MEM-293 Θεωρια Βελτιστοποιησης
Εαρινο Εξαμηνο 2020
Φυλλαδιο Ασκησεων 3

Άσκηση 3.1:
α) Έστω $a > 0$ και $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ a\,x, & x > 0, \end{cases} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
β) Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ με $f(x) = |x - a|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
γ) Έστω $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ με $f(x) = -\sqrt{x}$ για κάθε $x \geq 0$. Εξετάστε αν η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$.
δ) Έστω $a > 0$ και $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ με $f(x) = ||x| - a|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Εξετάστε αν η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
ε) Έστω $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ με $a_1 < a_2 < a_3$. Ορίζουμε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ με

$$f(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι: η f είναι κυρτή και coercive. Επιπλέον, βρείτε το σημείο ολικού ελαχίστου της f στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 3.2: Έστω $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = (x_1)^2 + x_2 - 3\,x_3 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^3.$$

Δείξτε ότι f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}^3$ και εξετάστε αν είναι αυστηρά κυρτή στο $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 3.3:
α) Έστω συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ η οποία είναι κυρτή στο $\mathbb{R}^n$ και τέτοια ώστε: $g(x) \geq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = (g(x) - 3)^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

είναι κυρτή στο $\mathbb{R}^n$.
β) Βρείτε συνάρτηση $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ η οποία να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = (g(x) - 3)^3 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

να μην είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 3.4: Έστω $(a^{(i)})_{i=1}^m \in \mathbb{R}^n$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, και $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} |x - a^{(i)}|_1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

όπου $|x|_1 := \sum_{j=1}^n |x_j|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.
α) Δείξτε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και coercive.
γ) Βρείτε το σημείο τοπικού ελαχίστου της f.

Άσκηση 3.5: Έστω $f : (0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) := x + \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$.
α) Δείξτε ότι το $x^\star = 1$ είναι σημείο απόλυτου ολικού ελαχίστου της f.
β) Έστω συνάρτηση $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = 2\,x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2\,x_1^2 + x_2^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2.$$

Βρείτε το σημείο ολικού ελαχίστου της g.
γ) Έστω συνάρτηση $h : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x) = \exp(x_1 - x_2 + x_3) + e^{-x_1 + x_2 - x_3} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^3.$$

Βρείτε το σημείο ολικού ελαχίστου της h.
Υπόδειξη. Για τα ερωτήματα (β) και (γ) χρησιμοποιήστε το (α).

Άσκηση 3.6: Έστω $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ μια συνάρτηση αυστηρά κυρτή στο $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}^n$ διαφορετικά μεταξύ τους, τέτοια ώστε: $f(x) = f(y) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $z \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $f(z) < 0$.

Άσκηση 3.7: Έστω $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ μια συνάρτηση κυρτή στο $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ και $b \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο:

$$g(x) = f(\,(a,x) + b\,) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

όπου (a, x) το Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων a και x. Δείξτε ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}^n$.

Γ.Ζουράρης