ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ-ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ 1

1. Να αποδειχθεί οτι κάθε στροφή του κύκλου $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ είναι ομοτοπική με την ταυτοτική απεικόνιση id_{S^1}.

2. Έστω $a : S^n \to S^n$, $n \geq 1$, η αντιποδική απεικόνιση $a(x) = -x$. Αν η $f : S^n \to S^n$ είναι μια συνεχής απεικόνιση χωρίς σταθερά σημεία, να αποδειχθεί οτι η f είναι ομοτοπική με την a.

3. Έστω X ένας χώρος και x, $y \in X$. Εστω $\{*\}$ ένα μονοσύνολο και c_x, $c_y : \{*\} \to X$ οι απεικονίσεις $c_x(*) = x$, $c_y(*) = y$. Να αποδειχθεί οτι τα σημεία x, y συνδέονται με ένα τόξο στον X τότε και μόνον τότε όταν $c_x \simeq c_y$.

4. Έστω X ένας χώρος και $f : X \to S^n$, $n \geq 1$, μια συνεχής απεικόνιση. Να αποδειχθεί οτι αν η f δεν είναι επί τότε είναι ομοτοπική με σταθερή.

5. Έστω X ένας χώρος και $A \subset X$ ένα retract με retraction $r : X \to A$.
(α) Να αποδειχθεί οτι η τοπολογία του A (ως υπόχωρος του X) ταυτίζεται με την τοπολογία πιλήκο ως προς r.
(β) Αν ο χώρος X είναι Hausdorff, να αποδειχθεί οτι το A είναι κλειστό σύνολο.

6. Έστω a, $b \in S^1$ διαφορετικά από το 1. Να αποδειχθεί οτι το $(\{1\} \times S^1) \cup (S^1 \times \{1\})$ είναι deformation retract του $S^1 \times S^1 \setminus \{(a, b)\}$.

7. Έστω X ένας χώρος και $A \subset X$. Να αποδειχθεί οτι το A είναι deformation retract του X τότε και μόνον τότε όταν ικανοποιούνται οι παρακάτω δύο συνθήκες:
(α) Για κάθε χώρο Z και κάθε συνεχή απεικόνιση $f : A \to Z$, η f έχει συνεχή επέκταση στον X.
(β) Για κάθε χώρο Z και συνεχείς απεικονίσεις f, $g : X \to Z$, οι f, g είναι ομοτοπικές όταν οι $f|_A$, $g|_A$ είναι ομοτοπικές.

8. Να αποδειχθεί οτι ένας τοπολογικός χώρος X είναι συσταλτός τότε και μόνον τότε όταν η διαγώνια απεικόνιση $\delta : X \to X \times X$, δηλαδή $\delta(x) = (x, x)$ για κάθε $x \in X$, είναι ομοτοπική με σταθερή.

9. Να αποδειχθεί οτι για κάθε τοπολογικό χώρο X το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας $[X, S^1]$ γίνεται αβελιανή ομάδα, αν θέσουμε $[f] + [g] = [f \cdot g]$ για κάθε ζεύγος συνεχών απεικονίσεων f, $g : X \to S^1$.

10. Έστω X ένας χώρος με μία σχέση ισοδυναμίας R και απεικόνιση πιλήκο $p : X \to X/R$.
(α) Αν Y είναι ένας τοπικά συμπαγής χώρος, να δειχθεί οτι η απεικόνιση $id \times p : Y \times X \to Y \times (X/R)$ επάγει έναν ομοιομορφισμό

$$\frac{Y \times X}{id \times R} \approx Y \times (X/R).$$

(β) Αν Z είναι ένας χώρος και $H : [0, 1] \times X \to Z$ μία ομοτοπία ώστε $H(t, x) = H(t, x')$ για κάθε $(x, x') \in R$ και $t \in [0, 1]$, να αποδειχθεί οτι υπάρχει μία ομοτοπία $\tilde{H} : [0, 1] \times (X/R) \to Z$ τέτοια ώστε $H = \tilde{H} \circ (id \times p)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ-ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ 2

1. Αν ένας τοπολογικός χώρος X είναι συσταλτός, να αποδειχθεί οτι για κάθε χώρο Y ο χώρος γινόμενο $X \times Y$ έχει τον ομοτοπικό τύπο του Y.

2. Αν $n \in \mathbb{N}$ και $X = \{(x, y) \in S^n \times S^n : x \neq -y\}$, να αποδειχθεί οτι η $f : S^n \to X$ με $f(x) = (x, x)$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία.

