ΜΕΜ-293 Θεωρία Βελτιστοποίησης

Δευτέρα 4/5/2020

8^{η} εξ αποστάσεως
διάλεξη

5μμ-7μμ

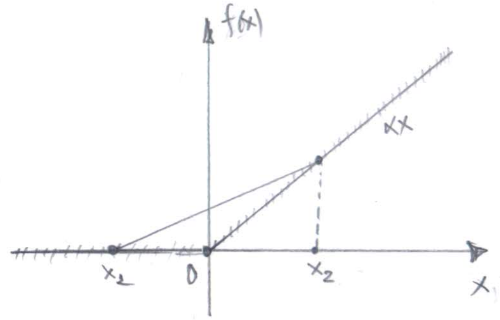
(zoom).

version 1.

Άσκηση 3.1

Β 8.1

α) Έστω $\alpha>0$ και $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με: $f(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ \alpha x, & x>0\end{cases}$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.



Λύση: Έστω: $\lambda\in[0,1]$ και $x_1,x_2\in\mathbb{R}$. Ο σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι:

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

Θα διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: $x_1,x_2>0$

Τότε: $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2>0$. Άρα: $f(x_1)=\alpha x_1$, $f(x_2)=\alpha x_2$ και

$$\begin{aligned}f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)&=\alpha[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\\&=\lambda\alpha x_1+(1-\lambda)\alpha x_2\\&=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).\end{aligned}$$

Περίπτωση 2: $x_1,x_2\leq 0$

Τότε: $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\leq 0$. Άρα: $f(x_1)=f(x_2)=0$ και:

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)=0=\lambda\cdot f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

Περίπτωση 3: $x_1\leq 0$ και $x_2>0$.

Τότε $f(x_1)=0$ και $f(x_2)=\alpha x_2$. Έχουμε δύο υποπεριπτώσεις:

Υποπερίπτωση 3.1: $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\leq 0$.

Τότε: $\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)=(1-\lambda)\alpha x_2\geq 0=f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$.

Υποπερίπτωση 3.2: $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2>0$

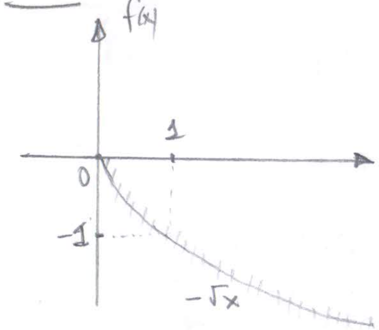
Τότε $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)=\alpha[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]=\underbrace{\alpha\lambda x_1}_{\leq 0}+(1-\lambda)\alpha x_2\leq(1-\lambda)\alpha x_2=(1-\lambda)f(x_2)=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$.

$\square$

B 8.2

γ) Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=-\sqrt{x}$ για κάθε $x\ge 0$. Εξετάστε αν η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$.

Λύση



Εύκολα βλέπουμε ότι:

$$f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}<0 \quad \forall x>0$$

και

$$f''(x)=+\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}>0 \quad \forall x>0.$$

Άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$. Άρα:

$$\forall \lambda\in[0,1], \forall x_1,x_2\in(0,+\infty): \ f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

Μένουν οι ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $x_1,x_2=0$

Τότε: $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2=0$, $f(x_1)=0$, $f(x_2)=0$ και: $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)=0=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$.

Περίπτωση 2: $x_1=0, x_2>0$.

Τότε: $f(x_1)=0$, $f(x_2)=-\sqrt{x_2}$ και $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)=-\sqrt{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}$

$$=-\sqrt{(1-\lambda)x_2}=-\sqrt{1-\lambda}\sqrt{x_2}$$

$$=\sqrt{1-\lambda}\,f(x_2)=\sqrt{1-\lambda}\,f(x_2)+\lambda f(x_1).$$

Επειδή $0\le 1-\lambda\le 1$ έπεται: $\sqrt{1-\lambda}\le 1 \Rightarrow 1-\lambda\le\sqrt{1-\lambda} \underset{f(x_2)<0}{\Longrightarrow} f(x_2)\sqrt{1-\lambda}\le(1-\lambda)f(x_2)$. Συνδυάζοντας

τις τελευταίες δύο σχέσεις έπεται: $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le(1-\lambda)f(x_2)+\lambda f(x_1)$.

