MEM-293 Θεωρια Βελτιστοποιησης

Εαρινο Εξαμηνο 2020

Φυλλαδιο Ασκησεων 1

Άσκηση 1.1: Δίνονται συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο:

α) $f(x) = x^2 + 2x$,

β) $f(x) = x^2\, e^{-x^2}$,

γ) $f(x) = x + \sin(x)$.

Για κάθε μία από τις παραπάνω συναρτήσεις εξετάστε αν έχουν: τοπικό ελάχιστο, τοπικό μέγιστο, ολικό ελάχιστο, ολικό μέγιστο.

Άσκηση 1.2: Έστω $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 \geq 1, \; x_2 \geq 0\}$ και συνάρτηση $f : D \mapsto \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \quad \forall\, x \in D.$$

Εξετάστε αν η συνάρτηση f έχει: τοπικό ελάχιστο, τοπικό μέγιστο, ολικό ελάχιστο, ολικό μέγιστο.

Άσκηση 1.3: Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ με

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3\,x_1 - 12\,x_2 + 20 \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Εξετάστε αν η συνάρτηση f έχει: τοπικό ελάχιστο, τοπικό μέγιστο, ολικό ελάχιστο, ολικό μέγιστο.

Άσκηση 1.4: Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ με

$$f(x, y, z) = e^x + e^y + e^z + 2\, e^{-(x+y+z)} \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Εξετάστε αν η συνάρτηση f έχει: τοπικό ελάχιστο, τοπικό μέγιστο, ολικό ελάχιστο, ολικό μέγιστο.

Άσκηση 1.5: Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = x^5 - x\, y^6 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Εξετάστε αν η συνάρτηση f έχει: τοπικό ελάχιστο, τοπικό μέγιστο, ολικό ελάχιστο, ολικό μέγιστο.

Άσκηση 1.6: Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = x^2 - 4\,x + 2\,y^2 + 7 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Εξετάστε αν η συνάρτηση f έχει: τοπικό ελάχιστο, τοπικό μέγιστο, ολικό ελάχιστο, ολικό μέγιστο.

Άσκηση 1.7: Έστω $g \in C([0, 1]; \mathbb{R})$ και $F : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}$ με

$$F(\alpha) = \int_0^1 \left(g(t) - \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j\, t^{j-1} \right)^2 \, dt \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $\alpha^* \in \mathbb{R}^{n+1}$ τέτοιο ώστε:

$$F(\alpha^*) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^{n+1}} F(\alpha).$$

Γ.Ζουράρης