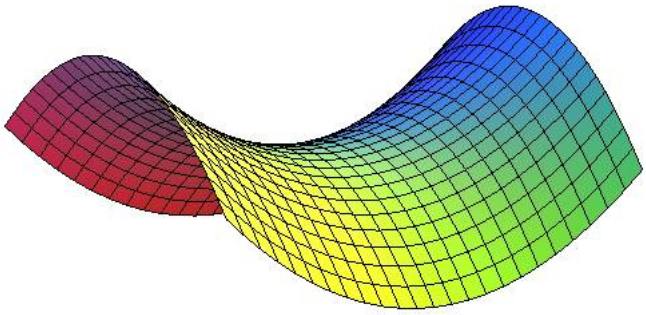
Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Σημειώσεις του προπτυχιακού μαθήματος

Διαφορική Γεωμετρία

Κωνσταντίνος Αθανασόπουλος



Ηράκλειο, 2020

Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές αντιστοιχούν στο προπτυχιακό μάθημα Διαφορική Γεωμετρία, το οποίο δίδαξα επί πολλά έτη στο Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης. Η ύλη του μαθήματος καλύπτει κύρια στοιχεία της θεωρίας των καμπύλων και των επιφανειών στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$. Για την κατανόηση του περιεχομένου απαιτούνται βασικές γνώσεις Γραμμικής Άλγεβρας και Διαφορικού Λογισμού συναρτήσεων μίας και περισσότερων μεταβλητών, που συνήθως διδάσκονται οι φοιτητές των Θετικών Επιστημών κατά τα δύο πρώτα έτη των σπουδών τους. Σε όλη την έκταση του κειμένου χρησιμοποιείται ελεύθερα ορολογία από την Κλασική Φυσική, κάτι που υποδηλώνει τη στενή σχέση των δύο αντικειμένων, δηλαδή της Διαφορικής Γεωμετρίας και της Φυσικής.

Για την συγγραφή αυτών των σημειώσεων χρησιμοποιήθηκαν εν μέρει τα βιβλία που παρατίθενται στη βιβλιογραφία.

Κ. Αθανασόπουλος

Περιεχόμενα

1 Καμπύλες **1**

1.1 Παραμετρισμένες και ευθυγραμμίσιμες καμπύλες 1
1.2 Κανονικές καμπύλες 7
1.3 Οι ευκλείδειες ισομετρίες 9
1.4 Το εξωτερικό γινόμενο στον χώρο $\mathbb{R}^3$ 12
1.5 Το πλαίσιο Frenét 14
1.6 Η ευκλείδεια κατάταξη των καμπύλων στον χώρο $\mathbb{R}^3$ 17
1.7 Μία εφαρμογή στην ηλεκτροδυναμική 19
1.8 Ασκήσεις 20

2 Λείες επιφάνειες στον χώρο $\mathbb{R}^3$ **23**

2.1 Βασικές έννοιες 23
2.2 Απεικονίσεις επιφανειών 28
2.3 Εφαπτόμενο επίπεδο και παράγωγος 30
2.4 Προσανατολίσιμες επιφάνειες 32
2.5 Η πρώτη θεμελιώδης μορφή 35
2.6 Ασκήσεις 36

3 Καμπυλότητα **41**

3.1 Ο τελεστής σχήματος 41
3.2 Η δεύτερη θεμελιώδης μορφή 45
3.3 Καμπυλότητα Gauss και μέση καμπυλότητα 48
3.4 Τοπική γεωμετρία και καμπυλότητα Gauss 52
3.5 Συμπαγείς επιφάνειες και σφαίρες 54
3.6 Επιφάνειες εκ περιστροφής 59
3.7 Ασκήσεις 61

4 Η εσωτερική γεωμετρία των επιφανειών **65**

4.1 Ισομετρίες επιφανειών 65
4.2 Το Theorema Egregium 68
4.3 Γεωδαισιακές 72
4.4 Σφαιρική Γεωμετρία 78
4.5 Υπερβολική Γεωμετρία 80
4.6 Ασκήσεις 86

5 Απαντήσεις επιλεγμένων ασκήσεων **89**
5.1 Απαντήσεις ασκήσεων από το κεφάλαιο 1 89
5.2 Απαντήσεις ασκήσεων από το κεφάλαιο 2 93
5.3 Απαντήσεις ασκήσεων από το κεφάλαιο 3 96
5.4 Απαντήσεις ασκήσεων από το κεφάλαιο 4 99

Κεφάλαιο 1

Καμπύλες

1.1 Παραμετρισμένες και ευθυγραμμίσιμες καμπύλες

Μία συνεχής απεικόνιση $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, όπου $n > 1$ και το $I \subset \mathbb{R}$ είναι ένα διάστημα, λέγεται *παραμετρισμένη καμπύλη* στον n-διάστατο ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$. Αν $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$, οι συνεχείς συναρτήσεις $\gamma_1, ..., \gamma_n : I \to \mathbb{R}$ λέγονται *συντεταγμενες* της γ. Το σύνολο $\gamma(I)$ λέγεται *ίχνος* της γ. Αν το I είναι ανοιχτό διάστημα και η γ είναι διαφορίσιμη στο χρόνο $t \in I$, το διάνυσμα

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix},$$

δηλαδή η παράγωγος της γ στο t, λέγεται *(στιγμιαία) ταχύτητα* της γ τη χρονική στιγμή t.

Παραδείγματα 1.1.1. (α) Η ευθεία στον $\mathbb{R}^n$ που διέρχεται από το σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ και είναι παράλληλη στο μη-μηδενικό διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^n$ είναι το ίχνος της παραμετρισμένης καμπύλης $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ με

$$\gamma(t) = x + tv.$$

Η γ είναι C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη με σταθερή στιγμιαία ταχύτητα $\dot{\gamma}(t) = v$ για κάθε $t \in I$.

(β) Αν $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ και $R > 0$, ο κύκλος στο ευκλείδειο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ με κέντρο το σημείο a και ακτίνα R είναι το ίχνος της C^∞ παραμετρισμένης καμπύλης $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ με

$$\gamma(t) = (a_1 + R\cos t, a_2 + R\sin t).$$

(γ) Αν $I \subset \mathbb{R}$ είναι ένα διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση, το γράφημα της f είναι το ίχνος της παραμετρισμένης καμπύλης $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ με $\gamma(t) = (t, f(t))$.

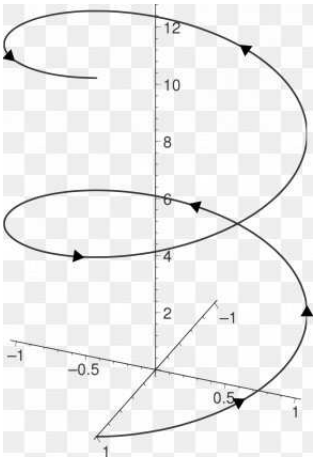
(δ) Το ίχνος της C^∞ παραμετρισμένης καμπύλης $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με $\gamma(t) = (t^3, t^2)$ ταυτίζεται με το γράφημα της συνεχούς συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(t) = t^{2/3}$, η οποία

δεν είναι διαφορίσιμη στο 0. Σ′ αυτό το σημείο η ταχύτητα της γ είναι $\dot{\gamma}(0) = 0$.

(ε) Αν $R > 0$, $b > 0$, η C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ στον 3-διάστατο ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ με

$$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t, bt)$$

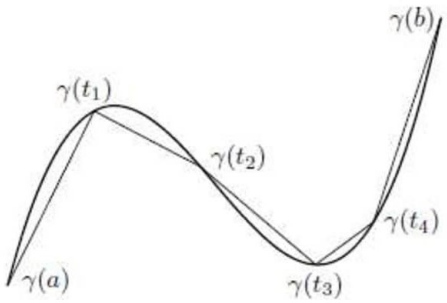
λέγεται *(δεξιόστροφη κυκλική) έλικα* με ακτίνα R και άλμα $2\pi b$.



Εστω a, $b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ μία παραμετρισμένη καμπύλη. Για κάθε διαμέριση $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b\}$ του διαστήματος $[a, b]$ το μήκος της τεθλασμένης γραμμής με διαδοχικές κορυφές $\gamma(t_0)$, $\gamma(t_1)$,..., $\gamma(t_k)$ είναι ίσο με

$$L(P, \gamma) = \sum_{i=1}^{k} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|.$$

Αν Q είναι μία διαμέριση του $[a, b]$ λεπτότερη της P, τότε $L(P, \gamma) \leq L(Q, \gamma)$, από την τριγωνική ανισότητα.



Ορισμός 1.1.2. Εστω οτι $a,\ b \in \mathbb{R}$ όπου $a < b$. Μία παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ λέγεται *ευθυγραμμίσιμη* αν υπάρχει $S > 0$ τέτοιο ώστε $L(P,\gamma) \leq S$ για κάθε διαμέριση P του διαστήματος $[a,b]$. Σ΄ αυτή την περίπτωση, ο μη-αρνητικός πραγματικός αριθμός

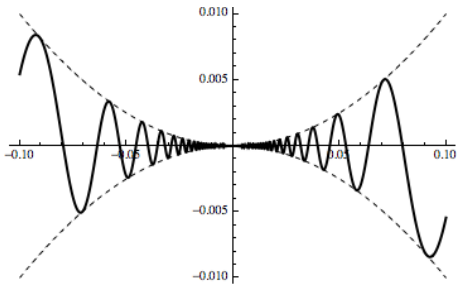
$$L(\gamma) = \sup\{L(P,\gamma) : P \quad \text{διαμέριση του} \quad [a,b]\}$$

λέγεται *(ευκλείδειο) μήκος* της γ. Προφανώς $\|\gamma(a) - \gamma(b)\| \leq L(\gamma)$.