Επομένως η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$.

(B 8.3

Άλλη προσέγγιση:

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda) f(x_2) \Leftrightarrow \lambda \underbrace{\sqrt{x_1}}_{\geq 0}+(1-\lambda)\underbrace{\sqrt{x_2}}_{\geq 0} \leq \sqrt{\lambda x_1+(1-\lambda) x_2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 x_1+(1-\lambda)^2 x_2+2\lambda(1-\lambda)\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \leq \lambda x_1+(1-\lambda) x_2$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2-\lambda) x_1+((1-\lambda)^2-(1-\lambda)) x_2+2\lambda(1-\lambda)\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda-1) x_1+(1-\lambda)(1-\lambda-1) x_2+2\lambda(1-\lambda)\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \leq 0$$

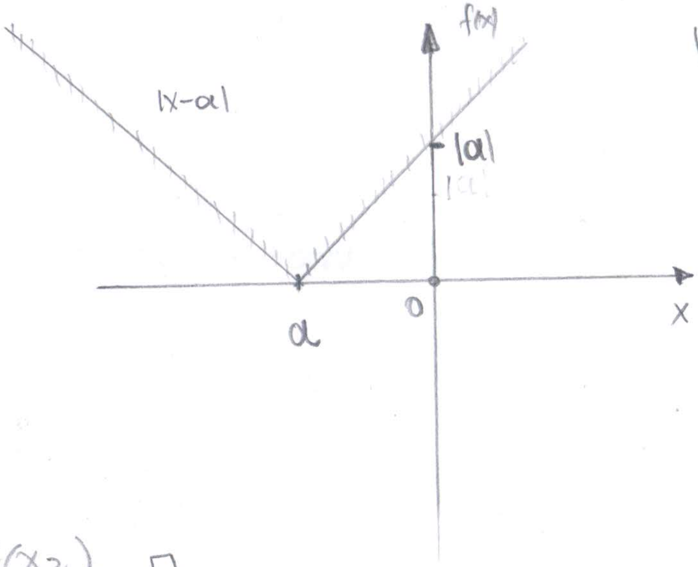
$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda-1) x_1+\lambda(\lambda-1) x_2+2\lambda(1-\lambda)\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(1-\lambda)\left[x_1+x_2-2\sqrt{x_1}\sqrt{_2}\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(1-\lambda)(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2 \geq 0 \quad \text{που ισχύει.}$$

B.8.4

β) Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ και $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=|x-\alpha|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.



Λύση: Έστω $\lambda\in[0,1]$ και $x_1,x_2\in\mathbb{R}$. Τότε έχουμε τα ακόλουθα:

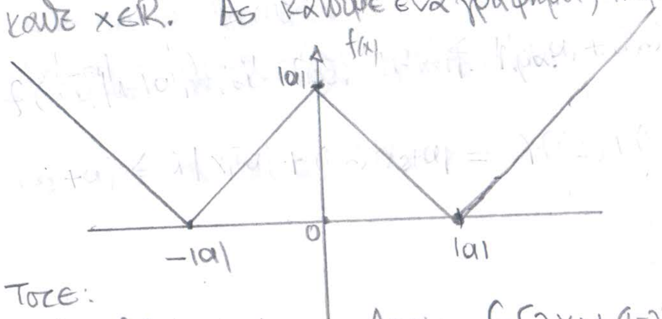
$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)=|\lambda x_1+(1-\lambda)x_2-\alpha|$$
$$=|\lambda x+(1-\lambda)x_2-\lambda\alpha-(1-\lambda)\alpha|$$
$$=|\lambda(x-\alpha)+(1-\lambda)(x_2-\alpha)|$$
$$\leq \lambda|x-\alpha|+(1-\lambda)|x_2-\alpha| = \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2). \quad \square$$