Απάντηση. Έστω $p : S^n \times S^n \to S^n$ η απεικόνιση προβολή στην πρώτη συντεταγμένη, δηλαδή $p(x, y) = x$. Προφανώς $p \circ f = id_{S^n}$. Η $f \circ (p|_X)$ δίνεται από τον τύπο

$$(f \circ (p|_X))(x, y) = (x, x).$$

Η $H : [0, 1] \times X \to X$ με

$$H_t(x, y) = \left(x, \frac{(1 - t)x + ty}{\|(1 - t)x + ty\|}\right)$$

είναι καλά ορισμένη γιατί $(1 - t)x + ty = 0$ ακριβώς τότε όταν $t = \dfrac{1}{2}$ και $x = -y$, όμως έχουμε $(x, y) \in X$, δηλαδή $x \neq -y$. Η H είναι προφανώς συνεχής και

$$H_0(x, y) = (x, x) = (f \circ (p|_X))(x, y),$$

$$H_1(x, y) = (x, y)$$

για κάθε $(x, y) \in X$. Με άλλα λόγια $H : f \circ (p|_X) \simeq id_X$. Αυτό δείχνει οτι η f είναι ομοτοπική ισοδυναμία με ομοτοπικό αντίστροφο την $p|_X$.

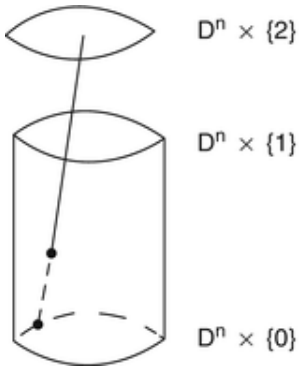
3. Η 3-σφαίρα είναι ο υπόχωρος $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ του $\mathbb{C}^2$. Αν $C \subset S^3$ είναι ο κύκλος $C = \{(z, 0) \in \mathbb{C}^2 : |z| = 1\} \approx S^1$, να αποδειχθεί οτι ο υπόχωρος $S^3 \setminus C$ έχει τον ομοτοπικό τύπο του κύκλου S^1.
(Υπόδειξη: Η απεικόνιση $\phi : S^3 \setminus C \to \mathbb{C} \times S^1$ με

$$\phi(z_1, z_2) = \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2}{|z_2|}\right)$$

είναι ομοιομορφισμός.)

4. Να αποδειχθεί οτι το $D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times [0, 1]$ είναι (strong) deformation retract του $D^n \times [0, 1]$, $n \geq 1$.

Απάντηση. Για κάθε σημείο $(x, s) \in D^n \times [0, 1]$ η ευθεία στον $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ που διέρχεται από το (x, s) και το σημείο $(0, 2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ τέμνει το $D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times [0, 1]$ σε ένα μοναδικό σημείο $r(x, s)$. Η απεικόνιση $r : D^n \times [0, 1] \to D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times [0, 1]$ που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο είναι retraction.



Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα το (x,s) και το $r(x,s)$ περιέχεται στο $D^n \times [0,1]$, το οποίο είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$. Συνεπώς, ορίζεται η απεικόνιση $H : D^n \times [0,1] \to D^n \times [0,1]$ με

$$H(t,(x,s)) = (1-t)\cdot r(x,s) + t\cdot (x,s)$$

που είναι συνεχής, για την οποία έχουμε $H(0,(x,s)) = r(x,s)$ και $H(1,(x,s)) = (x,s)$. Δηλαδή, η H είναι μία ομοτοπία $H : i \circ r \simeq id_{D^n\times[0,1]}$, όπου $i : D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times [0,1] \to D^n \times [0,1]$ είναι η ένθεση. Επιπλέον, αν $(x,s) \in D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times [0,1]$, οπότε $r(x,s) = (x,s)$, έχουμε $H(t,(x,s)) = (x,s)$. Συνεπώς, η H είναι μία strong deformation retraction του $D^n \times [0,1]$ στο $D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times [0,1]$.

5. Να αποδειχθεί οτι η ορθογώνια ομάδα $O(n,\mathbb{R})$ είναι (strong) deformation retract της γενικής γραμμικής ομάδας $GL(n,\mathbb{R})$, $n \geq 1$ (ως υπόχωροι του $\mathbb{R}^{n^2}$).