Μία παραμετρισμένη καμπύλη ενδέχεται να μην είναι ευθυγραμμίσιμη.

Παραδείγματα 1.1.3. (α) Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$f(t) = \begin{cases} t^2 \sin\dfrac{1}{t}, & \text{όταν } t \neq 0, \\ 0, & \text{όταν } t = 0. \end{cases}$$



Η f είναι προφανώς συνεχής και παντού διαφορίσιμη. Μάλιστα,

$$f'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim_{t\to 0} t \sin\frac{1}{t} = 0,$$

ενώ για $t \neq 0$ έχουμε

$$f'(t) = 2t \sin\frac{1}{t} - \cos\frac{1}{t}.$$

Συνεπώς, η f' δεν είναι συνεχής στο 0, δηλαδή η f δεν είναι C^1, αφού το $\lim_{t\to 0} f'(t)$ δεν υπάρχει. Απ΄ την άλλη μεριά όμως,

$$|f'(t)| \leq 2|t| + 1$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και συνεπώς $|f'(t)| \leq 3$ για $0 \leq t \leq 1$.

Εστω $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ η παραμετρισμένη καμπύλη με $\gamma(t) = (t, f(t))$ που έχει ίχνος το γράφημα του περιορισμού της f στο διάστημα $[0,1]$. Για κάθε διαμέριση

$$P = \{0 = t_t < t_1 < \cdots < t_k = 1\}$$

του διαστήματος $[0,1]$ έχουμε

$$L(P,\gamma) = \sum_{i=1}^{k} \left[(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 + (t_i - t_{i-1})^2\right]^{1/2}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} \left[9(t_i - t_{i-1})^2 + (t_i - t_{i-1})^2\right]^{1/2} = \sqrt{10},$$

από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής. Συνεπώς, η γ είναι ευθυγραμμίσιμη και $L(\gamma) \leq \sqrt{10}$.

(β) Εστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$f(t) = \begin{cases} t\cos\dfrac{\pi}{2t}, & \text{όταν } 0 < t \leq 1, \\ 0, & \text{όταν } t = 0. \end{cases}$$

Η f είναι προφανώς συνεχής. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη διαμέριση

$$P_n = \{0 < \frac{1}{4n} < \frac{1}{4n-1} < \frac{1}{4n-2} < \frac{1}{4n-3} < \frac{1}{4(n-1)} < \cdots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1\}.$$

Για κάθε ακέραιο $1 \leq k \leq n$ έχουμε

$$f(\frac{1}{4k}) = \frac{1}{4k}, \quad f(\frac{1}{4k-1}) = 0, \quad f(\frac{1}{4k-2}) = -\frac{1}{4k-2}, \quad f(\frac{1}{4k-3}) = 0.$$

Αν $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ είναι η παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma(t) = (t, f(t))$, τότε

$$L(P_n, \gamma) \geq \left|\frac{1}{4n} - 0\right| + \left|0 - \frac{1}{4n}\right| + \left|-\frac{1}{4n-2} - 0\right| + \left|0 + \frac{1}{4n-2}\right| + \cdots + \left|0 + \frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{1}{2} - 0\right|$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Από αυτό προκύπτει οτι $\lim\limits_{n\to+\infty} L(P_n, \gamma) = +\infty$ και συνεπώς η γ δεν είναι ευθυγραμμίσιμη.

Θεώρημα 1.1.4. *Εστω a, $b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Κάθε C^1 παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ είναι ευθυγραμμίσιμη και το μήκος της είναι*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Μία παραμετρισμένη καμπύλη σ΄ ένα κλειστό διάστημα είναι C^1 αν έχει μία C^1 επέκταση σε κάποιο μεγαλύτερο ανοιχτό διάστημα. Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος θα χρειαστούμε ένα λήμμα. Θα χρησιμοποιήσουμε τον προσωρινό συμβολισμό

$$\int_a^b \phi(t)dt = \left(\int_a^b \phi_1(t)dt, ..., \int_a^b \phi_n(t)dt\right),$$

όταν $\phi = (\phi_1, ..., \phi_n)$.

Λήμμα 1.1.5. *Αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ είναι μία συνεχής απεικόνιση, τότε*

$$\left\| \int_a^b \phi(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|\phi(t)\|dt.$$

Απόδειξη. Εστω οτι $\phi = (\phi_1, ..., \phi_n)$. Θέτουμε $x = (x_1, ..., x_n)$, όπου

$$x_i = \int_a^b \phi_i(t)dt, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Αν $x = 0$, το συμπέρασμα είναι τετριμένο. Εστω λοιπόν οτι $x \neq 0$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\|x\|^2 = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n x_i \phi_i(t) \right) dt \leq \int_a^b \|x\| \cdot \|\phi(t)\|dt,$$

απ΄ όπου το συμπέρασμα προκύπτει αμέσως. □

Απόδειξη του Θεψρήματος 1.1.4. Για κάθε διαμέριση $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b\}$ του διαστήματος $[a, b]$ έχουμε

$$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(t)dt \right\| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t)\|dt,$$

από το Λήμμα 1.1.5. Συνεπώς,

$$L(P, \gamma) \leq \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t)\|dt = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|dt.$$

Αυτό δείχνει οτι η γ είναι ευθυγραμμίσιμη και

$$L(\gamma) \leq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|dt.$$

Για την απόδειξη της ισότητας θεωρούμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Επειδή η γ υποτίθεται C^1, η $\dot{\gamma}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\|\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(s)\| < \epsilon$, για κάθε t, $s \in [a, b]$ με $|t - s| < \delta$. Υπάρχει μία διαμέριση $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b\}$ του διαστήματος $[a, b]$ τέτοια ώστε $t_i - t_{i-1} < \delta$ για όλα τα $i = 1, 2, ..., k$. Αν τώρα $t_{i-1} \leq t \leq t_i$, έχουμε $\|\dot{\gamma}(t)\| < \|\dot{\gamma}(t_i)\| + \epsilon$ και συνεπώς

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t)\|dt < (\|\dot{\gamma}(t_i)\| + \epsilon)(t_i - t_{i-1}) = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\dot{\gamma}(t) + \dot{\gamma}(t_i) - \dot{\gamma}(t)]dt \right\| + \epsilon(t_i - t_{i-1})$$

$$\leq \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(t)dt \right\| + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t_i) - \dot{\gamma}(t)\|dt + \epsilon(t_i - t_{i-1})$$

$$\leq \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + 2\epsilon(t_i - t_{i-1}).$$

Προσθέτοντας, προκύπτει οτι

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|dt < L(P,\gamma) + 2\epsilon(b-a) \leq L(\gamma) + 2\epsilon(b-a)$$

για κάθε $\epsilon > 0$. Αυτό δείχνει οτι

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|dt \leq L(\gamma)$$

και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Πόρισμα 1.1.6. *Εστω a, $b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Κάθε κατά τμήματα C^1 παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ είναι ευθυγραμμίσιμη και το μήκος της είναι*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|dt. \quad \square$$

Παραδείγματα 1.1.7. (α) Εστω a, $b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μία C^1 συνάρτηση. Αν $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ είναι η παραμέτριση του γραφήματος της f με $\gamma(t) = (t, f(t))$, τότε η γ είναι ευθυγραμμίσιμη με μήκος

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}dt.$$

(β) Η έλλειψη στο ευκλείδειο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ με κέντρο το $(0,0)$ και ημιάξονες $0 < b < a$ είναι το ίχνος της C^∞ παραμετρισμένης καμπύλης $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ με

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t).$$

Αν $\epsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ (η ποσότητα αυτή είναι γνωστή ως εκκεντρότητα της έλλειψης), τότε το μήκος της γ δίνεται από τον τύπο

$$L(\gamma) = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \epsilon^2\cos^2 t}dt.$$

Επειδή, $0 < \epsilon < 1$, το ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται και λέγεται ελλειπτικό.

(γ) Εστω x, $y \in \mathbb{R}^n$, με $x \neq y$. Το ευθύγραμμο τμήμα από το x στο y είναι το ίχνος της παραμετρισμένης καμπύλης $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ με $\sigma(t) = (1-t)x + ty$ που έχει μήκος $L(\sigma) = \|x - y\|$ και είναι η ευθυγραμμίσιμη παραμετρισμένη καμπύλη από το x στο y με το ελάχιστο μήκος. Θα δείξουμε με ένα δεύτερο τρόπο οτι είναι καμπύλη με το ελάχιστο μήκος ανάμεσα σε όλες τις C^1 παραμετρισμένες καμπύλες που συνδέουν το σημείο x με το σημείο y χρησομοποιώντας το Θεώρημα 1.1.4. Εστω a, $b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ μία ποιαδήποτε C^1 παραμετρισμένη καμπύλη με $\gamma(a) = x$ και $\gamma(b) = y$. Επειδή $x \neq y$, υπάρχει $a \leq T < b$ τέτοιο ώστε $\gamma(T) = x$ και $\gamma(t) \neq x$ για κάθε $T < t \leq b$, λόγω της συνέχειας. Αφού $L(\gamma) \geq L(\gamma|_{[T,b]})$, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε από την αρχή οτι $\gamma(t) \neq x$ για κάθε $a < t \leq b$. Για $a < t \leq b$ θέτουμε $f(t) = \|\gamma(t) - x\|$ και

$$u(t) = \frac{1}{\|\gamma(t) - x\|} \cdot (\gamma(t) - x),$$

οπότε $\|u(t)\|^2 = 1$ και $\gamma(t) = x + f(t)u(t)$. Παραγωγίζοντας έχουμε

$$\dot{\gamma}(t) = f'(t)u(t) + f(t)\dot{u}(t)$$

και τα $u(t)$, $\dot{u}(t)$ είναι κάθετα για κάθε $a < t < b$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα,

$$\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = (f'(t))^2 + (f(t))^2\|\dot{u}(t)\|^2 \geq (f'(t))^2$$

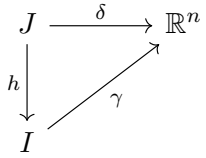
για κάθε $a < t < b$. Συνεπώς,

$$L(\gamma) \geq \int_a^b |f'(t)|dt \geq \left|\int_a^b f'(t)dt\right| = |f(b) = f(a)| = \|y - x\|.$$

1.2 Κανονικές καμπύλες

Στη συνέχεια θα θεωρούμε παραμετρισμένες καμπύλες που είναι τουλάχιστον (κατά τμήματα) C^1.