δ) Έστω $\alpha\in\mathbb{R}$ και $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=||x|-\alpha|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Εξετάστε αν η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Λύση: Έστω $\alpha\leq 0$. Τότε: $f(x)=|x|+|\alpha|$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Αν $\lambda\in[0,1]$ και $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, τότε:

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)=|\lambda x_1+(1-\lambda)x_2|+|\alpha| \leq \lambda|x_1|+(1-\lambda)|x_2|+|\alpha| = \lambda(|x_1|+|\alpha|)+(1-\lambda)(|x_2|+|\alpha|)$$
$$\leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$ Άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Έστω $\alpha>0$: Τότε: $f(x)=||x|-|\alpha||$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Ας κάνουμε ένα γράφημα, λαμβάνοντας υπόψιν ότι η f είναι άρτια δηλ. $f(-x)=f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$.



Φαίνεται από το γράφημα ότι δεν είναι κυρτή.

Ας διαλέξουμε: $\lambda=\frac{1}{2}$, $x_1=-|\alpha|$, $x_2=|\alpha|$. Τότε: $f(x_1)=f(x_2)=0$. Επιπλέον, $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)=f(0)=|\alpha|$.

Άρα: $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)=|\alpha|>0=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ $\square$

(B 8.5

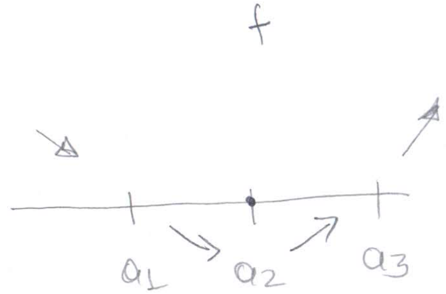
ε) Έστω: $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ με: $a_1 < a_2 < a_3$. Ορίζουμε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x) = |x-a_1| + |x-a_2| + |x-a_3| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Δείξτε ότι η f είναι κυρτή και coercive. Επιπλέον, βρείτε το σημείο ολικού ελαχίστου της f στο $\mathbb{R}$.

<u>Λύση:</u> Εύκολα διαπιστώνουμε ότι:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - a_1 - a_2 - a_3 & \text{όταν } x \geq a_3 \\ x - a_1 + a_3 - a_2 & \text{όταν } a_2 \leq x < a_3 \\ (a_2 - a_1) + a_3 - x & \text{όταν } a_1 \leq x < a_2 \\ a_1 + a_2 + a_3 - 3x & \text{όταν } x < a_1 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



Για $i = 1, 2, 3$, ορίζουμε: $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με: $f_i(x) = |x - a_i|$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Οι συναρτήσεις $(f_i)_{i=1}^{3}$ είναι κυρτές. Επομένως η f είναι κυρτή ως άθροισμα των κυρτών συναρτήσεων διότι $f = \sum_{i=1}^{3} f_i$.

Παρατηρούμε ότι: $f(x) \geq |x - a_3| \geq \big||x| - |a_3|\big| \geq |x| - |a_3|$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Επειδή:
$\lim_{|x|\to+\infty} (|x| - |a_3|) = +\infty$ τότε: $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$. Άρα η f είναι coercive.

Άρα η f έχει σημείο ολικού ελαχίστου στο $\mathbb{R}$. Από τον τύπο της f διαπιστώνουμε ότι αυτή είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, a_2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[a_2, +\infty)$. Άρα το σημείο ολικού ελαχίστου είναι το $x^* = a_2$ όπου: $f(x^*) = f(a_2) = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| = a_3 - a_2 + a_2 - a_1 = a_3 - a_1$. ☒

Β 8.6

Άσκηση 3.2

Έστω: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = x_1^2 + x_2 - 3x_3 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$.

Δείξτε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}^3$ και εξετάστε αν είναι αυστηρά κυρτή στο $\mathbb{R}^3$.

