

Άσκηση 2.1: Έστω $n \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_\infty$ νόρμες του $\mathbb{C}^n$ με $\|x\|_1 := \sum_{j=1}^n |x_j|$ και $\|x\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$ για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$, και $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_\infty$ οι φυσικές νόρμες πινάκων του $\mathbb{C}^{n \times n}$ οι οποίες παράγονται, αντίστοιχα, από τις νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_\infty$. Βρείτε θετικές σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε:

$$c_1 \|A\|_1 \leq \|A\|_\infty \leq c_2 \|A\|_1, \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

και εξετάστε αν οι σταθερές που βρήκατε είναι βέλτιστες. Επιπλέον, δείξτε ότι:

$$\|A\|_\infty = \|A^T\|_1 = \|A^*\|_1, \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Άσκηση 2.2: Έστω $n \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|_F$ η νόρμα Frobenius του $\mathbb{C}^{n \times n}$, δηλ. $\|A\|_F := (\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n |A_{k,j}|^2)^{\frac{1}{2}}$ για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\|\cdot\|_2$ η φυσική νόρμα πινάκων του $\mathbb{C}^{n \times n}$ η οποία παράγεται από την Ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|_2$ του $\mathbb{C}^n$. Δείξτε ότι

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_2, \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι η νόρμα Frobenius ενός πίνακα είναι η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των Ευκλείδειων νορμών των στηλών του πίνακα.

Άσκηση 2.3: Έστω $n \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|_1$ η φυσική νόρμα πινάκων του $\mathbb{C}^{n \times n}$ η οποία παράγεται από τη νόρμα $\|\cdot\|_1$ του $\mathbb{C}^n$, και $\|\cdot\|_\infty$ η φυσική νόρμα πινάκων του $\mathbb{C}^{n \times n}$ η οποία παράγεται από τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ του $\mathbb{C}^n$, όπου με $\|x\|_1 := \sum_{j=1}^n |x_j|$ και $\|x\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$ για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$. Υπολογίστε τις νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_\infty$ των ακόλουθων πινάκων:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1+i \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & i & -4 & 2 \\ 3 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 1+2i & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.4: Έστω $n \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|_2$ η Ευκλείδεια νόρμα του $\mathbb{C}^n$ με $\|x\|_2 := (\sum_{j=1}^n |x_j|^2)^{\frac{1}{2}}$ και $\|\cdot\|_2$ η φυσική νόρμα του $\mathbb{C}^{n \times n}$ η οποία παράγεται από την $\|\cdot\|_2$. Υπολογίστε τη νόρμα $\|\cdot\|_2$ των ακόλουθων πινάκων:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ -1 & 5i \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.5: Έστω $n \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|$ μία νόρμα στο $\mathbb{C}^n$, και $(\cdot, \cdot)_2$ το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{C}^n$, δηλ. $(x, y)_2 := \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}$ για κάθε $x, y \in \mathbb{C}^n$. Στη συνέχεια ορίζουμε την απεικόνιση $f: \mathbb{C}^n \rightarrow [0, +\infty)$ ως εξής:

$$f(x) := \sup_{z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{|(x, z)_2|}{\|z\|} \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

α) Δείξτε ότι η απεικόνιση f είναι καλά ορισμένη.

β) Εξετάστε αν η απεικόνιση f είναι μια νόρμα στο $\mathbb{C}^n$.

Άσκηση 2.6: Έστω $n \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_\infty$ νόρμες του $\mathbb{C}^n$ με $\|x\|_1 := \sum_{j=1}^n |x_j|$ και $\|x\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$ για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$, και $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_\infty$ οι φυσικές νόρμες πινάκων του $\mathbb{C}^{n \times n}$ οι οποίες παράγονται, αντίστοιχα, από τις νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_\infty$. Βρείτε το δείκτη κατάστασης του ακόλουθου πίνακα

$$A := \begin{bmatrix} 100 & 1+i \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2.7: Έστω $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας και $\|\cdot\|$ μια φυσική νόρμα πινάκων του $\mathbb{C}^{n \times n}$. Δείξτε ότι για κάθε μη αντιστρέψιμο πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ισχύει ότι:

$$\|A^{-1}\| \|A - B\| \geq 1$$

και συμπεράνετε ότι:

$$\text{cond}(A) \geq \frac{\|A\|}{\|A-B\|}$$

όπου $\text{cond}(A)$ ο δείκτης κατάστασης του πίνακα A ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$.

Άσκηση 2.8: Έστω $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ένας Ερμιτιανός πίνακας, $\rho(A)$ η φασματική ακτίνα του πίνακα A και $\|\cdot\|_2$ η φυσική νόρμα πινάκων του $\mathbb{C}^{n \times n}$ που παράγεται από την Ευκλείδια νόρμα του $\mathbb{C}^n$. Δείξτε ότι: α) $\rho(A^2) = (\rho(A))^2$ και β) $\|A\|_2 = \rho(A)$. Αν επιπλέον ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος τότε δείξτε ότι:

$$\text{cond}(A) := \frac{\max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|}{\min_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|},$$

όπου $(\lambda_k)_{k=1}^n$ οι ιδιοτιμές του πίνακα A και $\text{cond}(A)$ ο δείκτης κατάστασης του πίνακα A ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$.

Άσκηση 2.9: Έστω $n \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|$ μία νόρμα του $\mathbb{C}^{n \times n}$ και $\|\cdot\|$ η φυσική νόρμα πινάκων του $\mathbb{C}^{n \times n}$ η οποία παράγεται από την $\|\cdot\|$. Έστω αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{C}^n$, $x^* \in \mathbb{C}^n$ με $Ax^* = b$ και $z \in \mathbb{C}^n$ μια προσέγγιση του x^* . Δείξτε ότι:

$$\frac{\|z - x^*\|}{\|x^*\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

όπου $r := Az - b$ το υπόλοιπο που αντιστοιχεί στην προσέγγιση z και $\text{cond}(A) := \|A\| \|A^{-1}\|$. Τι συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε σχετικά με τον τρόπο εκτίμησης του σφάλματος προσέγγισης;

Άσκηση 2.10: Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\|\cdot\|_\infty$ η φυσική νόρμα πινάκων του $\mathbb{C}^{n \times n}$ η οποία παράγεται από τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ του $\mathbb{C}^n$. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ένας αντιστρέψιμος διαγώνιος πίνακας. Δείξτε ότι:

$$\text{cond}(A) := \frac{\max_{1 \leq k \leq n} |A_{k,k}|}{\min_{1 \leq k \leq n} |A_{k,k}|}.$$

Γ.Ζουράρης