Απάντηση. Σύμφωνα με το θεώρημα της Πολικής Ανάλυσης (βλ. K.M. Hoffman, R. Kunze, Linear Algebra, Prentice Hall, 1971, Theorem 14, σελ. 342), για κάθε $A \in GL(n,\mathbb{R})$ υπάρχει ένας μοναδικός ορθογώνιος πίνακας $U \in O(n,\mathbb{R})$ και ένας μοναδικός θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας S ώστε $A = US$. Όπως δείχνει η απόδειξη του θεωρήματος της Πολικής Ανάλυσης, $S = (A^TA)^{1/2}$ και $U = A(A^TA)^{-1/2}$. Η απεικόνιση $r : GL(n,\mathbb{R}) \to O(n,\mathbb{R})$ με

$$r(A) = U = A(A^TA)^{-1/2}$$

είναι συνεχής και $r \circ i = id_{O(n,\mathbb{R})}$, δηλαδή η $O(n,\mathbb{R})$ είναι retract της $GL(n,\mathbb{R})$ με retraction την r, όπου $i : O(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ είναι η ένθεση. Θα κατασκευάσουμε μία ομοτοπία $H : i \circ r \simeq id_{GL(n,\mathbb{R})}$.

Επειδή ο συμμετρικός πίνακας A^TA είναι θετικά ορισμένος έχει θετικές πραγματικές ιδιοτιμές

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, ..., \lambda_n > 0$$

(ενδεχομένως όχι διαφορετικές ανά δύο) και σύμφωνα με το Φασματικό Θεώρημα (βλ. K.M. Hoffman, R. Kunze, Linear Algebra, Prentice Hall, 1971, Theorem 9, σελ 335), υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας $R \in O(n,\mathbb{R})$ ώστε

$$A^TA = R^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} R$$

οπότε για κάθε $s \in \mathbb{R}$ ορίζεται καλά ο θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας

$$(A^TA)^s = R^{-1}\begin{pmatrix} (\lambda_1)^s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\lambda_n)^s \end{pmatrix} R.$$

Ορίζεται λοιπόν καλά η $H : [0,1] \times GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ με

$$H(t,A) = A(A^TA)^{\frac{t-1}{2}}$$

που είναι προφανώς συνεχής και $H(0,A) = A(A^TA)^{-1/2}$, ενώ $H(1,A) = A$. Αυτό σημαίνει οτι $H : i \circ r \simeq id_{GL(n,\mathbb{R})}$. Επιπλέον, $H(t,U) = U$ για κάθε $U \in O(n,\mathbb{R})$ και συνεπώς η $O(n,\mathbb{R})$ είναι strong deformation retract της $GL(n,\mathbb{R})$.
6. Εστω X ένας κατά τόξα συνεκτικός χώρος και

$$PX = \{\gamma | \gamma : [0,1] \to X \quad \text{συνεχής}\}$$

εφοδιασμένο με τη συμπαγή-ανοιχτή τοπολογία. Να αποδειχθεί οτι οι χώροι X και PX έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο.

7. Έστω X, Y δύο τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια συνεχής απεικόνιση. Ο mapping cone της f είναι ο χώρος πηλίκο

$$Cf = X \times [0,1] \coprod Y / \sim$$

όπου $(x,0) \sim f(x)$ και $(x,1) \sim (x',1)$ για κάθε x, $x' \in X$. Έστω $p : X \times [0,1] \coprod Y \to Cf$ η απεικόνιση πηλίκο.
(α) Να αποδειχθεί οτι ο $p(Y)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Cf και η $p|_Y : Y \to Cf$ τοπολογική εμφύτευση, ενώ η $(p|_Y) \circ f : X \to Cf$ είναι ομοτοπική με σταθερή.
(β) Να αποδειχθεί οτι το $p(X \times (0,1])$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του Cf και η $p|_{X\times(0,1]}$ επάγει μία τοπολογική εμφύτευση του $X \times (0,1]/(x,1) \sim (x',1)$ στον χώρο Cf.
(γ) Να αποδειχθεί οτι ο $p(Y)$ είναι retract του Cf τότε και μόνον τότε όταν η f είναι ομοτοπική με σταθερή.
(δ) Αν ο $n \geq 1$ είναι ακέραιος και $\eta : S^{2n-1} \to \mathbb{C}P^{n-1}$ είναι η Hopf fibration, να αποδειχθεί οτι $C\eta \approx \mathbb{C}P^n$.
(Υπόδειξη: Θεωρείστε τη συνεχή απεικόνιση $f : D^{2n} \to \mathbb{C}P^n$ με τύπο

$$f(z_0, z_1, ..., z_{n-1}) = [z_0, z_1, ..., \big(1 - \sum_{j=0}^{n-1} |z_j|^2\big)^{1/2}].)$$