Λύση: Ας υπολογίσουμε την Εσσιανή της f. Έχουμε: $\partial_{x_1} f(x) = 2x_1$, $\partial_{x_2} f(x) = 1$, $\partial_{x_3} f(x) = -3$,
$\partial_{x_1x_1} f(x) = 2$, $\partial_{x_1x_2} f(x) = 0$, $\partial_{x_1x_3} f(x) = 0$, $\partial_{x_2x_2} f(x) = 0$, $\partial_{x_2x_3} f(x) = 0$, $\partial_{x_3x_3} f(x) = 0$. Άρα:

$$JEf(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Προφανώς η JEf είναι θετικά ημιορισμένη στο $\mathbb{R}^3$ άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}^3$.

Επειδή η JEf δεν είναι θ.ο. η f δεν είναι αυστηρά κυρτή. π.χ. αν $x^A = (0,1,0)$ και $x^B = (0,2,0)$

τότε: για κάθε $\lambda \in (0,1)$ έχουμε: $f(\lambda x_A + (1-\lambda) x_B) = f(0, \lambda + 2(1-\lambda), 0) = \lambda + (1-\lambda)2 = \lambda f(x^A) + (1-\lambda) f(x^B)$.

Άσκηση 3.3 (Β 8.7)

α) Έστω συνάρτηση $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ η οποία είναι κυρτή στο $\mathbb{R}^n$ και τ.ω. $g(x) \geq 3 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.
Δ.Ο. η $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με: $f(x) = (g(x)-3)^2 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}^n$.

Λύση: Έστω $\lambda \in [0,1]$ και $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε: $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)$

$$\Rightarrow 0 \leq g(\lambda x + (1-\lambda)y) - 3 \leq \lambda (g(x)-3) + (1-\lambda)(g(y)-3).$$

Η συνάρτηση $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $h(x) = x^2 \ \forall x \in \mathbb{R}$, είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ επειδή: $h''(x) = 2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Άρα:

$$h(\lambda (g(x)-3) + (1-\lambda)(g(y)-3)) \leq \lambda h(g(x)-3) + (1-\lambda) h(g(y)-3)$$

$$\Rightarrow h(\lambda (g(x)-3) + (1-\lambda)(g(y)-3)) \leq \lambda (g(x)-3)^2 + (1-\lambda)(g(y)-3)^2$$

$$\Rightarrow h(\lambda (g(x)-3) + (1-\lambda)(g(y)-3)) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Επειδή η h είναι αύξουσα στο $[0,+\infty)$, έπεται ότι:

$$h(g(\lambda x + (1-\lambda)y) - 3) \leq h(\lambda (g(x)-3) + (1-\lambda)(g(y)-3))$$

$$\Rightarrow (g(\lambda x + (1-\lambda)y) - 3)^2 \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

$$\Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

(B 8.8)

β) Βρείτε συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = (g(x)-3)^3 \ \forall x \in \mathbb{R}$, να μην είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Λύση: Έστω $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με: $g(x) = x+3 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Η g είναι κυρτή. Όμως:

$f(x) = (g(x)-3)^3 = x^3 \ \forall x \in \mathbb{R}$, η οποία δεν είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ επειδή

$f''(x) = 6x \ \forall x \in \mathbb{R}$ και $f''(x) < 0 \ \forall x < 0$.

Άσκηση 3.4 Έστω $(a^{(i)})_{i=1}^{m} \subset \mathbb{R}^n$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους και $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = \sum_{i=1}^{m} |x-a^{(i)}|_1 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, όπου: $|x|_1 = \sum_{j=1}^{m} |x_j|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

α) Δ.Ο. η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και coercive.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι: $f(x) = \sum_{i=1}^{m} |x-a^{(i)}|_1 \geq |x-a^{(1)}|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j - a_j^{(1)}| \geq \sum_{j=1}^{m} \left| |x_j| - |a_j^{(1)}| \right| \geq \sum_{j=1}^{n} |x_j| - \sum_{j=1}^{n} |a_j^{(1)}|$

$\geq |x|_1 - |a^{(1)}|_1 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Επίσης: $|x| = \left[\sum_{j=1}^{m} |x_j|^2\right]^{1/2} \leq \max_{1 \leq j \leq m} |x_j| \left[\sum_{j=1}^{n} 1\right]^{1/2} \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \leq |x|_1 \sqrt{n} \ \forall x \in \mathbb{R}^n$

δηλ. $|x|_1 \geq \frac{1}{\sqrt{n}} |x| \ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Άρα: $f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} |x| - |a^{(1)}|_1 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Άρα $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$ και η f

είναι coercive.