Εστω I, $J \subset \mathbb{R}$ δύο διαστήματα και $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ και $\delta : J \to \mathbb{R}^n$ δύο C^1 παραμετρισμένες καμπύλες. Αν υπάρχει μία μονότονη C^1 συνάρτηση $h : J \to I$ με $h(J) = I$ ώστε $\delta = \gamma \circ h$, τότε η δ λέγεται *αναπαραμέτριση* της γ και έχει προφανώς το ίδιο ίχνος.



Αν τα I, J είναι κλειστά διαστήματα, τότε από το Θεώρημα 1.1.4 και την αλλαγή μεταβλητής κατά την ολοκλήρωση προκύπτει αμέσως οτι $L(\delta) = L(\gamma)$.

Είναι φανερό οτι η καλύτερη αναπαραμέτριση μίας C^1 παραμετρισμένης καμπύλης είναι εκείνη με σταθερό μήκος ταχύτητας, π.χ. ίσο με 1. Αυτή όμως ενδέχεται να μην υπάρχει, όπως συμβαίνει με την καμπύλη του Παραδείγματος 1.1.1(δ).

Ορισμός 1.2.1. Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα κσι $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ μία C^1 παραμετρισμένη καμπύλη. Η γ λέγεται *κανονική* αν $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ για κάθε $t \in I$.

Αν η C^1 παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ είναι κανονική, επιλέγοντας ένα οποιοδήποτε $t_0 \in I$ ορίζεται η C^1 συνάρτηση $h : I \to \mathbb{R}$ με

$$h(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(r)\|dr,$$

που έχει $h'(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| > 0$ για κάθε $t \in I$. Συνεπώς, η h είναι γνήσια αύξουσα, το $h(I)$ είναι ανοιχτό διάστημα και υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $h^{-1} : h(I) \to I$, η οποία είναι επίσης C^1 με

$$(h^{-1})'(h(t)) = \frac{1}{h'(t)} = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|}.$$

Η h λέγεται *συνάρτηση μήκους* της γ. Είναι φανερό οτι δύο συναρτήσεις μήκους που προκύπτουν από δύο διαφορετικές επιλογές το χρονικού σημείου t_0 διαφέρουν μεταξύ τους μόνο κατά μία σταθερά. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε τον όρο η συνάρτηση μήκους της γ.

Η C^1 παραμετρισμένη καμπύλη $\delta = \gamma \circ h^{-1} : h(I) \to \mathbb{R}^n$ είναι αναπαραμέτριση της γ με ταχύτητα

$$\dot{\delta}(s) = (h^{-1})'(s) \cdot \dot{\gamma}(h^{-1}(s)) = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(h^{-1}(s))\|} \cdot \dot{\gamma}(h^{-1}(s)), \quad s \in h(I).$$

Συνεπώς, $\|\dot{\delta}(s)\| = 1$ για κάθε $s \in h(I)$.

Ορισμός 1.2.2. Μία C^1 παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ λέμε ότι είναι *παραμετρισμενη με το μήκος της* αν $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$ για κάθε $s \in I$.

Παράδειγμα 1.2.3. Η έλικα $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με ακτίνα $R > 0$ και άλμα $2\pi b > 0$ δίνεται από τον τύπο

$$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t, bt)$$

και έχει συνάρτηση μήκους την $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $h(t) = \sqrt{R^2 + b^2} \cdot t$. Η αναπαραμέτριση με το μήκος της είναι η $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ που δίνεται από το τύπο

$$\delta(s) = (R\cos\frac{s}{\sqrt{R^2+b^2}}, R\sin\frac{s}{\sqrt{R^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{R^2+b^2}}).$$

Ένα πιό ενδιαφέρον παράδειγμα είναι το επόμενο.

Παράδειγμα 1.2.4. Θα βρούμε την παραμέτριση με το μήκος της καμπύλης στο ευκλείδειο επίπεδο $\mathbb{R}^2$, η οποία εκκινεί από το σημείο $(1, 0)$, στο οποίο εφάπτεται του οριζόντιου άξονα, βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, τείνει ασυμπτωτικά προς τον κάθετο άξονα και χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα οτι σε κάθε σημείο της η εφαπτομένη της αποκόπτεται από τον κάθετο άξονα σε ένα ευθύγραμμο τμήμα σταθερού μήκους ίσο με 1. Αν $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ είναι η C^1 παραμέτριση με το μήκος και $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, όπου το I είναι κατάλληλο διάστημα προς καθορισμό, τότε οι συντεταγμένες συναρτήσεις x, y κνανοποιούν το (μη-γρμμικό) σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$-\frac{y'(s)}{x'(s)} = \frac{\sqrt{1-(x(s))^2}}{x(s)},$$

$$(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1.$$

Αντικαθιστώντας το $y'(s)$ από την πρώτη στη δεύτερη αξίσωση, καταλήγουμε στην

$$\left(\frac{x(s)}{x'(s)}\right)^2 = 1.$$

Επειδή η συνάρτηση x είναι θετική και φθίνει, έχουμε $x'(s) = -x(s)$, ενώ $x(0) = 1$. Συνεπώς, $x(s) = e^{-s}$ και η γ δίνεται από τον τύπο

$$\gamma(s) = (e^{-s}, \int_0^s \sqrt{1-e^{-2t}}dt), \quad s \geq 0.$$

Αυτή η C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη είναι γνωστή με τη λατινική ονομασία tractrix. Αξίζει να σημειωθεί οτι αν και το ολοκλήρωμα υπολογίζεται, είναι πιο χρήσιμος ο τύπος της γ στην παραπάνω μορφή, αφού παραγωγίζοντας το ολοκλήρωμα θα εξαφανιστεί.

1.3 Οι ευκλείδειες ισομετρίες

Σύμφωνα με τον ορισμό του Ευκλείδη δύο σχήματα, π.χ. τρίγωνα, στο επίπεδο λέγονται ισοδύναμα, δηλαδή «ίσα», αν είναι δυνατόν να μεταφερθεί το ένα στο άλλο με μία κίνηση που διατηρεί τα μήκη. Η κίνηση αυτή είναι μία απεικόνιση του επιπέδου επί του εαυτού του που διατηρεί τις ευκλείδειες αποστάσεις των σημείων.

Κάθε ένα-προς-ένα και επί απεικόνιση $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που διατηρεί τις ευκλείδειες αποστάσεις, δηλαδή έχει την ιδιότητα

$$\|F(x) - F(y)\| = \|x - y\|$$

για κάθε x, $y \in \mathbb{R}^n$ λέγεται *(ευκλείδεια) ισομετρία* του n-διάστατου ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$. Είναι προφανές οτι το σύνολο $I(\mathbb{R}^n)$ όλων των ισομετριών του $\mathbb{R}^n$ γίνεται ομάδα, αν εφοδιαστεί με την πράξη της σύνθεσης απεικονίσεων.

Για κάθε $a \in \mathbb{R}^n$, η μεταφορά κατά το διάνυσμα a είναι ο μη-γραμμικός μετασχηματισμός $T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $T_a(x) = x + a$, που είναι προφανώς ισομετρία. Το σύνολο όλων των μεταφορών είναι υποομάδα της $I(\mathbb{R}^n)$, μάλιστα ισόμορφη με την $(\mathbb{R}^n, +)$.

Μία άλλη κατηγορία ισομετριών είναι οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί. Μία γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ λέγεται *ορθογώνιος μετασχηματισμός* αν διατηρεί τα ευκλείδεια εσωτερικά γινόμενα, δηλαδή

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

για κάθε x, $y \in \mathbb{R}^n$. Τότε $\|f(x)\| = \|x\|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και η f είναι γραμμικός ισομορφισμός. Το σύνολο $O(n, \mathbb{R})$ όλων των ορθογώνιων μετασχηματισμών του $\mathbb{R}^n$ είναι υποομάδα της $I(\mathbb{R}^n)$ και λέγεται ορθογώνια ομάδα.

Πρόταση 1.3.1. *Για μία γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*
(α) Η f είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός.
(β) Η f απεικονίζει κάποια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ σε ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.
(γ) Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ο πίνακας της f (ως προς την κανονική βάση), τότε $A^tA = I_n$, δηλαδή ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = A^t$.

