Φυλλάδιο 6

Άσκηση 6.1

Έστω: $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$ και $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Στη συνέχεια ορίζουμε τα σύνολα:

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b \text{ και } x \geq 0\} \text{ και } D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : Ax + y = b,\ x \geq 0 \text{ και } y \geq 0\}.$$

Επιπλέον ορίζουμε τις συναρτήσεις: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $f(x) = (c, x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ και $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ με $d(x,y) = f(x)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Αν υπάρχουν $x^* \in S$ και $(z^*, w^*) \in D$ τέτοια ώστε:

$$f(x^*) = \min_{x \in S} f(x) \quad \text{και} \quad d(z^*, w^*) = \min_{(x,y) \in D} d(x,y),$$ δείξτε ότι: $f(x^*) = f(z^*)$.

Άσκηση 6.2

Δίνεται το ακόλουθο πρόβλημα ελαχιστοποίησης:

$$\begin{aligned} \min\ & -x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

α) Σχεδιάστε την εφικτή περιοχή δηλ το σύνολο $S := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 4,\ 2x_1 - x_2 \geq 2,\ x \geq 0\}$

β) Με βάση το σχήμα βρείτε μία λύση του προβλήματος.

γ) Γράψτε το πρόβλημα σε κανονική μορφή και βρείτε τα ακραία σημεία του αντίστοιχου εφικτού συνόλου.

Άσκηση 6.3.

Δίνεται το ακόλουθο πρόβλημα ελαχιστοποίησης:

$$\begin{aligned} \min\ & 0.4x_1 + 0.5x_2 \\ & 0.03x_1 + 0.01x_2 \geq 3 \\ & 0.01x_1 + 0.02x_2 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

α) Σχεδιάστε την εφικτή περιοχή

β) Με βάση το σχήμα βρείτε μια λύση του προβλήματος

γ) Γράψτε το πρόβλημα στην κανονική μορφή και βρείτε τα ακραία σημεία του αντίστοιχου εφικτού συνόλου.

Άσκηση 6.4

Έστω.

$$S := \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 7x_4 = 3 \end{array} , x \geq 0 \right\}$$

α) Βρείτε όλες τις δυνατές βάσεις στηλών του $\mathbb{R}^2$

β) Βρείτε όλες τις βασικές εφικτές λύσεις

γ) Υπάρχουν εφικτές λύσεις που δεν είναι βασικές;

δ) Είναι το S φραγμένο σύνολο;

Άσκηση 6.5

Έστω $c \in \mathbb{R}^n$ με $c \neq 0$, $b \in \mathbb{R}^n$ με $b \geq 0$ και $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Διατυπώνουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης : $\min\limits_{x \in S} c(x)$ όπου $S := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$

Δείξτε ότι αν $S \neq \emptyset$ και υπάρχει $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ τ.ω. $A_{i_0 j} > 0$ για $j = 1, \dots, n$, τότε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης έχει λύση.

Άσκηση 6.6

Δίνεται το ακόλουθο σύνολο περιορισμών:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

Βρείτε τα ακραία σημεία του συνόλου των σημείων $x \in \mathbb{R}^4$ που ικανοποιούν τους περιορισμούς.