν μπορεί να υπάρχει ακραίο σημείο του S το οποίο να είναι διάφορο του 0.

Πόρισμα: Όταν $S \neq \phi$, τότε το S έχει τουλάχιστον ένα ακραίο σημείο.

Απόδ: Όταν $S \neq \phi$, τότε υπάρχει βασική εφικτή λύση, η οποία είναι ακραίο σημείο.

Πόρισμα: Αν η f έχει ολικό ελάχιστο στο S τότε έχει σημείο ολικού ελαχίστου που είναι ακραίο σημείο του S

Απόδ Δείξαμε ότι αν η f έχει σημείο ολικού ελαχίστου στο S τότε έχει σημείο ολικού ελαχίστου το οποίο είναι βασική εφικτή λύση του S και επομένως ακραίο σημείο του S.

Πόρισμα. Το S έχει πεπερασμένο πλήθος ακραίων σημείων

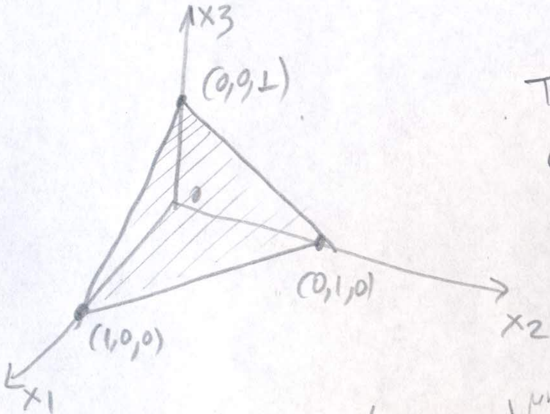
Απόδ Επειδή κάθε ακραίο σημείο του S είναι βασική εφικτή λύση του S μπορούμε να έχουμε το πολύ τόσες βασικές εφικτές λύσεις όσες είναι οι επιλογές γραμμ. ανεξάρτητων στηλών του A. (Αν έχω k γραμμ. ανεξάρτητες στήλες τότε έχει $\binom{k}{\ell}$ επιλογές ℓ γραμμ. ανεξ. στηλών).

Παράδειγμα.

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$$

$m = 1, n = 3$.

$b = 1 \quad A = [1\ 1\ 1] \in \mathbb{R}^{1\times 3}$.



Το S είναι ένα τρίγωνο στο $\mathbb{R}^3$.

Εδώ rank(A) = 1. Άρα κάθε βασική εφικτή λύση x επιτρέπεται να έχει μία μόνο μη θετική συντεταγμένη.

Π1: $x = (0, x_2, 0)$ $x_2 > 0$

Τότε $1 = Ax \Leftrightarrow x_2 = 1$

Π2: $x = (x_1, 0, 0)$ $x_1 > 0$

$Ax = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1$

Π3: $x = (0, 0, x_3)$ $x_3 > 0$

$Ax = 1 \Leftrightarrow x_3 = 1$.

Άρα οι βασικές εφικτές λύσεις είναι τα $X_1 = (1,0,0)$, $X_2 = (0,1,0)$, $X_3 = (0,0,1)$ που είναι οι κορυφές του τριγώνου S.

Παράδειγμα:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{b} \cdot x \geq 0 \right\}$$

$m = 2,\ n = 3$

$b \geq 0,\ A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$

$\text{rank}(A) = 2.$

Άρα κάθε βασική εφικτή λύση έχει το πολύ 2 θετικές συντεταγμένες.

$\Pi 1$ $x = (x_1, x_2, 0)$ $\quad Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -x_2 = 1 \\ x_1 = -2x_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_2 = -1 \\ x_1 = 2 \end{matrix}$

$\Leftrightarrow x = (2, -1, 0) \notin S$

$\Pi 2$ $x = (x_1, 0, x_3)$ $\quad Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 + 1/2 = 1 \\ x_3 = 1/2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = 1/2 \\ x_3 = 1/2 \end{matrix}$. Έτσι: $x = (1/2, 0, 1/2)$

$\Pi 3$: $x = (0, x_2, x_3)$ $\quad Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_2 = 2/3 \\ x_3 = 1/3 \end{matrix}$ Έτσι: $x = (0, 2/3, 1/3)$.

Έτσι βρήκαμε δύο βασικές εφικτές λύσεις:

$$k_1 = (0, 2/3, 1/3),\ k_2 = (1/2, 0, 1/2)$$

οι οποίες είναι μη εκφυλισμένες. ∎