Απόδειξη. Είναι προφανές οτι ο ισχυρισμός (α) συνεπάγεται τον (β). Θα δείξουμε οτι ο (β) συνεπάγεται τον (α). Εστω λοιπόν οτι υπάρχει κάποια ορθοκανονική βάση $\{v_1, ..., v_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε το $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ να είναι επίσης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ γράφεται $x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, v_k\rangle v_k$, οπότε $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, v_k\rangle f(v_k)$, επειδή η f υποτίθεται γραμμική. Από την άλλη μεριά όμως, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle f(x)x, f(v_k)\rangle f(v_k)$.

Συνεπώς, $\langle x, v_k\rangle = \langle f(x), f(v_k)\rangle$ για κάθε $k = 1, 2, ..., n$. Αν τώρα $y \in \mathbb{R}^n$ τότε $y = \sum_{k=1}^{n} \langle y, v_k\rangle v_k$ και

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle f(x), \sum_{k=1}^{n} \langle y, v_k\rangle f(v_k)\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle y, v_k\rangle \cdot \langle f(x), f(v_k)\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle y, v_k\rangle \cdot \langle x, v_k\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Αυτό δείχνει οτι η f είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός.

Τέλος, αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ο πίνακας της f ως προς την κανονική βάση $\{e_1, ..., e_n\}$, τότε

$$A^t A = \big(\langle f(e_i), f(e_j)\rangle\big)_{1\le i,j\le n}.$$

Συνεπώς, $A^t A = I_n$ τότε και μόνον τότε όταν το $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Αυτό δείχνει την ισοδυναμία του ισχυρισμού (γ) με τον (α) και τον (β). □

Από την προηγούμενη Πρόταση 1.3.1, προκύπτει οτι κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός έχει ορίζουσα ± 1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η γραμμική απεικόνιση $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με

$$a(x_1, , , , , x_{n-1}, x_n) = (x_1, , , , , x_{n-1}, -x_n)$$

είναι η ανάκλαση ως προς το οριζόντιο $(n-1)$-διάστατο υπερεπίπεδο και έχει διαγώνιο πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, $\det a = -1$. Η απεικόνιση ορίζουσα $\det : O(n, \mathbb{R}) \to \{1, -1\}$ είναι λοιπόν επιμορφισμός ομάδων, όταν στο $\{1, -1\}$ θεωρήσουμε τον συνηθισμένο πολλαπλασιασμό, οπότε γίνεται η κυκλική ομάδα με δύο στοιχεία. Ο πυρήνας είναι η κανονική υποομάδα

$$SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^t A = I_n \quad \text{και} \quad \det A = 1\}$$

που λέγεται *ειδική ορθογώνια ομάδα*. Η $SO(n, \mathbb{R})$ έχει δείκτη 2 στην $O(n, \mathbb{R})$ και $O(n, \mathbb{R}) = SO(n, \mathbb{R}) \cup aSO(n, \mathbb{R})$.

Παραδείγματα 1.3.2. (α) Η στροφή στο $\mathbb{R}^2$ κατά γωνία $0 \le \theta < 2\pi$ έχει πίνακα

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

και είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός. Αποδεικνύεται εύκολα οτι

$$SO(2, \mathbb{R}) = \{R_\theta : 0 \le \theta < 2\pi\}$$

και κατά συνέπεια είναι ισόμορφη με την πολλαπλασιαστική ομάδα του μοναδιαίου κύκλου $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

(β) Η περιστροφή του $\mathbb{R}^3$ κατά γωνία $0 \leq \theta < 2\pi$ με άξονα περιστροφής την ευθεία που παράγει το διάνυσμα $e_1 = (1, 0, 0)$ έχει πίνακα

$$P_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

και είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός. Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί οτι κάθε στοιχείο της $SO(3, \mathbb{R})$ είναι συζυγές στην $O(3, \mathbb{R})$ με κάποια περιστροφή P_θ. Με άλλα λόγια κάθε στοιχείο της $SO(3, \mathbb{R})$ είναι περιστροφή περί κάποιον άξονα περιστροφής και ως προς κάποια γωνία.

Ένας χρήσιμος χαρακτηρισμός των ορθογώνιων μετασχηματισμών μέσα στην ομάδα των ισομετριών $I(\mathbb{R}^n)$ είναι ο ακόλουθος.

Λήμμα 1.3.3. *Αν η $f \in I(\mathbb{R}^n)$ και $f(0) = 0$, τότε $f \in O(n, \mathbb{R})$.*

Απόδειξη. Από τις υποθέσεις για την f προκύπτει αμέσως οτι

$$\|f(x)\| = \|f(x) - 0\| = \|f(x) - f(0)\| = \|x - 0\| = \|x\|$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Από την άλλη μεριά, για κάθε x, $y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\|f(x)\|^2 - 2\langle f(x), f(y)\rangle + \|f(y)\|^2 = \|f(x) - f(y)\|^2 = \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

και συνεπώς $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. Απομένει λοιπόν να δείξουμε οτι η f είναι γραμμική. Αφού η f διατηρεί τα εσωτερικά γινόμενα, το σύνολο $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Συνεπώς, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle f(x), f(e_k)\rangle f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle f(e_k).$$

Από αυτό προκύπτει αμέσως η γραμμικότητα της f. □

Οι μεταφορές και οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί παράγουν όλες τις ισομετρίες του $\mathbb{R}^n$ με τον παρακάτω απλό τρόπο.

Θεώρημα 1.3.4. *Για κάθε $F \in I(\mathbb{R}^n)$ υπάρχουν μοναδικά $a \in \mathbb{R}^n$ και $f \in O(n, \mathbb{R})$ ώστε $F = T_a \circ f$.*

Απόδειξη. Αν $a = F(0)$, τότε για την ισομετρία $f = T_a^{-1} \circ F$ ισχύει $f(0) = 0$. Από το Λήμμα 1.3.3, η f είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός. Για την μοναδικότητα, αν υπάρχουν $b \in \mathbb{R}^n$ και $g \in O(n, \mathbb{R})$ ώστε $F = T_a \circ f = T_b \circ g$, τότε $f = T_{b-a} \circ g$ και ειδικά

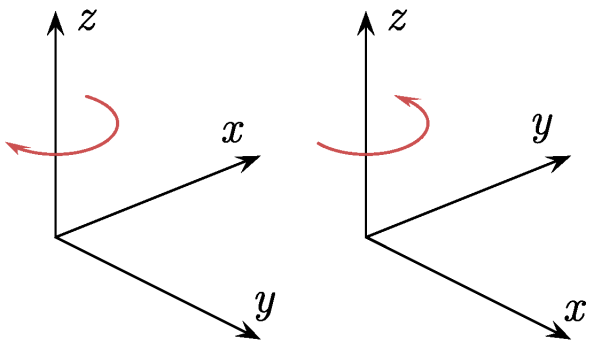
$$0 = f(0) = T_{b-a}(g(0)) = T_{b-a}(0).$$

Αυτό όμως σημαίνει οτι $b - a = 0$ και κατά συνέπεια επίσης $f = g$. □

Με άλλα λόγια για κάθε $F \in I(\mathbb{R}^n)$ υπάρχουν μοναδικά $A \in O(n, \mathbb{R})$ και $a \in \mathbb{R}^n$ ώστε η F να δίνεται από τον τύπο $F(x) = Ax + a$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Ειδικά, η F είναι C^∞ αμφιδιαφόριση του $\mathbb{R}^n$ με παράγωγο $DF(x) = A$ σε κάθε σημείο $x \in \mathbb{R}^n$. Όταν $\det A = 1$, λέμε οτι η ισομετρία F διατηρεί τον προσανατολισμό του $\mathbb{R}^3$, ενώ όταν $\det A = -1$ λέμε οτι τον αντιστρέφει.

1.4 Το εξωτερικό γινόμενο στον χώρο $\mathbb{R}^3$

Δύο διατεταγμένες βάσεις του $\mathbb{R}^n$ λέμε οτι ορίζουν τον ίδιο προσανατολισμό αν ο πίνακας αλλαγής βάσης από την μία στην άλλη έχει θετική ορίζουσα. Αυτή είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο όλων των διατεταγμένων βάσεων του $\mathbb{R}^n$ με ακριβώς δύο κλάσεις ισοδυναμίας. Κάθε μία από αυτές τις δύο κλάσεις ισοδυναμίας λέγεται ένας *προσανατολισμός* του $\mathbb{R}^n$. Συμβατικά, ο προσανατολισμός με αντιπρόπωπο την διατεταγμένη κανονική βάση $[e_1, e_2, ..., e_n]$ λέγεται ο *θετικός προσανατολισμός* του $\mathbb{R}^n$.



Εστω u, $v \in \mathbb{R}^3$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^3$ συμβολίζουμε με (u, v, x) τον πίνακα με στήλες τα διανύσματα u, v και x, με αυτή τη διάταξη. Η απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με

$$\phi(x) = \det(u, v, x)$$

είναι γραμμική. Συνεπώς, υπάρχει ένα μοναδικό διάνυσμα, που συμβολίζουμε με $u \times v$, τέτοιο ώστε

$$\det(u, v, x) = \langle u \times v, x \rangle$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^3$. Το διάνυσμα $u \times v$ λέγεται *εξωτερικό γινόμενο* του u με το v.