(ε) Να αποδειχθεί οτι αν οι συνεχείς απεικονίσεις f_0, $f_1 : X \to Y$ είναι ομοτοπικές, τότε οι χώροι Cf_0 και Cf_1 έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο.
(Υπόδειξη: Αν η F είναι ομοτοπία από την f_0 στην f_1, θεωρείστε την

$$h : X \times [0,1] \coprod Y \to Cf_1$$

με $h(y) = p(y)$ για $y \in Y$ και

$$h(x,t) = \begin{cases} p(F(x,2t)), & \text{όταν } 0 \le t \le 1/2 \\ p(x, 2t-1), & \text{όταν } 1/2 \le t \le 1.) \end{cases}$$

8. Έστω $A \subset X$ ένα strong deformation retract του χώρου Hausdorff X και $f : X \to Y$ μία συνεχής απεικόνιση. Στην ξένη ένωση $X \coprod Y$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $a \sim f(a)$, $a \in A$. Θέτουμε $Y \cup_f X = X \coprod Y/\sim$ και $p : X \coprod Y \to Y \cup_f X$ την απεικόνιση πιλήκο.
(α) Να αποδειχθεί οτι η p εμφυτεύει τοπολογικά τον Y στον χώρο $Y \cup_f X$.
(β) Να αποδειχθεί οτι το $p(Y)$ είναι strong deformation retract του $Y \cup_f X$.
(γ) Για κάθε χώρο Y και κάθε συνεχή απεικόνιση $f : D^n \to Y$ να αποδειχθεί οτι αν $Y \cup_f D^n = D^n \coprod Y/\sim$, όπου $z \sim f(z)$, $z \in S^{n-1}$, τότε ο Y είναι strong deformation retract του $Y \cup_f D^n \setminus \{f(0)\}$.

9. Έστω K, Σ δύο χώροι και $\phi : K \to \Sigma$ μία συνεχής απεικόνιση. Για κάθε χώρο X, θεωρούμε την απεικόνιση $T_\phi(X) : [\Sigma, X] \to [K, X]$ με $T_\phi(X)[f] = [f \circ \phi]$. Να αποδειχθεί οτι ο T_ϕ είναι φυσικός μετασχηματισμός. Να αποδειχθεί επίσης οτι ο T_ϕ είναι φυσική ισοδυναμία τότε και τότε και μόνο τότε όταν η ϕ είναι ομοτοπική ισοδυναμία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ-ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ 3

1. Εστω X ένας τοπολογικός χώρος και $\varnothing \neq A \subset X$ ένα κατά τόξο συνεκτικό σύνολο. Να αποδειχθεί οτι η ένθεση $i : A \hookrightarrow X$ επάγει μονομορφισμό $i_* : H_0(A) \to H_0(X)$ και η ένθεση $j : X \hookrightarrow (X, A)$ επάγει επιμορφισμό $j_* : H_1(X) \to H_1(X, A)$.

2. Η (unreduced) suspension ΣX ενός χώρου X είναι ο χώρος πιλήκο που λαμβάνεται από το γινόμενο $[0, 1] \times X$ συρικνώνοντας τα σύνολα $\{0\} \times X$ και $\{1\} \times X$ σε σημεία.
(α) Να αποδειχθεί οτι $\Sigma S^{n-1} \approx S^n$ για κάθε $n \geq 1$.
(β) Να αποδειχθεί οτι για κάθε ομολογική θεωρία H υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός $\tilde{H}_q(X) \cong \tilde{H}_{q+1}(\Sigma X)$ για κάθε $q \geq 0$.

3. Να αποδειχθεί οτι αν H είναι μια ομολογική θεωρία με ομάδα συντελεστών G, τότε $H_q(D^k \times S^n) \cong G$, για $q = 0, n$, ενώ είναι τετριμένη για $q \neq 0, n$.

4. Εστω $X \subset D^n$ ένα retract του D^n. Να αποδειχθεί οτι κάθε συνεχής απεικόνιση $f : X \to X$ έχει σταθερό σημείο.

5. Εστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας πίνακας του οποίου οι στήλες είναι στοιχεία του Δ_{n-1}, $n > 1$. Να αποδειχθεί οτι το 1 είναι ιδιοτιμή του A.

