

Άσκηση 5.1

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x_1^2 + x_2^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$, και ανισοτικός περιορισμός $g_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $g_1(x) = -x_1 - x_2 - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$. Επιπλέον ορίζουμε το σύνολο

$$S := \{x \in \mathbb{R}^2 : g_1(x) \leq 0\}.$$

- Βρείτε ποιά σημεία του S είναι ομαλά σημεία των περιορισμών.
- Βρείτε τα σημεία τοπικού ελαχίστου της f στο S .

Άσκηση 5.2

Έστω $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + 4x_3^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$, και ανισοτικοί περιορισμοί

$$g_1, g_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπους } g_1(x) = x_1 + x_2 + 2x_3 - 18 \text{ και } g_2(x) = 4 - 2x_1 - x_3 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Επιπλέον, ορίζουμε σύνολο $S := \{x \in \mathbb{R}^3 : g_1(x) \leq 0 \text{ και } g_2(x) \leq 0\}$.

- Βρείτε ποιά σημεία του S είναι ομαλά σημεία των περιορισμών.
- Βρείτε τα σημεία τοπικού ελαχίστου και ολικού ελαχίστου της f στο S .

Άσκηση 5.3

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x_1 + x_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$ και

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \leq 4, x_1 - x_2 \geq -2, x_2 \geq 0\}.$$

- Βρείτε ποιά σημεία του S είναι ομαλά σημεία των περιορισμών.
- Βρείτε τα σημεία τοπικού ελαχίστου και ολικού ελαχίστου της f στο S .

Άσκηση 5.4.

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με: $f(x) = -6x_1 - 3x_2 + x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_2^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$
 και $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 3, 4x_1 + x_2 \leq 9, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$. Εξετάστε αν η f έχει
 στο S σημεία τοπικών ελαχίστων και ολικών μεγίστων.

Άσκηση 5.5

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με: $f(x) = -x_1^2 - x_2^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$ και:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 0 \text{ και } x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

Βρείτε τα σημεία τοπικών ελαχίστων και ολικών ελαχίστων της f στο S .

Άσκηση 5.6

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με: $f(x) = x_1^2 + x_2^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$, και

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 2)^2 - x_2^2 = 0\}.$$

Προσπαθήστε να βρείτε τη λύση του προβλήματος: $\min_{x \in S} f(x)$.

Γ. Ζουράρης