Αν $u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$ και $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$, τότε

$$\langle u \times v, e_1 \rangle = \det(u, v, e_1) = u_2v_3 - u_3v_2,$$

$$\langle u \times v, e_2 \rangle = \det(u, v, e_2) = u_3v_1 - u_1v_3,$$

$$\langle u \times v, e_3 \rangle = \det(u, v, e_3) = u_1v_2 - u_2v_1,$$

δηλαδή

$$u \times v = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}.$$

Από τις ιδιότητες των οριζουσών και την τελευταία παράσταση του εξωτερικού γινομένου με συντεταγμένες, προκύπτουν αμέσως οι παρακάτω ιδιότητες:
(α) Το εξωτερικό γινόμενο είναι αντισυμμετρικό, δηλαδή $u \times v = -v \times u$.
(β) Το εξωτερικό γινόμενο είναι διγραμμικό, δηλαδή το $u \times v$ εξαρτάται γραμμικά από το u και από το v ξεχωριστά.
(γ) $u \times v = 0$ τότε και μόνον τότε όταν τα u, v είναι γραμμικά εξαρτημένα.
(δ) Το $u \times v$ είναι κάθετο στα u και v.
(ε) Αν τα u και v είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε

$$\det(u, v, u \times v) = \|u \times v\|^2 > 0$$

και συνεπώς η διατεταγμένη βάση $[u, v, u \times v]$ του $\mathbb{R}^3$ είναι θετικά προσανατολισμένη.
(στ) $(u \times v) \times w = \langle u, w\rangle v - \langle v, w\rangle u$ για κάθε u, v, $w \in \mathbb{R}^3$.
(ζ)

$$\langle u \times v, w \times z\rangle = \begin{vmatrix} \langle u, w\rangle & \langle v, w\rangle \\ \langle u, z\rangle & \langle v, z\rangle \end{vmatrix}$$

για κάθε u, v, w, $z \in \mathbb{R}^3$. Ειδικά,

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2.$$

Με άλλα λόγια το μήκος $\|u \times v\|$ είναι ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα u, v.
(η) Από την ιδιότητα (στ) και τη συμμετρικότητα του εσωτερικού γινομένου προκύπτει αμέσως οτι το εξωτερικό γινόμενο ικανοποιεί τη ταυτότητα του Jacobi, δηλαδή

$$(u \times v) \times w + (v \times w) \times u + (w \times u) \times v = 0$$

για κάθε u, v, $w \in \mathbb{R}^3$. Ετσι το εξωτερικό γινόμενο στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ είναι μία αντισυμμετρική διγραμμική απεικόνιση, που ικανοποιεί τη ταυτότητα του Jacobi. Το ζεύγος $(\mathbb{R}^3, \times)$ είναι ένα από τα σημαντικότερα παραδείγματα άλγεβρας Lie, γιατί είναι ισόμορφη με την άλγεβρα Lie της ομάδας Lie $SO(3, \mathbb{R})$.

Πρόταση 1.4.1. *Αν $f \in O(3, \mathbb{R})$, τότε*

$$f(u) \times f(v) = (\det f) \cdot f(u \times v)$$

για κάθε u, $v \in \mathbb{R}^3$.

Απόδειξη. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^3$ έχουμε

$$\langle f(u) \times f(v), f(x)\rangle = \det(f(u), f(v), f(x)) = (\det f) \cdot \det(u, v, x)$$

$$= (\det f) \cdot \langle u \times v, x\rangle = (\det f) \cdot \langle f(u \times v), f(x)\rangle,$$

αφού η f είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός. Επειδή η f είναι γραμμικός ισομορφισμός, ειδικά λοιπόν επιμορφισμός, προκύπτει από αυτό οτι το διάνυσμα

$$f(u) \times f(v) - (\det f) \cdot f(u \times v)$$

είναι κάθετο σε όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$, από όπου το συμπέρασμα. □

1.5 Το πλαίσιο Frenét

Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $\gamma : I \to \mathbb{R}$ μία C^3 παραμετρισμένη καμπύλη με το μήκος της. Τότε σε κάθε χρονική στιγμή $s \in I$ το διάνυσμα της ταχύτητας $\dot{\gamma}(s)$ είναι κάθετο στο διάνυσμα της *επιτάχυνσης* $\ddot{\gamma}(s)$. Η C^1 συνάρτηση $\kappa : I \to [0, +\infty)$ με

$$\kappa(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\|$$

λέγεται *καμπυλότητα* της γ.

Στη συνέχεια θα υποθέτουμε οτι $\kappa(s) > 0$ για κάθε $s \in I$. Θέτουμε

$$T(s) = \dot{\gamma}(s), \quad N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \cdot \ddot{\gamma}(s), \quad B(s) = T(s) \times N(s).$$

Η διατεταγμένη βάση $[T(s), N(s), B(s)]$ του $\mathbb{R}^3$ είναι ορθοκανονική και θετικά προσανατολισμένη για κάθε $s \in I$. Η κινούμενη διατεταγμένη βάση $[T, N, B]$ κατά μήκος της γ λέγεται *πλαίσιο Frenét* της γ.

Επειδή η γ υποτίθεται C^3, η $T : I \to \mathbb{R}$ είναι C^2 και οι N, $B : I \to \mathbb{R}^3$ είναι C^1. Μάλιστα, για κάθε $s \in I$ το διάνυσμα $B'(s)$ είναι συγγραμμικό του $N(s)$. Πράγματι, έχουμε

$$B'(s) = T'(s) \times N(s) + T(s) \times N'(s) = T(s) \times N'(s)$$

και συνεπώς το $B'(s)$ είναι κάθετο στο $T(s)$. Από την άλλη μεριά, αφού $\|B\| = 1$, το $B'(s)$ είναι κάθετο στο $B(s)$. Αυτό σημαίνει οτι το $B'(s)$ είναι συγγραμμικό του $N(s)$. Υπάρχει λοιπόν μία συνεχής συνάρτηση $\tau : I \to \mathbb{R}$ ώστε

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

για κάθε $s \in I$. Η συνάρτηση τ λέγεται *στρέψη* της γ.

Συνολικά, η μεταβολή του πλαισίου Frenét περιγράφεται από τους παρακάτω τύπους.

Θεώρημα 1.5.1. (Τύποι του Frenét, 1847) *Για κάθε C^3 παραμετρισμένη καμπύλη με το μήκος της $\gamma : I \to \mathbb{R}$ με καμπυλότητα $\kappa > 0$ και στρέψη τ ισχύουν οι παρακάτω τύποι:*

$$\begin{array}{lccc} T' = & & \kappa N & \\ N' = & -\kappa T & & +\tau B \\ B' = & & -\tau N & \end{array}$$

Απόδειξη. Μόνο η δεύτερη ισότητα χρειάζεται να αποδειχθεί. Εχουμε

$$N' = \langle T, N' \rangle T + \langle N, N' \rangle N + \langle B, N' \rangle B$$

και χρειάζεται να υπολογίσουμε τους συντελεστές. Επειδή $\|N\|^2 = 1$, παραγωγίζοντας έχουμε $\langle N, N' \rangle = 0$. Ανάλογα, επειδή $\langle T, N \rangle = 0$, παραγωγίζοντας βρίσκουμε

$$\langle T, N' \rangle = -\langle \ddot{\gamma}, N \rangle = -\langle \kappa N, N \rangle = -\kappa.$$

Τέλος, παραγωγίζοντας την $\langle B, N \rangle = 0$ προκύπτει οτι

$$\langle B, N' \rangle = -\langle B', N \rangle = -\langle -\tau N, N \rangle = \tau. \quad \square$$

Παράδειγμα 1.5.2. Θα υπολογίσουμε το πλαίσιο Frenét, την καμπυλότητα και τη στρέψη της έλικας με παραμέτρους $R > 0$, $b > 0$. Η παραμέτριση με το μήκος της είναι η $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με

$$\gamma(s) = (R\cos\omega s, R\sin\omega s, b\omega s),$$

όπου $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{R^2+b^2}}$. Παραγωγίζοντας δύο φορές βρίσκουμε

$$T(s) = \dot\gamma(s) = \begin{pmatrix} -R\omega\sin\omega s \\ R\omega\cos\omega s \\ b\omega \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \ddot\gamma(s) = \begin{pmatrix} -R\omega^2\cos\omega s \\ -R\omega^2\sin\omega s \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, η καμπυλότητα είναι

$$\kappa(s) = \|\ddot\gamma(s)\| = \frac{R}{R^2+b^2} > 0.$$

Με έναν απλό υπολογισμό βρίσκουμε επίσης

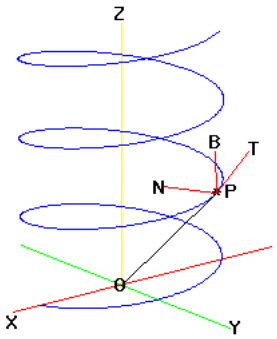
$$N(s) = \begin{pmatrix} -\cos\omega s \\ -\sin\omega s \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B(s) = T(s)\times N(s) = \begin{pmatrix} b\omega\sin\omega s \\ -b\omega\cos\omega s \\ R\omega \end{pmatrix}.$$

Παραγωγίζοντας το τελευταίο έχουμε,

$$B'(s) = \begin{pmatrix} b\omega^2\cos\omega s \\ b\omega^2\sin\omega s \\ 0 \end{pmatrix} = -b\omega^2 N(s).$$

Συνεπώς, η στρέψη της έλικας είναι

$$\tau(s) = \frac{b}{R^2+b^2}.$$



Αξίζει να σημειώσουμε οτι εδώ το διάνυσμα $N(s)$ είναι πάντα οριζόντιο και δείχνει προς τον κάθετο άξονα. Το γεγονός οτι η καμπυλότητα και η στρέψη της έλικας είναι σταθερές συναρτήσεις, τη χαρακτηρίζει, όπως θα δούμε αργότερα στο παρόν κεφάλαιο.

