# ΜΕΜ-293 Θεωρια Βελτιστοποιησης
## Εαρινο Εξαμηνο 2020
## Φυλλαδιο Ασκησεων 2

**Άσκηση 2.1:** Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x_1^4 + x_2^4 - 32\, x_1^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2.$$

α) Βρείτε σημείο $x \in \mathbb{R}^2$, στο οποίο ο Εσσιανός πίνακας της $f$ να μην είναι θετικά ημιορισμένος και να μην είναι αρνητικά ημιορισμένος.
β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f$ είναι coercive.
γ) Βρείτε τα σημεία στα οποία η $f$ λαμβάνει ολικό ελάχιστο. Υπάρχουν σημεία τοπικού ελαχίστου της $f$;
δ) Δείξτε ότι δεν υπάρχει σημείο στο οποίο η $f$ λαμβάνει ολικό ή τοπικό μέγιστο.

**Άσκηση 2.2:** Έστω $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x, y) := x^3 + e^{3y} - 3\, x\, e^{y} \quad \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

α) Βρείτε τα σημεία τοπικού ελαχίστου της $f$.
β) Εξηγείστε γιατί δεν υπάρχουν σημεία τοπικού ή ολικού μεγίστου της $f$.
γ) Δείξτε ότι δεν υπάρχει σημείο ολικού ελαχίστου της $f$.

**Άσκηση 2.3:** Έστω συνάρτηση $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ της οποίας ο Εσσιανός πίνακας είναι θετικά ημιορισμένος σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι: αν για κάποιο $x^\star \in \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι $\nabla f(x^\star) = 0$, τότε το $x^\star$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου της $f$ στο $\mathbb{R}^n$.

**Άσκηση 2.4:** Έστω συνάρτηση $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ της οποίας ο Εσσιανός πίνακας είναι θετικά ορισμένος σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^n$.
α) Δείξτε ότι το $\nabla f(x)$ έχει το πολύ ένα σημείο μηδενισμού στο $\mathbb{R}^n$.
β) Δείξτε, με ένα κατάλληλο παράδειγμα, ότι η $f$ μπορεί να μην έχει στο $\mathbb{R}^n$ κάποιο ακρότατο δηλ. κάποο σημείο τοπικού ελαχίστου ή τοπικού μεγίστου.
γ) Δείξτε ότι: αν για κάποιο $x^\star \in \mathbb{R}^n$ ισχύει $\nabla f(x^\star) = 0$, τότε το $x^\star$ είναι το μοναδικό σημείο απολύτου ελαχίστου της $f$ στο $\mathbb{R}^n$, δηλ. $f(x) > f(x^\star)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ με $x \neq x^\star$.

**Άσκηση 2.5:** Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2} - x^4 - y^6 - z^6 \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f$ έχει σημείο ολικού ελαχίστου στο $\mathbb{R}^3$.

*Σημείωση: Εξασφαλίστε μόνο την ύπαρξη του ολικού ελαχίστου. Η εύρεσή του σε κλειστή μορφή μπορεί να μην εφικτή.*

**Άσκηση 2.6:** Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ με

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - x\, y \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

α) Εξετάστε αν η συνάρτηση $f$ έχει: τοπικό ελάχιστο, τοπικό μέγιστο, ολικό ελάχιστο, ολικό μέγιστο.
β) Εξετάστε αν η $f$ είναι coercive.

**Άσκηση 2.7:** Έστω $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ και συναρτήσεις $f, f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) := \sum_{j=1}^{n} a_j\, x_j \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

και

$$f_\varepsilon(x) := \sum_{j=1}^{n} a_j\, x_j + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} (x_j)^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f$ δεν είναι coercive.
β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f_\varepsilon$ είναι coercive.

Γ.Ζουράρης