Είναι εύκολο να δούμε ότι: $|x+y|_1 \le |x|_1 + |y|_1 \ \forall x,y \in \mathbb{R}^n$. Επομένως για κάθε $\lambda \in [0,1]$ και $x,y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε:

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) = \sum_{i=1}^{m} |\lambda x+(1-\lambda)y - a^{(i)}|_1 = \sum_{i=1}^{m} |\lambda x+(1-\lambda)y - \lambda a^{(i)} - (1-\lambda)a^{(i)}|_1$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |\lambda(x-a^{(i)}) + (1-\lambda)(y-a^{(i)})|_1 \le \sum_{i=1}^{m}(\lambda |x-a^{(i)}|_1 + (1-\lambda)|y-a^{(i)}|_1)$$

$\le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. Επομένως η f είναι κυρτή. ∎

β) Βρείτε το σημείο τοπικού ελαχίστου της f.

Λύση Επειδή η f είναι coercive έχει σημείο ολικού ελαχίστου. Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}^n$ που είναι κυρτό σύνολο, κάθε σημείο τοπικού ελαχίστου είναι σημείο ολικού ελαχίστου.

(Η ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε τεχνική απάντησης με την άσκηση 3.1(ε) πιο πάνω)

Έχουμε: $f(x) = \sum_{i=1}^{m} |x-a^{(i)}|_1 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |x_j - a_j^{(i)}| = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} |x_j - a_j^{(i)}|\right) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x_j) \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ όπου:

$g_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με: $g_j(t) = \sum_{i=1}^{m} |t - a_j^{(i)}| \ \forall t \in \mathbb{R}, j=1,\dots,n$. Όταν $t \ge \max_{1\le i\le m} a_j^{(i)}$ τότε: $g_j(t) = mt - \sum_{i=1}^{m} a_j^{(i)}$.

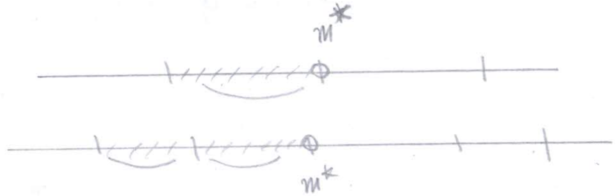
Επίσης: $t \le \min_{1\le i\le m} a_j^{(i)}$ τότε: $g_j(t) = \sum_{i=1}^{m} a_j^{(i)} - mt$. Άρα: η g_j είναι γνησίως αύξουσα για $t \ge \max_{1\le i\le m} a_j^{(i)}$ και γνησίως φθίνουσα για $t \le \min_{1\le i\le m} a_j^{(i)}$. Έστω $(i_\ell)_{\ell=1}^{m} \subset \{1,\dots,m\}$ τ.ω. $a_j^{(i_1)} \le a_j^{(i_2)} \le \dots \le a_j^{(i_m)}$, όπως, με $i_\ell \ne i_{\ell'}$ όταν $\ell \ne \ell'$.

(B.8.10

$\min\limits_{1\le i\le m} a_j^{(i)} = a_j^{(i_1)}$ και $\max\limits_{1\le i\le m} a_j^{(i)} = a_j^{(i_m)}$. Σε κάθε υποδιάστημα $[a_j^{(i_\ell)}, a_j^{(i_{\ell+1})}]$ η g_j είναι γραμμική άρα η ελάχιστη τιμή λαμβάνεται σε κάποιο από τα άκρα $a_j^{(i_\ell)}, a_j^{(i_{\ell+1})}$. Επομένως το σημείο ολικού ελαχίστου της g_j στο $\mathbb{R}$ θα είναι κάποιο από τα $\{a_j^{(i)}\}_{i=1}^{m}$. Το ποιό είναι από αυτά εξαρτάται από το αν το πλήθος m των σημείων είναι περιττός ή άρτιος αριθμός.