Πρόταση 1.5.3. *Το ίχνος μίας C^3 παραμετρισμένης καμπύλης με το μήκος της $\gamma : I \to \mathbb{R}$ με καμπυλότητα $\kappa > 0$ και στρέψη τ περιέχεται σε επίπεδο τότε και μόνο τότε όταν $\tau = 0$.*

Απόδειξη. Το ίχνος της γ περιέχεται σε επίπεδο, για συντομία η γ είναι επίπεδη, τότε και μόνο τότε όταν υπάρχουν x, $y \in \mathbb{R}^3$, με $\|y\| = 1$ ώστε $\langle \gamma(s) - x, y\rangle = 0$ για κάθε $s \in I$. Αν συμβαίνει αυτό και $[T, N, B]$ είναι το πλαίσιο Frenét της γ, παραγωγίζοντας δύο φορές, το y είναι κάθετο στα $T(s)$ και $N(s)$ και συνεπώς συγγραμμικό του $B(s)$ για κάθε $s \in I$. Λόγω της συνέχειας, $B(s) = y$ για κάθε $s \in I$ ή $B(s) = -y$ για κάθε $s \in I$. Συνεπώς, $\tau = 0$.

Αντίστροφα, αν $\tau = 0$, τότε η B είναι σταθερή. Επιλέγουμε ένα οποιοδήποτε $s_0 \in I$ και θεωρούμε τη C^3 συνάρτηση $\psi : I \to \mathbb{R}$ με $\psi(s) = \langle \gamma(s) - \gamma(s_0), B\rangle$. Αφού $\psi(s_0) = 0$ και $\psi'(s) = \langle T(s), B\rangle = 0$ για κάθε $s \in I$, συμπεραίνουμε οτι $\psi = 0$. Αυτό δείχνει οτι η γ είναι επίπεδη. □

Πόρισμα 1.5.4. *Το ίχνος μίας C^3 παραμετρισμένης καμπύλης με το μήκος της $\gamma : I \to \mathbb{R}$ με καμπυλότητα $\kappa > 0$ και στρέψη τ είναι τόξο κύκλου τότε και μόνο τότε όταν $\tau = 0$ και η κ είναι σταθερή.*

Απόδειξη. Αν το ίχνος της γ είναι τόξο κύκλου με κέντρο $a \in \mathbb{R}^3$ και ακτίνα $R > 0$, τότε $\tau = 0$, από την Πρόταση 1.5.3. Αν $[T, N, B]$ είναι το πλαίσιο Frenét της γ, τότε η B είναι σταθερή και $\langle B, \gamma(s) - a\rangle = 0$ για κάθε $s \in I$, όπως δείχνει η απόδειξη της Πρότασης 1.5.3. Συνεπώς,

$$\gamma(s) - a = \langle T(s), \gamma(s) - a\rangle T(s) + \langle N(s), \gamma(s) - a\rangle N(s).$$

Αφού $\|\gamma(s) - a\|^2 = R^2$ για κάθε $s \in I$, παραγωγίζοντας, $\langle T(s), \gamma(s) - a\rangle = 0$ και παραγωγίζοντας ακόμα μία φορά

$$\langle \kappa(s)N(s), \gamma(s) - a\rangle = -\langle T(s), T(s)\rangle = -1$$

για κάθε $s \in I$. Παραγωγίζοντας τρίτη φορά προκύπτει οτι

$$\langle \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)N'(s), \gamma(s) - a\rangle + \langle \kappa(s)N(s), T(s)\rangle = 0,$$

οπότε $\kappa'(s)\langle N(s), \gamma(s) - a\rangle = 0$, δηλαδή η κ είναι σταθερή. Συμπερασματικά,

$$\gamma(s) - a = -\frac{1}{k}N(s) \quad \text{και} \quad \kappa = \frac{1}{R}.$$

Αντίστροφα, έστω οτι $\tau = 0$ και η $\kappa > 0$ είναι σταθερή. Αν $\beta = \gamma + \frac{1}{\kappa}N$, τότε

$$\dot{\beta} = \dot{\gamma} + \frac{1}{\kappa}N' = T + \frac{1}{\kappa}(-\kappa T) = 0.$$

Συνεπώς, υπάρχει $a \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε

$$\gamma(s) - a = -\frac{1}{\kappa}N(s)$$

για κάθε $s \in I$. Αυτό δείχνει οτι το ίχνος της γ είναι τόξο κύκλου με κέντρο το a και ακτίνα $\frac{1}{\kappa}$. □

1.6 Η ευκλείδεια κατάταξη των καμπύλων στον χώρο $\mathbb{R}^3$

Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα. Δύο C^1 παραμετρισμένες καμπύλες με το μήκος τους γ_1, $\gamma_2 : I \to \mathbb{R}^3$ λέγονται *ισοδύναμες*, αν υπάρχει μία ισομετρία $F \in I(\mathbb{R}^3)$ ώστε $\gamma_2 = F \circ \gamma_1$. Ειδικά, αν η F είναι μεταφορά, τότε οι καμπύλες λέγονται *παράλληλες*.

Εστω οτι οι γ_1, γ_2 είναι C^3 παραμετρισμένες καμπύλες με το μήκος τους, με καμπυλότητες $\kappa_1 > 0$, $\kappa_2 > 0$ και στρέψεις τ_1, τ_2, αντίστοιχα, που είναι ισοδύναμες και $F \in I(\mathbb{R}^3)$ ώστε $\gamma_2 = F \circ \gamma_1$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.3.4, υπάρχουν μοναδικά $A \in O(3, \mathbb{R})$ και $a \in \mathbb{R}^3$ ώστε $F(x) = Ax + a$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^3$. Εστω $[T_i, N_i, B_i]$ το πλαίσιο Frenét της γ_i, $i = 1, 2$. Παραγωγίζοντας, από τον κανόνα της αλυσίδας βρίσκουμε

$$T_2(s) = \dot{\gamma}_2(s) = DF(\gamma_1(s)) \cdot \dot{\gamma}_1(s) = A \cdot \dot{\gamma}_1(s) = A \cdot T_1(s)$$

για κάθε $s \in I$. Παραγωγίζοντας δεύτερη φορά, $\ddot{\gamma}_2(s) = A \cdot \ddot{\gamma}_2(s)$ για κάθε $s \in I$, επειδή ο A είναι σταθερός πίνακας. Προκύπτει λοιπόν οτι $\kappa_1 = \kappa_2$, αφού ο A είναι ορθογώνιος και κατά συνέπεια $N_2(s) = A \cdot N_1(s)$ για κάθε $s \in I$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.4.1 υπολογίζουμε οτι

$$B_2(s) = T_2(s) \times N_2(s) = (A \cdot T_1(s)) \times A \cdot N_1(s))$$

$$= (\det A) \cdot A \cdot (T_1(s) \times N_1(s)) = (\det A) \cdot A \cdot B_1(s)$$

για κάθε $s \in I$. Συνεπώς,

$$\tau_2(s) = -\langle B_2(s), N_2(s) \rangle = -\langle (\det A) \cdot A \cdot B_1(s), A \cdot N_1(s) \rangle$$

$$= -(\det A) \cdot \langle B_1(s), N_1(s) \rangle = (\det A) \cdot \tau_1(s)$$

για κάθε $s \in I$.

Τα προηγούμενα δείχνουν οτι η καμπυλότητα και η στρέψη (μέχρις προσήμου) είναι αναλλοίωτες από ευκλείδειες ισομετρίες του $\mathbb{R}^3$. Μάλιστα είναι πλήρη αναλλοίωτα.

Θεώρημα 1.6.1. *Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και γ_1, $\gamma_2 : I \to \mathbb{R}^3$ δύο C^3 παραμετρισμένες καμπύλες με το μήκος τους με καμπυλότητες $\kappa_1 > 0$, $\kappa_2 > 0$ και στρέψεις τ_1, τ_2, αντίστοιχα. Οι γ_1, γ_2 είναι ισοδύναμες τότε και μόνο τότε όταν $\kappa_1 = \kappa_2$ και $\tau_1 = \tau_2$ ή $\kappa_1 = \kappa_2$ και $\tau_1 = -\tau_2$.*

Απόδειξη. Οι υπολογισμοί που προηγήθηκαν αποδεικνύουν το ευθύ. Για το αντίστροφο, υποθέτουμε πρώτα οτι $\kappa_1 = \kappa_2$ και $\tau_1 = \tau_2$. Εστω οτι $[T_i, N_i, B_i]$ είναι το πλαίσιο Frenét της γ_i, $i = 1, 2$. Επιλέγουμε ένα $s_0 \in I$. Υπάρχει ένας μοναδικός γραμμικός ισομορφισμός A του $\mathbb{R}^3$ (πίνακας αλλαγής βάσης) ώστε

$$A \cdot T_1(s_0) = T_2(s_0), \quad A \cdot N_1(s_0) = N_2(s_0), \quad A \cdot B_1(s_0) = B_2(s_0).$$

Επειδή τα πλαίσια Frenét είναι θετικά προσανατολισμένες διατεταγμένες ορθοκανονικές βάσεις του $\mathbb{R}^3$, κατ' ανάγκη $A \in SO(3, \mathbb{R})$, από την Πρόταση 1.3.1. Η απεικόνιση $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με

$$F(x) = A \cdot x + (\gamma_2(s_0) - A \cdot \gamma_1(s_0))$$

είναι λοιπόν ευκλείδεια ισομετρία με $F(\gamma_1(s_0)) = \gamma_2(s_0)$. Θα δείξουμε οτι $F \circ \gamma_1 = \gamma_2$. Για αυτό αρκεί να αποδείξουμε οτι αυτές οι δύο παραμετρισμένες καμπύλες έχουν την ίδια ταχύτητα. Για απλότητα στο συμβολισμό θέτουμε $F \circ \gamma_1 = \delta$. Σύμφωνα με όσα προηγήθηκαν, αν $[T, N, B]$ είναι το πλαίσιο Frenét της δ, τότε $T = A \cdot T_1$, $N = A \cdot N_1$ και $B = A \cdot B_1$, ενώ η δ έχει καμπυλότητα $\kappa_1 = \kappa_2$ και στρέψη $\tau_1 = \tau_2$. Ειδικά, $T(s_0) = T_2(s_0)$, $N(s_0) = N_2(s_0)$, $B(s_0) = B_2(s_0)$ και αρκεί να δείξουμε οτι $T = T_2$.

