

Άσκηση 4.1: Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x_1^2 x_2 x_3 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

και ισοτικός περιορισμός $h_1 : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$h_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

α) Εξετάστε ποιά σημεία του συνόλου

$$S := \{x \in \mathbb{R}^3 : h_1(x) = 0\}$$

είναι ομαλά σημεία των ισοτικών περιορισμών.

β) Βρείτε τα σημεία ολικού ελαχίστου, και ολικού μεγίστου της f στο σύνολο S .

Άσκηση 4.2: Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

και ισοτικός περιορισμός $h_1 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$h_1(x) = x_1 x_2 - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

α) Εξετάστε ποιά σημεία του συνόλου

$$S := \{x \in \mathbb{R}^2 : h_1(x) = 0\}$$

είναι ομαλά σημεία των ισοτικών περιορισμών.

β) Βρείτε τα σημεία τοπικού ελαχίστου, ολικού ελαχίστου, τοπικού μεγίστου και ολικού μεγίστου της f στο σύνολο S .

Άσκηση 4.3: Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

και ισοτικοί περιορισμοί $h_1, h_2 : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$h_1(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 20 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

$$h_2(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 9 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

α) Εξετάστε ποιά σημεία του συνόλου

$$S := \{x \in \mathbb{R}^3 : h_1(x) = 0 \text{ και } h_2(x) = 0\}$$

είναι ομαλά σημεία των ισοτικών περιορισμών.

β) Βρείτε τα σημεία τοπικού ελαχίστου, ολικού ελαχίστου, τοπικού μεγίστου και ολικού μεγίστου της f στο σύνολο S .

Άσκηση 4.4: Διατυπώνοντας και μελετώντας κατάλληλο πρόβλημα εύρεσης ελαχίστου μιας συνάρτησης

α) Βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου $(0, 3)$ από την παραβολή $y = x^2$.

β) Βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου $(2, 1, 1)$ από το επίπεδο $x + y + z = 1$.

Άσκηση 4.5: Έστω $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x_1^2 x_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

και ισοτικός περιορισμός $h_1 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$h_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 6 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

α) Εξετάστε ποιά σημεία του συνόλου

$$S := \{x \in \mathbb{R}^2 : h_1(x) = 0\}$$

είναι ομαλά σημεία των ισοτικών περιορισμών.

β) Βρείτε τα σημεία τοπικού ελαχίστου, ολικού ελαχίστου, τοπικού μεγίστου και ολικού μεγίστου της f στο σύνολο S .

Άσκηση 4.6: Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = -\frac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

και περιορισμοί $h_1, h_2 : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$h_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

$$h_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

α) Εξετάστε ποιά σημεία του συνόλου

$$S := \{x \in \mathbb{R}^3 : h_1(x) = 0 \text{ και } h_2(x) = 0\}$$

είναι ομαλά σημεία των ισοτικών περιορισμών.

Βρείτε τα σημεία ολικού ελαχίστου και ολικού μεγίστου της f στο σύνολο S .

Άσκηση 4.7: Έστω συμμετρικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x^T A x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

και ισοτικός περιορισμός $h_1 : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$h_1(x) = |x|^2 - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

α) Εξετάστε ποιά σημεία του συνόλου

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n : h_1(x) = 0\}$$

είναι ομαλά σημεία των ισοτικών περιορισμών.

β) Βρείτε τα σημεία ολικού ελαχίστου και ολικού μεγίστου της f στο σύνολο S .

Γ. Ζουράρης