Περίπτωση 1. Το m είναι περιττός

Όταν $m=1$ τότε $g_j(t) = |t-a_j^{(1)}|$ $\forall t\in\mathbb{R}$, άρα το $t_j^* = a_j^{(1)}$ είναι το μοναδικό σημείο ολικού ελαχίστου.



Έστω $m\ge 3$ και $m^* = \frac{m+1}{2}$. Όταν $\ell = 1,\dots,m^*-1$, και $t\in[a_j^{(i_\ell)}, a_j^{(i_{\ell+1})}]$ τότε $g_j(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} |t-a_j^{(i_k)}|$

$$= \sum_{k=1}^{\ell} |t-a_j^{(i_k)}| + \sum_{k=\ell+1}^{m} |t-a_j^{(i_k)}| = \sum_{k=1}^{\ell}(t-a_j^{(i_k)}) + \sum_{k=\ell+1}^{m}(a_j^{(i_k)}-t)$$

όροι c_j σταθ. ανεξάρτητοι του t.

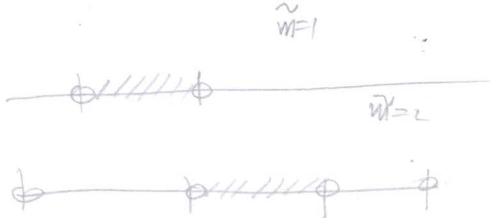
$= c_j + \ell t - (m-\ell)t = c_j + (2\ell-m)t = c_j + 2t(\ell-\frac{m}{2})$. Όμως $\ell - \frac{m}{2} \le m^*-1-\frac{m}{2} = \frac{m+1}{2}-1-\frac{m}{2} = -\frac{1}{2} < 0$

Άρα η g_j είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a_j^{(i_1)}, a^{(i_{m^*})}]$. Όταν $\ell = m^*,\dots,m$ και $t\in[a_j^{(i_\ell)}, a_j^{(i_{\ell+1})}]$ τότε $g_j(t) = \sum\limits_{k=1}^{m}|t-a_j^{(i_k)}| = \hat{c}_j + 2t(\ell-\frac{m}{2})$ και $\ell-\frac{m}{2} \ge \frac{m+1}{2}-\frac{m}{2} = \frac{1}{2} > 0$ άρα η g_j είναι γνησίως αύξουσα στο $[a_j^{(i_{m^*})}, a_j^{(i_m)}]$. Επομένως το σημείο ολικού ελαχίστου είναι το $a_j^{(i_{m^*})}$.

(B 8.11

Περίπτωση 2 m άρτιος (≥ 2).

Άρα: $m = 2\tilde{m}$. $(\tilde{m} \geq 1)$. Δουλεύοντας όπως στην Περίπτωση 1, συμπεραίνουμε ότι η g_j είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a_j^{(i_1)}, a_j^{(i_{\tilde{m}})}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[a_j^{(i_{\tilde{m}+1})}, a_j^{(i_m)}]$. Όταν $t \in [a_j^{(i_{\tilde{m}})}, a_j^{(i_{\tilde{m}+1})}]$ τότε $g_j(t) = -\sum_{l=1}^{\tilde{m}} a_j^{(i_l)} + \sum_{l=\tilde{m}+1}^{m} a_j^{(i_l)}$, δηλ. είναι σταθερή. Επομένως όλα τα στοιχεία του διαστήματος $[a_j^{(i_{\tilde{m}})}, a_j^{(i_{\tilde{m}+1})}]$ είναι σημεία ολικού ελαχίστου της g_j στο $\mathbb{R}$



Για $j=1,\dots,n$, έστω $t_j^* \in \mathbb{R}$ το σημείο ολικού ελαχίστου της g_j στο $\mathbb{R}$. Τότε ορίζουμε:

$$x^* = (t_1^*, \dots, t_n^*) \in \mathbb{R}^n$$

και έχουμε:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x_j) \geq \sum_{j=1}^{n} g_j(t_j^*) = f(x^*).$$

Δηλ. το x^* είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f στο $\mathbb{R}$.

(B.8.12)

Άσκηση 3.5

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x+\frac{1}{x}$ για κάθε $x>0$.