6. Εστω $n > 1$ και $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας πίνακας ώστε $a_{ij} > 0$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n$. Να αποδειχθεί οτι ο A έχει τουλάχιστον μια πραγματική ιδιοτιμή $\lambda > 0$ στην οποία αντιστοιχεί τουλάχιστον ένα ιδιοδιάνυσμα $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ με $x_i > 0$ για κάθε $1 \leq i \leq n$.
(Υπόδειξη: Θεωρούμε την $f : \Delta_{n-1} \to \mathbb{R}^n$ με $f(x) = \dfrac{Ax}{\sigma(Ax)}$, όπου $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $\sigma(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.)

7. Αν $X \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές σύνολο με μη-κενό εσωτερικό, να αποδειχθεί οτι το ∂X δεν είναι retract του X.
(Υπόδειξη: Θεωρώντας κάποιο ομοιομορφικό αντίτυπο του X, μπορούμε να υποθέσουμε οτι $0 \in \text{int}X$ και $X \subset \text{int}D^n$. Αν υπάρχει retraction $r : X \to \partial X$, τότε αυτή επεκτείνεται σε συνεχή $\tilde{r} : D^n \to D^n \setminus \text{int}X$.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ-ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ 4

1. Είναι η $(n-1)$-σφαίρα S^{n-1} retract (ως ισημερινός) της n-σφαίρας S^n;

2. Εστω $X = S^1 \vee S^2 \vee \cdots \vee S^n$, $n \geq 1$, ο χώρος που προκύπτει από την ξένη ένωση των S^1, $S^2, ..., S^n$ ταυτίζοντας ένα σημείο τους. Να αποδειχθεί οτι $H_q(X) \cong \mathbb{Z}$, για κάθε $0 \leq q \leq n$ και $H_q(X) = 0$ για $q > n$.

3. Εστω X, Y δύο χώροι και X_1, $X_2 \subset X$ με $X = \text{int}X_1 \cup \text{int}X_2$. Εστω $A \subset X$, $B \subset Y$ και f_1, f_2, $f : (X, A) \to (Y, B)$ τρείς συνεχείς απεικονίσεις ώστε $f|X_i = f_i$, $i = 1, 2$ και $f_1(X_2) \cup f_2(X_1) \subset B$. Να αποδειχθεί οτι

$$f_* = (f_1)_* + (f_2)_* : H(X, A) \to H(Y, B).$$

4. Εστω X ένας χώρος και X_1, $X_2 \subset X$ με $X = \text{int}X_1 \cup \text{int}X_2$. Αν το $X_1 \cap X_2$ είναι κατά τόξα συνεκτικό, να αποδειχθεί οτι ο συνδετικός ομομορφισμός της ακριβούς ακολουθίας Mayer-Vietoris $\Delta : H_1(X) \to H_0(X_1 \cap X_2)$ είναι μηδενικός.

5. Εστω X, Y δύο χώροι, X_1, $X_2 \subset X$ και Y_1, $Y_2 \subset Y$, με $X = \text{int}X_1 \cup \text{int}X_2$ και $Y = \text{int}Y_1 \cup \text{int}Y_2$. Αν $f : X \to Y$ είναι μια συνεχής απεικόνιση με $f(X_i) \subset Y_i$, $i = 1, 2$, να αποδειχθεί οτι το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} H_q(X) & \xrightarrow{\Delta} & H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \\ \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle (f|X_1 \cap X_2)_*} \\ H_q(Y) & \xrightarrow{\Delta} & H_{q-1}(Y_1 \cap Y_2) \end{array}$$

όπου Δ είναι ο συνδετικός ομομορφισμός της αντίστοιχης ακριβούς ακολουθίας Mayer-Vietoris. Με άλλα λόγια ο Δ είναι φυσικός.

6. Το πραγματικό προβολικό επίπεδο είναι ο χώρος πηλίκο $\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}/\sim$, όπου $x \sim y$ ακριβώς τότε όταν $y = \lambda x$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας κατάλληλη ακριβή ακολουθία Mayer-Vietoris οτι $H_0(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$ και $H_2(\mathbb{R}P^2) = 0$.

