

Άσκηση 3.1. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ένας μη αντιστρέψιμος πίνακας και $A = M - N$ για κάποιους πίνακες $M, N \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Δείξτε ότι: αν ο πίνακας M είναι αντιστρέψιμος, τότε $\rho(M^{-1}N) \geq 1$.

Άσκηση 3.2.

α) Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ ο οποίος είναι αυτοσυζυγής και θετικά ορισμένος. Δείξτε ότι η επαναληπτική μέθοδος του Jacobi συγκλίνει.

β) Δείξτε ότι ο συμμετρικός πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

είναι θετικά ορισμένος, και ότι η μέθοδος του Jacobi αποκλίνει.

Άσκηση 3.3. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{7}{2} \\ 1 & 1 & \frac{7}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Δείξτε ότι για τον παραπάνω πίνακα η μέθοδος Jacobi συγκλίνει ενώ η μέθοδος Gauss-Seidel αποκλίνει.

Άσκηση 3.4. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Δείξτε ότι για τον παραπάνω πίνακα η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει ενώ η μέθοδος Jacobi αποκλίνει.

Άσκηση 3.5: Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ για τον οποίο ο A^T έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο. Σ αυτή την περίπτωση λέμε ότι: ο πίνακας A έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο κατά στήλες.

α) Δείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος με μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία.

β) Δείξτε ότι η επαναληπτική μέθοδος του Jacobi συγκλίνει.

Άσκηση 3.6: Έστω πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

ο οποίος έχει αυστηρά κυριαρχημένη διαγώνιο και επομένως η μέθοδος Jacobi συγκλίνει. Έστω $b = (1, 1, 1)^T$ και $x^* \in \mathbb{R}^3$ η λύση του γραμμικού συστήματος $Ax = b$. Επιπλέον, έστω $(x^{(m)})_{m=0}^\infty$ οι προσεγγίσεις που παράγονται από τη μέθοδο Jacobi με αρχική τιμή $x^{(0)} = 0$, και $e^{(m)} = x^{(m)} - x^*$ για κάθε $m \in \mathbb{N}_0$. Χωρίς να υπολογίσετε τη φασματική ακτίνα του πίνακα A και χωρίς να υπολογίσετε την λύση x^* , βρείτε $m_0 \in \mathbb{N}_0$ τέτοια ώστε $\|x^{(m)} - x^*\|_\infty < 10^{-3}$ για κάθε $m \geq m_0$.

Γ.Ζουράρης