α) Δείξτε ότι το $x^*=1$ είναι σημείο απόλυτου ολικού ελαχίστου της f στο $(0,+\infty)$.

Λύση $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$, $f''(x)=+2x^{-3}>0$

Άρα $\left\{\begin{matrix} f'(x)=0 \\ x\in(0,+\infty)\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x=1$. Επειδή $f''(x)>0$ $\forall x>0$, έπεται ότι το $x^*=1$ είναι σημείο απόλυτου τοπικού ελαχίστου και λόγω της κυρτότητας της f είναι σημείο ολικού ελαχίστου. (Δεν υπάρχει άλλο τοπικό ελάχιστο επειδή το $(0,+\infty)$ είναι ανοικτό η f' μηδενίζεται σε ένα σημείο)

β) Έστω: $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $g(x)=2x_1^2+x_2^2+\frac{1}{(2x_1^2+x_2^2)}$ $\forall x\in\mathbb{R}^2$.

Βρείτε το σημείο ολικού ελαχίστου της g.

Λύση Παρατηρούμε: $g(x)=f(2x_1^2+x_2^2)$ $\forall x\in\mathbb{R}^2$. Όταν $2x_1^2+x_2^2\neq 1$ τότε: $g(x)=f(2x_1^2+x_2^2)>f(1)=2$. Όταν $2x_1^2+x_2^2=1$ τότε: $g(x)=f(1)=2$. Άρα όλα τα σημεία του $S:=\{x\in\mathbb{R}^2: 2x_1^2+x_2^2=1\}$ είναι σημεία ολικού ελαχίστου της g στο $\mathbb{R}^2$.

(B.8.13

γ). Έστω: $h:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$h(x) = \exp(x_1 - x_2 + x_3) + e^{-x_1+x_2-x_3} \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

Βρείτε το σημείο ολικού ελαχίστου της h στο $\mathbb{R}^3$.

<u>Λύση</u>

Παρατηρούμε ότι: $h(x) = f(e^{x_1-x_2+x_3})$ $\forall x \in \mathbb{R}^3$. Άρα η ελάχιστη τιμή λαμβάνεται στο $S := \{x \in \mathbb{R}^3 : e^{x_1-x_2+x_3} = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$

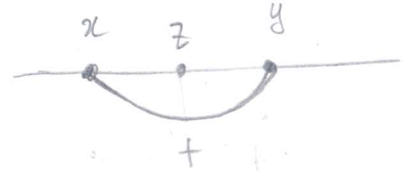
$\boxtimes$

<u>Άσκηση 3.6</u> Έστω $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση αυστηρά κυρτή στο $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}^n$ με: $x \neq y$ και $f(x) = f(y) = 0$. Δ.Ο. υπάρχει $z \in \mathbb{R}^n$ τ.ω. $f(z) < 0$.

<u>Λύση</u>: Επειδή η f είναι αυστηρά κυρτή έχουμε: $f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ $\forall \lambda \in (0,1)$

$\Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) < 0$ $\forall \lambda \in (0,1)$. Π.χ. για $\lambda = \frac{1}{2}$ το $z = \frac{x+y}{2}$ δίνει $f(z) < 0$.

$\boxtimes$



B.8.14

Άσκηση 3.7

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση κυρτή στο $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ και $b \in \mathbb{R}$. Επιπλέον ορίζουμε:

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$g(x) = f(\underbrace{(a,x)}_{\substack{\text{ευκλείδιο} \\ \text{εσωτερικό γινόμενο} \\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j}} + b) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Δ.Ο. η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}^n$

Λύση: Έστω $x, y \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in [0,1]$. Τότε:

$$g(\lambda x + (1-\lambda) y) = f((a, \lambda x + (1-\lambda) y) + b)$$

$$= f(\lambda (a,x) + (1-\lambda)(a,y) + b)$$

$$= f(\lambda [(a,x)+b] + (1-\lambda)[(a,y)+b])$$

$$\leq \lambda f((a,x)+b) + (1-\lambda) f((a,y)+b)$$

$$\leq \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)$$

∎