7. Εστω X, Y δύο τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια συνεχής απεικόνιση. Ο mapping cone της f είναι ο χώρος πηλίκο

$$Cf = X \times [0, 1] \coprod Y/\sim$$

όπου $(x, 0) \sim f(x)$ και $(x, 1) \sim (x', 1)$ για κάθε x, $x' \in X$. Εστω $p : X \times [0, 1] \coprod Y \to Cf$ η απεικόνιση πηλίκο.
(α) Να αποδειχθεί οτι $p(Y)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Cf και η $p|_Y : Y \to Cf$ τοπολογική εμφύτευση, ενώ η $(p|_Y) \circ f : X \to Cf$ είναι ομοτοπική με σταθερή.
(β) Να αποδειχθεί οτι το $p(X \times [0, 1] \setminus X \times \{0\})$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του Cf και η $p|_{X \times (0,1]}$ επάγει μία τοπολογική εμφύτευση του $X \times (0, 1]/(x, 1) \sim (x', 1)$ στον χώρο Cf.
(γ) Να αποδειχθεί οτι ο $p(Y)$ είναι retract του Cf τότε και μόνον τότε όταν η f είναι ομοτοπική με σταθερή.
(δ) Αν ο $n \geq 1$ είναι ακέραιος και $\eta : S^{2n-1} \to \mathbb{C}P^{n-1}$ είναι η Hopf fibration, να αποδειχθεί

οτι $C\eta \approx \mathbb{C}P^n$.
(Υπόδειξη: Θεωρείστε τη συνεχή απεικόνιση $f : D^{2n} \to \mathbb{C}P^n$ με τύπο

$$f(z_0, z_1, ..., z_{n-1}) = [z_0, z_1, ..., \big(1 - \sum_{j=0}^{n-1} |z_j|^2\big)^{1/2}].)$$

(ε) Να αποδειχθεί οτι αν οι συνεχείς απεικονίσεις $f_0,\ f_1 : X \to Y$ είναι ομοτοπικές, τότε οι χώροι Cf_0 και Cf_1 έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο.
(Υπόδειξη: Αν η F είναι ομοτοπία από την f_0 στην f_1, θεωρείστε την

$$h : X \times [0, 1] \coprod Y \to Cf_1$$

με $h(y) = p(y)$ για $y \in Y$ και

$$h(x, t) = \begin{cases} p(F(x, 2t)), & \text{όταν } 0 \le t \le 1/2 \\ p(x, 2t - 1), & \text{όταν } 1/2 \le t \le 1.) \end{cases}$$

(στ) Να αποδειχθεί οτι για κάθε συνεχή απεικόνιση $f : X \to Y$ υπάρχει μια μεγάλη ακριβής ακολουθία

$$\cdots \to \tilde{H}_q(X) \xrightarrow{f_*} \tilde{H}_q(Y) \xrightarrow{(p|_Y)_*} \tilde{H}_q(Cf) \xrightarrow{\Delta} \tilde{H}_{q-1}(X) \to \cdots .$$

8. Εστω $n \ge 2$ ένας ακέραιος και $f : S^{2n-1} \to S^n$ μια συνεχής απεικόνιση. Να αποδειχθεί οτι

$$H_q(Cf) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } q = 0,\ n,\ 2n \\ 0, & \text{όταν } q \ne 0,\ n,\ 2n. \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ-ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ 5

1. Εστω G μια μη-τετριμένη ομάδα ομοιομορφισμών της $2k$-σφαίρας S^{2k}, $k \geq 1$, που δρά ελεύθερα επί της S^{2k}, δηλαδή αν $g \in G$ και $g(x) = x$ για κάποιο $x \in S^{2k}$, τότε $g = id$. Να αποδειχθεί οτι $G \cong \mathbb{Z}_2$.

2. Εστω f, $g : S^n \to S^n$, $n \geq 1$, δύο συνεχείς απεικονίσεις με $|d(f)| \neq |d(g)|$. Να αποδειχθεί οτι υπάρχει $x \in S^n$ ώστε τα διανύσματα $f(x)$ και $g(x)$ του $\mathbb{R}^{n+1}$ να είναι κάθετα.

3. Να αποδειχθεί οτι κάθε συνεχής απεικόνιση $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$, $n > 1$, επεκτείνεται σε μια συνεχή απεικόνιση $\tilde{f} : S^n \to S^n$ με $d(\tilde{f}) = d(f)$. Συνεπώς, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ υπάρχει συνεχής απεικόνιση της S^n βαθμού k.

4. Αν οι A, B και C είναι τρείς αβελιανές ομάδες, να αποδειχθεί οτι $A \otimes (B \otimes C) \cong (A \otimes B) \otimes C$.

5. Να αποδειχθεί οτι το τανυστικό γινόμενο δύο ελεύθερων αβελιανών ομάδων είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα.

6. Να αποδειχθεί οτι $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{(m,n)}$, όπου m, $n \in \mathbb{N}$.

7. Να αποδειχθεί οτι $\mathrm{Tor}(A, \mathbb{Q}) = 0$ για κάθε πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή ομάδα A.