Θεωρούμε τη C^1 συνάρτηση $g : I \to \mathbb{R}$ με

$$g(s) = \|T(s) - T_2(s)\|^2 + \|N(s) - N_2(s)\|^2 + \|B(s) - B_2(s)\|^2.$$

Από το Θεώρημα 1.5.1 έχουμε

$$\frac{1}{2}g' = \langle T - T_2, T' - T_2' \rangle + \langle N - N_2, N' - N_2' \rangle + \langle B - B_2, B' - B_2' \rangle$$

$$= \kappa_2 \langle T - T_2, N - N_2 \rangle + \langle N - N_2, -\kappa_2 T + \tau_2 B + \kappa_2 T_2 - \tau_2 B_2 \rangle - \tau_2 \langle B - B_2, N - N_2 \rangle = 0.$$

Επειδή $g(s_0) = 0$, συμπεραίνουμε οτι $g = 0$. Κατά συνέπεια, $T = T_2$.

Η απόδειξη στην περίπτωση που $\kappa_1 = \kappa_2$ και $\tau_1 = -\tau_2$ είναι ίδια, επιλέγοντας τον πίνακα αλλαγής βάσης A τέτοιο ώστε

$$A \cdot T_1(s_0) = T_2(s_0), \quad A \cdot N_1(s_0) = N_2(s_0), \quad A \cdot B_1(s_0) = -B_2(s_0)$$

οπότε $A \in O(3, \mathbb{R})$ με $\det A = -1$. Ετσι, πάλι η δ έχει καμπυλότητα κ_2 και στρέψη $-\tau_1 = \tau_2$. □

Παράδειγμα 1.6.2. Εστω $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ μία C^3 παραμετρισμένη καμπύλη με το μήκος της που έχει σταθερές καμπύλότητα $\kappa > 0$ και στρέψη τ. Σύμφωνα με το προηγούμενο Θεώρημα 1.6.1, η γ είναι ισοδύναμη με έλικα. Σύμφωνα με τους υπολογισμούς του Παραδείγματος 1.5.2, η έλικα έχει ακτίνα $R = \dfrac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2}$ και άλμα $2\pi \dfrac{|\tau|}{\kappa^2 + \tau^2}$.

Για να ολοκληρωθεί η κατάταξη των καμπύλων χρειάζεται να έχουμε και ένα αποτέλεσμα υλοποίησης. Δηλαδή να απαντήσουμε στο ερώτημα ποιά ζεύγη συναρτήσεων υλοποιούνται ως καμπυλότητες και στρέψεις καμπύλων. Η απάντηση σ΄ αυτό το ερώτημα δίνεται από το παρακάτω,

Θεώρημα 1.6.3. *Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα. Για κάθε C^1 συνάρτηση $\kappa : I \to (0, +\infty)$ και κάθε συνεχή συνάρτηση $\tau : I \to \mathbb{R}$ υπάρχει μία C^3 παραμετρισμένη καμπύλη με το μήκος της $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ που έχει καμπυλότητα κ και στρέψη τ.*

Απόδειξη. Για κάθε $s \in I$ θεωρούμε τον αντισυμμετρικό πίνακα

$$H(s) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

Επιλέγουμε ένα $s_0 \in I$. Από την ύπαρξη και τη μοναδικότητα λύσεων για το γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$X'(s) = H(s) \cdot X(s)$$

στο χώρο $\mathbb{R}^{3\times 3}$, υπάρχει μοναδική C^1 λύση του $X : I \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ με αρχική συνθήκη $X(s_0) = I_3$. Επειδή ο H είναι αντισυμμετρικός, έχουμε

$$(X^tX)' = (X^t)'X + X^tX' = (X')^tX + X^tX' = (HX)^tX + X^tHX$$

$$= X^tH^tX + X^tHX = X^t(-H)X + X^tHX = 0.$$

Συνεπώς, $X(s) \in SO(3,\mathbb{R})$ για κάθε $s \in I$, λόγω της συνέχειας. Θέτουμε τώρα $v_i(s) = (X(s))^{-1}e_i$ για κάθε $s \in I$, $i = 1,2,3$ και θεωρούμε την C^3 παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ με

$$\gamma(s) = \int_{s_0}^{s} v_1(t)dt.$$

Η διατεταγμένη βάση $[v_1(s), v_2(s), v_3(s)]$ του $\mathbb{R}^3$ είναι ορθοκανονική και θετικά προσανατολισμένη. Επίσης, $\dot\gamma(s) = v_1(s)$ για κάθε $s \in I$ και η γ είναι παραμετρισμένη με το μήκος της, ενώ

$$\begin{array}{lrcl} v_1' = & & \kappa v_2 & \\ v_2' = & -\kappa v_1 & & +\tau v_3. \\ v_3' = & & -\tau v_2 & \end{array}$$

Αν $[T,N,B]$ είναι το πλαίσιο Frenét της γ, τότε $T = v_1$. Αφού $\ddot\gamma(s) = v_1'(s) = \kappa(s)v_2$, η γ έχει καμπυλότητα $\|\ddot\gamma(s)\| = \kappa(s)$ και $N = v_2$. Τέλος, $v_3 = v_1 \times v_2 = T \times N = B$ και συνεπώς η γ έχει στρέψη τ. □

1.7 Μία εφαρμογή στην ηλεκτροδυναμική

Η κίνηση ενός ηλεκτρισμένου σωμάτιου μάζας m και ηλεκτρικού φορτίου q υπό την επίδραση ηλεκτρομαγνητικού πεδίου διέπεται από την εξίσωση του Lorenz

$$m\frac{dv}{dt} = q(E + v \times H),$$

όπου v είναι η ταχύτητα, E είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και H η ένταση του μαγνητικού πεδίου, που θεωρούνται C^∞. Υποθέτουμε οτι δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο, δηλαδή $E = 0$. Αποδεικνύεται οτι η κινητική ενέργεια παραμένει σταθερή στη διάρκεια της κίνησης. Αν λοιπόν $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ είναι η C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη το ίχνος της οποίας είναι η τροχιά που διαγράφει το σωμάτιο, τότε $\dot\gamma = v$ και μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε οτι η γ είναι παραμετρισμένη με το μήκος της.

Υποθέτουμε τώρα οτι το μαγνητικό πεδίο είναι στατικό και ομογενές, δηλαδή το διάνυσμα H είναι σταθερό ως προς τον χρόνο και τον χώρο. Αν $[T,N,B]$ είναι το πλαίσιο Frenét της γ, η εξίσωση κίνησης του Lorenz γράφεται

$$m\kappa N = qT \times H$$

όπου κ είναι η καμπυλότητα της γ. Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο

$$m[\kappa' N + \kappa(-\kappa T + \tau B)] = q\kappa N \times H$$

όπου τ είναι η στρέψη της γ. Κατά συνέπεια,

$$0 = \langle q\kappa N \times H, N\rangle = m\kappa' + \kappa\langle -\kappa T + \tau B, N\rangle = m\kappa'$$

και η γ έχει σταθερή καμπυλότητα κ.

Για να υπολογίσουμε τη στρέψη της γ παραγωγίζουμε την

$$B = T \times N = \frac{1}{\kappa}\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}$$

και βρίσκουμε

$$B' = \frac{1}{\kappa}\dot{\gamma} \times \dddot{\gamma} = \frac{1}{\kappa}T \times [\frac{q}{m}(T' \times H)]$$

$$= \frac{1}{\kappa}T \times [\frac{q\kappa}{m}(N \times H)] = \frac{q}{m}T \times (N \times H) = -\frac{q}{m}[\langle N, T\rangle H - \langle H, T\rangle N] = \frac{q\langle T, H\rangle}{m}N.$$

Κατά συνέπεια,

$$\tau = -\frac{q\langle T, H\rangle}{m}.$$

Επειδή η γ είναι C^∞, το ίδιο είναι το πλαίσιο Frenét της και η τ. Παραγωγίζοντας,

$$\tau' = -\frac{q}{m}\langle T', H\rangle = -\frac{q}{m}\langle \frac{q}{m}(T \times H), H\rangle = 0$$

από την εξίσωση κίνησης του Lorenz. Συνεπώς, η στρέψη τ είναι σταθερή.

Αν η αρχική ταχύτητα $T(0) = \dot{\gamma}(0)$ με την οποία το σωμάτιο εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο είναι κάθετη στο πεδίο H, τότε $\tau = 0$. Σ′ αυτή την περίπτωση, το σωμάτιο διαγράφει κυκλική τροχιά σε επίπεδο κάθετο στο H, από το Πόρισμα 1.5.4. Αλλιώς, η τροχιά του σωμάτιου είναι το ίχνος μίας έλικας με στρέψη

$$\tau = -\frac{q\langle T(0), H\rangle}{m}$$

και καμπυλότητα

$$\kappa = \|\ddot{\gamma}(0)\| = \frac{q}{m}\|T(0) \times H\|$$

σύμφωνα με το Παράδειγμα 1.6.2, όταν η αρχική ταχύτητα $T(0)$ δεν είναι παράλληλη προς το μαγνητικό πεδίο H.

