ΜΕΜ-254 Αριθμητική Γραμμική λγεβρα
Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Φυλλάδιο Ασκήσεων 4

Άσκηση 4.1. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ένας αυτοσυζυγής και θετικά ορισμένος πίνακας. Υπολογίστε την ορίζουσα $\det(A)$ του πίνακα A χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της ανάλυσης Cholesky του A.

Άσκηση 4.2. Έστω πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ οι οποίοι είναι αυτοσυζυγεις και θετικά ορισμένοι. Με ποιό τρόπο θα υπολογίζατε τη λύση του γραμμικού συστήματος $A\,B\,x = b$, όπου $b \in \mathbb{C}^n$;

Άσκηση 4.3. Δίνεται ο συμμετρικός πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Εφαρμόστε τον αλγόριθμο της ανάλυσης Cholesky. Τι συμπέρασμα βγάζετε;

Άσκηση 4.4. Έστω $u \in \mathbb{R}^n$ με $\|u\|_2 = 1$ και I_r ο $r \times r$ μοναδιαίος πίνακας για οποιοδήποτε $r \in \mathbb{N}$. Στη συνέχεια ορίζουμε πίνακα $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $U := I_n - 2\,u\,u^T$, και πίνακα $W \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ με

$$W = \left[\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline 0 & U \end{array}\right].$$

Δείξτε ότι υπάρχει $w \in \mathbb{R}^{n+m}$ με $\|w\|_2 = 1$, τέτοιο ώστε $w = I_{n+m} - 2\,w\,w^T$.

Άσκηση 4.5. Έστω $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$, και $x, y \in \mathbb{R}^n$ με $x \neq y$ και $\|x\|_2 = \|y\|_2$. Δείξτε ότι υπάρχει $u \in \mathbb{R}^n$ με $\|u\|_2 = 1$ τέτοιο ώστε ο πίνακας $U = I - 2\,u\,u^T$ να έχει την ιδιότητα $Ux = y$. Πως μπορείτε να εφαρμόσετε αυτό το αποτέλεσμα όταν $x \neq y$ και $\|x\|_2 \neq \|y\|_2$.

Άσκηση 4.6: Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

και διάνυσμα $b = (4, 3)^T \in \mathbb{R}^2$. Βρείτε τη λύση του γραμμικού συστήματος $Ax = b$ χρησιμοποιώντας την QR–ανάλυση του πίνακα A.

Άσκηση 4.7: Έστω $u, w \in \mathbb{R}^n$ με $(u, w)_2 = 0$, $\|u\|_2 = 1$ και $\|w\|_2 = 1$. Εξετάστε αν ο πίνακας $Q = I - 2\,u\,u^T - 2\,w\,w^T$ είναι ορθογώνιος.

Άσκηση 4.8: Έστω πίνακες $A \in \mathbb{C}^{n_1,m_1}$, $B \in \mathbb{C}^{n_2,m_2}$ και $\Gamma \in \mathbb{C}^{n_1+n_2,m_1+m_2}$ με

$$\Gamma = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right].$$

Δείξτε ότι

$$\Gamma^+ = \left[\begin{array}{c|c} A^+ & 0 \\ \hline 0 & B^+ \end{array}\right].$$

Άσκηση 4.9: Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ μη μηδενικός. Δείξτε ότι:

$$A^*\,A\,A^+\,b = A^* b, \quad \forall\, b \in \mathbb{C}^m.$$

Άσκηση 4.10: Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ μη μηδενικός. Δείξτε ότι:

$$A\,A^+\,A = A, \quad A^+\,A\,A^+ = A^+.$$

Άσκηση 4.11: Έστω πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

και $b = (1, 1, 1)^T$. Βρείτε $x \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε: $\|Ax - b\|_2 = \min_{y\in\mathbb{R}^2} \|Ay - b\|_2$.

Άσκηση 4.12: Έστω πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Για $z = (1, 0)^T$, βρείτε τη μορφή των προσεγγίσεων $(x^{(m)})_{m=0}^{\infty}$ που παράγονται από τη μέθοδο των δυνάμεων για την προσέγγιση της μεγαλύτερης κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμής.

Γ.Ζουράρης