8. Να αποδειχθεί οτι $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ-ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ 6

1. Να αποδειχθεί οτι για κάθε πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή ομάδα A και κάθε αβελιανή ομάδα G, η $\mathrm{Tor}(A, G)$ είναι ομάδα στρέψης, δηλαδή κάθε στοιχείο της έχει πεπερασμένη τάξη.

2. Εστω (C, ∂) ένα ελεύθερο αλυσωτό σύμπλεγμα.
(α) Αν η $H_{q-1}(C)$ είναι ελεύθερη αβελιανή, να αποδειχθεί οτι $H_q(C; G) \cong H_q(C) \otimes G$ για κάθε αβελιανή ομάδα G.
(β) Αν η $H_{q-1}(C)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή ομάδα, να αποδειχθεί οτι $H_q(C; \mathbb{R}) \cong H_q(C) \otimes \mathbb{R}$.

3. Εστω (C, ∂) ένα ελεύθερο αλυσωτό σύμπλεγμα. Αν η $H_q(C)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη και $H_q(C; \mathbb{Z}_p) = 0$ για κάθε πρώτο αριθμό p, να αποδειχθεί οτι $H_q(C) = 0$.

4. Εστω (C, ∂) και (D, ∂) δύο ελεύθερα αλυσωτά συμπλέγματα και $f : C \to D$ μία αλυσωτή απεικόνιση. Αν η $f_* : H(C) \to H(D)$ είναι ισομορφισμός, να αποδειχθεί οτι και η $f_* : H(C; G) \to H(D; G)$ είναι ισομορφισμός για κάθε αβελιανή ομάδα G.

5. Να υπολογιστούν οι ομάδες ομολογίας του μιγαδικού προβολικού χώρου $\mathbb{C}P^n$ με συντελεστές σε οποιαδήποτε ομάδα συντελεστών.

6. Να υπολογιστούν οι ομάδες ομολογίας του πραγματικού προβολικού n-χώρου $\mathbb{R}P^n$ με συντελεστές στην $\mathbb{Z}_2$.

7. Να αποδειχθεί οτι για κάθε χώρο X η $H^1(X; \mathbb{Z})$ είναι αβελιανή ομάδα ελεύθερη από στρέψη, δηλαδή δεν έχει στοιχεία πεπερασμένης τάξης.

8. Εστω A μία αβελιανή ομάδα και $0 \to R \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} A \to 0$ μία ελεύθερη επίλυση της A. Θεωρούμε το αλυσωτό σύμπλεγμα (C, ∂) με $C_0 = F$, $C_1 = R$ και $C_q = 0$ για $q \neq 0, 1$ και $\partial_1 = i$.
(α) Να αποδειχθεί οτι $H_0(C) \cong A$ και $H_q(C) = 0$ για $q \neq 0$.
(β) Αν B είναι μία δεύτερη αβελιανή ομάδα και (D, ∂) το αλυσωτό σύμπλεγμα που ορίζεται με τον ίδιο τρόπο από μία ελεύθερη επίλυση της B, να αποδειχθεί οτι $H_1(C \otimes D) \cong \mathrm{Tor}(A, B)$.
(γ) Να αποδειχθεί οτι $\mathrm{Tor}(A, B) \cong \mathrm{Tor}(B, A)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ-ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ 7

1. Να υπολογιστούν οι ομάδες ομολογίας (με ακέραιους συντελεστές) του χώρου $\mathbb{R}P^2 \times S^3$.

2. Εστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και X, Y δύο χώροι. Αν $[\phi] \in H^p(X;R)$, $[\psi] \in H^q(Y;R)$, $[c] \in H_p(X;R)$ και $[t] \in H_q(Y;R)$, να αποδειχθεί οτι $([\phi] \times [\psi])([c] \times [t]) = \phi(c) \cdot \psi(t)$.

3. Να αποδειχθεί οτι για κάθε συνεχή απεικόνιση $f : S^4 \to S^2 \times S^2$ οι επαγόμενοι ομομορφισμοί $f^* : H^4(S^2 \times S^2;\mathbb{Z}) \to H^4(S^4;\mathbb{Z})$ και $f_* : H_4(S^4) \to H_4(S^2 \times S^2)$ είναι μηδενικοί.

