MEM-254 Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα
Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Φυλλάδιο Ασκήσεων 1

Άσκηση 1.1: Έστω $n \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ και $\|\cdot\|_2$ νόρμες του $\mathbb{C}^n$ με $\|x\|_1 := \sum_{j=1}^n |x_j|$, $\|x\|_2 := (\sum_{j=1}^n |x_j|^2)^{1/2}$ και $\|x\|_\infty := \max_{1\le j\le n} |x_j|$ για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$. Βρείτε τις βέλτιστες σταθερές $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ για τις οποίες:

$$c_1 \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le c_2 \|x\|_1,$$
$$c_3 \|x\|_1 \le \|x\|_\infty \le c_4 \|x\|_1,$$
$$c_5 \|x\|_2 \le \|x\|_\infty \le c_6 \|x\|_2$$

για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$.

Άσκηση 1.2: Έστω $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας, $\|\cdot\|$ μία νόρμα στο $\mathbb{C}^n$, και $\|\cdot\|_A : \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$ με

$$\|x\|_A := \|Ax\| \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n.$$

Δείξτε ότι η απεικόνιση $\|\cdot\|_A$ είναι μία νόρμα στο $\mathbb{C}^n$.

Άσκηση 1.3: Έστω $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ πίνακας Ερμιτιανός και θετικά ορισμένος, και $\|\cdot\|_A : \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$ με

$$\|x\|_A := \sqrt{(Ax, x)_2} \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n,$$

όπου $(\cdot,\cdot)_2$ είναι το Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{C}^n$, δηλ. $(y, z)_2 := \sum_{j=1}^n y_j\, \overline{z}_j$ για κάθε $y,\ z \in \mathbb{C}^n$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\|\cdot\|_A$ είναι καλά ορισμένη και είναι μία νόρμα στο $\mathbb{C}^n$.

Άσκηση 1.4: Έστω $n \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_\infty$ νόρμες του $\mathbb{C}^n$ με $\|x\|_1 := \sum_{j=1}^n |x_j|$ και $\|x\|_\infty := \max_{1\le j\le n} |x_j|$ για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$. Ορίζουμε την απεικόνιση $\upsilon : \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$ με

$$\upsilon(x) := \left(\|x\|_\infty^2 + \|x\|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n.$$

Δείξτε ότι η υ είναι μια νόρμα στο $\mathbb{C}^n$.

Άσκηση 1.5: Έστω $n \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|$ μία νόρμα στο $\mathbb{C}^n$, $(x^{(n)})_{n=1}^\infty$ μια ακολουθία διανυσμάτων του $\mathbb{C}^n$ και $x \in \mathbb{C}^n$ τέτοιο ώστε $\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)} - x\| = 0$. Δείξτε ότι για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$ ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i$.

Άσκηση 1.6: Έστω $n \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|$ μία νόρμα στο $\mathbb{C}^n$, $(x^{(n)})_{n=1}^\infty$ μια ακολουθία διανυσμάτων του $\mathbb{C}^n$ και $x \in \mathbb{C}^n$ τέτοιο ώστε $\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)} - x\| = 0$. Δείξτε ότι: α) για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$ ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i$, και β) $\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)}\| = \|x\|$.

Άσκηση 1.7: Έστω $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $(\mathbb{K}, X, (\cdot,\cdot))$ ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $\|\cdot\|$ η παραγόμενη από το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$ νόρμα, και Y_A, Y_B δύο διανυσματικοί υπόχωροι του X με $Y_A \subset Y_B$. Έστω $x \in X$, x_A^* η βέλτιστη προσέγγιση του x από τον Y_A ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$ και x_B^* η βέλτιστη προσέγγιση του x από τον Y_B ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$. Δείξτε ότι το x_A^* είναι η βέλτιστη προσέγγιση του x_B^* από τον Y_A ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$.

Άσκηση 1.8: Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ πίνακας συμμετρικός του οποίου τα διαγώνια στοιχεία είναι πραγματικοί αριθμοί. Δείξτε ότι $(A\,z, z)_2 \in \mathbb{R}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}^n$ και $(\upsilon, w)_2 := \sum_{j=1}^n \upsilon_j\, \overline{w}_j$ για κάθε $\upsilon, w \in \mathbb{C}^n$.

Άσκηση 1.9: Έστω $n \in \mathbb{N}$ με $n \ge 2$, $x \in \mathbb{R}^n$ με $x_k = 1$ για $k = 1, \dots, n$, και $\upsilon, w \in \mathbb{R}^n$ με $\upsilon_k := \frac{1+(-1)^k}{2}$ και $w_k := \frac{1+(-1)^{k+1}}{2}$ για $k = 1, \dots, n$. Δείξτε ότι τα διανύσματα υ, w είναι ορθογώνια μεταξύ τους ως προς το Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$, και βρείτε τη βέλτιση προσέγγιση του x από τον υπόχωρο που παράγεται από τα υ, w, ως προς την Ευκλείδια νόρμα.

Άσκηση 1.10: Έστω $n \in \mathbb{N}$ με $n \ge 2$, και απεικόνιση $< \cdot,\cdot >: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ με

$$< x, y >:= x_1\, \overline{y_j} + \sum_{j=2}^n (x_j - x_{j-1})\, \overline{(y_j - y_{j-1})} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{C}^n.$$

α) Δείξτε ότι η απεικόνιση $< \cdot,\cdot >$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{C}^n$.
β) Έστω $n = 3$, $x = (1, 2, 1)^T$, $\upsilon_1 = (i, 0, 1)^T$ και $\upsilon_2 = (0, 1, 1)^T$. Βρείτε τη βέλτιστη προσέγγιση του x από τον υπόχωρο $Y = \mathrm{span}\{\upsilon_1, \upsilon_2\} \subset \mathbb{C}^3$ ως προς τη νόρμα που παράγεται απο το εσωτερικό γινόμενο $< \cdot,\cdot >$.

Γ.Ζουράρης