4. Να υπολογιστούν οι ομάδες συνομολογίας με ακέραιους συντελεστές του χώρου $S^2 \times S^4$ και να αποδειχθεί οτι $a \smile b = 0$, όταν a, $b \in H^2(S^2 \times S^4;\mathbb{Z})$.
(Υπόδειξη: Δείξτε οτι η προβολή $\pi : S^2 \times S^4 \to S^2$ επάγει έναν ισομορφισμό $\pi^* : H^2(S^2;\mathbb{Z}) \to H^2(S^2 \times S^4;\mathbb{Z})$.)

5. Εστω $n \geq 1$, $T^n = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$ ο n-torus και $f : T^n \to T^n$ μια συνεχής απεικόνση. Αν $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ είναι ο πίνακας της $f^* : H^1(T^n;\mathbb{Z}) \to H^1(T^n;\mathbb{Z})$ ως προς την προφανή καθιερωμένη βάση, να αποδειχθεί οτι η $f^* : H^n(T^n;\mathbb{Z}) \to H^n(T^n;\mathbb{Z})$ είναι πολλαπλασιασμός επί $\det A$. Συνεπώς, αν η f είναι ομοτοπική ισοδυναμία, τότε $\det A = \pm 1$.

6. Για κάθε $A \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ να κατασκευαστεί μια συνεχής απεικόνιση $f : T^2 \to T^2$ τέτοια ώστε η $f^* : H^1(T^2;\mathbb{Z}) \to H^1(T^2;\mathbb{Z})$ να έχει πίνακα τον A.

7. Να αποδειχθεί οτι οι χώροι $S^1 \times S^1$ και $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ δεν έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο.

8. Να αποδειχθεί οτι ο $S^1 \vee S^1 = \{(e^{2\pi it}, 1) : 0 \leq t \leq 1\} \cup \{(1, e^{2\pi it}) : 0 \leq t \leq 1\}$ δεν είναι retract του 2-torus $T^2 = S^1 \times S^1$.
(Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα οτι η ένθεση $j : S^1 \vee S^1 \hookrightarrow T^2$ επάγει έναν ισομορφισμό $j^* : H^1(T^2;\mathbb{Z}) \to H^1(S^1 \vee S^1;\mathbb{Z})$ και στη συνέχεια οτι η δομή δακτυλίου στο $H^*(S^1 \vee S^1;\mathbb{Z})$ είναι τετριμένη.)

9. Εστω $n \geq 1$ ένας ακέραιος, για τον οποίο υπάρχει μία συνεχής απεικόνιση (πολλαπλασιασμός) $\mu : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με τις παρακάτω ιδιότητες:
(α) Υπάρχει $e \in \mathbb{R}^n$ ώστε $\mu(e,x) = \mu(x.e) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, δηλαδή υπάρχει μονάδα.
(β) Δεν υπάρχουν διαιρέτες του μηδενός, δηλαδή αν $\mu(x,y) = 0$ τότε $x = 0$ ή $y = 0$.
(γ) $\mu(\lambda x, y) = \mu(x, \lambda y) = \lambda\mu(x,y)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και x, $y \in \mathbb{R}^n$.

Παραδείγματος χάριν, για $n = 2$ μία τέτοια μ είναι ο πολλαπλασιασμός μιγαδικών αριθμών, ενώ για $n = 4$ είναι ο πολλαπλασιασμός τετρανίων.

Να αποδειχθεί οτι ο n είναι κατ΄ ανάγκη άρτιος.

10. Εστω $n \geq 2$ ένας ακέραιος και $f : S^{2n-1} \to S^n$ μια συνεχής απεικόνιση.
(α) Να αποδειχθεί οτι

$$H^q(Cf;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } q = 0,\ n,\ 2n \\ 0, & \text{όταν } q \neq 0,\ n,\ 2n. \end{cases}$$

Αν τα $\alpha \in H^n(Cf;\mathbb{Z})$ και $\beta \in H^{2n}(Cf;\mathbb{Z})$ είναι γεννήτορες, υπάρχει $h(f) \in \mathbb{Z}$ ώστε $\alpha \smile \alpha = h(f)\beta$. Ο $h(f)$ είναι μοναδικός (modulo πρόσημο, γιατί εξαρτάται από την επιλογή των γεννητόρων) και λέγεται Hopf invariant της f.
(β) Να αποδειχθεί οτι $h(f)$ είναι ομοτοπικό αναλλοίωτο της f.
(γ) Να αποδειχθεί οτι αν η f είναι ομοτοπική με σταθερή, τότε $h(f) = 0$.
(δ) Αν $\eta : S^3 \to \mathbb{C}P^1 \approx S^2$ είναι η Hopf fibration, να αποδειχθεί οτι $h(\eta) = 1$.