1.8 Ασκήσεις

1. Εστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ μία κανονική C^1 παραμετρισμένη καμπύλη ώστε $\gamma(t) \neq 0$ για κάθε $t \in I$. Αν υπάρχει $t_0 \in I$, εσωτερικό σημείου του διαστήματος I, τέτοιο ώστε

$$\|\gamma(t_0)\| = \inf\{\|\gamma(t)\| : t \in I\},$$

να αποδειχθεί οτι τα διανύσματα $\gamma(t_0)$ και $\dot{\gamma}(t_0)$ είναι κάθετα.

2. Εστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ μία κανονική C^1 παραμετρισμένη καμπύλη ώστε $\|\gamma(s)\| = 1$ για κάθε $s \in I$. Να αποδειχθεί οτι τα διανύσματα $\gamma(s)$ και $\dot{\gamma}(s)$ είναι κάθετα για κάθε $s \in I$.

3. Εστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ μία C^1 παραμετρισμένη καμπύλη και $v \in \mathbb{R}^n$ μη-μηδενικό. Αν τα διανύσματα $\dot{\gamma}(t)$ και v είναι κάθετα για κάθε t στο διάστημα I και υπάρχει $t_0 \in I$ ώστε τα $\gamma(t_0)$ και v να είναι κάθετα, να αποδειχθεί οτι τα $\gamma(t)$ και v είναι κάθετα για κάθε $t \in I$.

4. Να αποδειχθεί οτι το μήκος της παραβολής $x^2 = 2py$, όπου $p > 0$, από το σημείο $(0,0)$ μέχρι το σημείο $(a, \frac{a^2}{2p})$, όπου $a > 0$, είναι ίσο με

$$\frac{1}{2p}\left(a\sqrt{a^2+p^2} + p^2 \log \frac{a+\sqrt{a^2+p^2}}{p}\right).$$

5. Εστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ μία C^1 παραμετρισμένη καμπύλη και $(r(t), \phi(t))$, $t \in I$, η μορφή της σε πολικές συντεταγμένες. Αν a, $b \in I$, $a < b$, να αποδειχθεί οτι

$$L(\gamma|_{[a,b]}) = \int_a^b \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t))^2(\phi'(t))^2}dt.$$

6. Να αποδειχθεί οτι το μήκος του λιμνίσκου του Bernoulli, δηλαδή της C^1 παραμετρισμένης καμπύλης, της οποίας οι πολικές συντεταγμένες ικανοποιούν την εξίσωση $r^2 = 2a^2 \cos 2\phi$, όπου $|\phi| \leq \frac{\pi}{4}$, και ο $a > 0$ είναι σταθερά, ισούται με

$$2a\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\phi}}d\phi.$$

7. Εστω $b < 0 < a$ και $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ η C^1 παραμετρισμένη καμπύλη με

$$\gamma(t) = (ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\sin t),$$

που λέγεται λογαριθμική σπείρα.
(α) Να αποδειχθεί οτι $\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = (0,0)$ και $\lim_{t\to+\infty} \dot{\gamma}(t) = (0,0)$.
(β) Αν $T \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί οτι το $\lim_{t\to+\infty} L(\gamma|_{[T,t]})$ υπάρχει. Ποιά είναι η τιμή του;

8. Εστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ μία κανονική C^2 παραμετρισμένη καμπύλη με συνάρτηση μήκους $s : I \to \mathbb{R}$. Εστω $\beta = \gamma \circ s^{-1} : s(I) \to \mathbb{R}^2$ η αναπαραμέτριση της γ με το μήκος της. Ορίζουμε ως καμπυλότητα $k(t)$ της γ στο σημείο $\gamma(t)$ την καμπυλότητα της β στο $\beta(s(t))$, δηλαδή $k(t) = \|\ddot{\beta}(s(t))\|$. Αν $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, να αποδειχθεί οτι

$$k(t) = \left|\frac{x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{3/2}}\right|.$$

9. Να υπολογιστεί το πλαίσιο Frenét, η καμπυλότητα και η στρέψη της C^∞ παραμετρισμένης καμπύλης $\gamma : (-1,1) \to \mathbb{R}^3$ με

$$\gamma(s) = (\frac{(1+s)^{3/2}}{3}, \frac{(1-s)^{3/2}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}}).$$

10. Εστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ μία C^3 παραμετρισμένη καμπύλη με το μήκος της με καμπυλότητα $k > 0$ και στρέψη τ. Αν $A = \tau T + kB$, όπου $[T, N, B]$ είναι το πλαίσιο Frenét της γ, να αποδειχθεί οτι οι τύποι του Frenét είναι ισοδύναμοι με τους

$$T' = A \times T, \quad N' = A \times N, \quad B' = A \times B.$$

11. Να αποδειχθεί οτι το ίχνος της παραμετρισμένης καμπύλης $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με

$$\gamma(s) = \big(\frac{4}{5}\cos s, 1 - \sin s, -\frac{3}{5}\cos s\big)$$

είναι ένας κύκλος και να ευρεθεί η εξίσωση του επιπέδου πάνω στο οποίο βρίσκεται.

12. Εστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ μία C^3 παραμετρισμένη καμπύλη με το μήκος της με πλαίσιο Frenét $[T, N, B]$, καμπυλότητα $k > 0$ και στρέψη $\tau \neq 0$.
(α) Αν το ίχνος της γ βρίσκεται επάνω σε μία σφαίρα κέντρου $a \in \mathbb{R}^3$, να αποδειχθεί οτι

$$\gamma(s) - a = -\frac{1}{k(s)}N(s) + \frac{k'(s)}{(k(s))^2\tau(s)}B(s).$$

(β) Έστω οτι η γ είναι C^4. Αν $k' \neq 0$ και η συνάρτηση

$$\frac{1}{k^2} + \left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)^2$$

είναι σταθερή, να αποδειχθεί οτι το ίχνος της γ βρίσκεται επάνω σε μία σφαίρα.

13. Να αποδειχθεί οτι η παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με

$$\gamma(s) = \big(\frac{s}{2\sqrt{2}} + \sqrt{3}\sin\frac{s}{2\sqrt{2}}, 2\cos\frac{s}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}s}{2\sqrt{2}} - \sin\frac{s}{2\sqrt{2}}\big)$$

είναι έλικα. Να ευρεθούν επίσης μία τυπική έλικα $\gamma_{R,b}$ με παραμέτρους $R > 0$, $b > 0$ και μία ευκλείδεια ισομετρία $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ έτσι ώστε $\gamma = f \circ \gamma_{R,b}$.

14. Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ μία κανονική C^3 παραμετρισμένη καμπύλη. Εστω $h : I \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση μήκους της γ και $\beta = \gamma \circ h^{-1} : h(I) \to \mathbb{R}^3$ η αναπαραμέτριση της γ με το μήκος της. Υποθέτουμε οτι η καμπυλότητα της β είναι παντού θετική. Ορίζουμε ως καμπυλότητα $\kappa(t)$ και στρέψη $\tau(t)$ της γ στο $t \in I$ την καμπυλότητα και τη στρέψη, αντίστοιχα, της β στο $h(t)$. Να αποδειχθεί οτι

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot\gamma(t) \times \ddot\gamma(t)\|}{\|\dot\gamma(t)\|^3}$$

και

$$\tau(t) = \frac{\langle \dot\gamma(t) \times \ddot\gamma(t),\, \dddot\gamma(t)\rangle}{\|\dot\gamma(t) \times \ddot\gamma(t)\|^2}$$

για κάθε $t \in I$.

Κεφάλαιο 2

Λείες επιφάνειες στον χώρο $\mathbb{R}^3$

2.1 Βασικές έννοιες

Ενα σύνολο $M \subset \mathbb{R}^3$ λέγεται *λεία επιφάνεια* αν κάθε $p \in M$ έχει μία ανοιχτή περιοχή V στον χώρο $\mathbb{R}^3$ για την οποία υπάρχουν ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset \mathbb{R}^2$ και μία απεικόνιση $\phi : U \to M$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) Η ϕ είναι ομοιομορφισμός του U επί του $V \cap M$, δηλαδή η ϕ είναι συνεχής, ένα-προς-ένα και $\phi(U) = V \cap M$, ενώ η $\phi^{-1} : V \cap M \to U$ είναι επίσης συνεχής.

(β) Η ϕ είναι C^∞ και για κάθε $(u, v) \in U$ η παράγωγος $D\phi(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ είναι γραμμικός μονομορφισμός, δηλαδή, αν $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, τα διανύσματα

$$D\phi(u,v)(e_1) = \frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix} \quad \text{και}$$

$$D\phi(u,v)(e_2) = \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Με άλλα λόγια, ο ιακωβιανός πίνακας

$$D\phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \phi_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \phi_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

έχει τάξη 2 για κάθε $(u, v) \in U$.

Η απεικόνιση $\phi : U \to V \cap M$ λέγεται *τοπική παραμέτριση* της M και η αντίστροφη $\phi^{-1} : V \cap M \to U$ *σύστημα τοπικών (μή-γραμμικών) συντεταγμένων* στην περιοχή $V \cap M$ του σημείου p στην M.

Παραδείγματα 2.1.1. (α) Εστω $U \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοιχτό σύνολο και $g : U \to \mathbb{R}$ μία C^∞ συνάρτηση. Το γράφημα της g είναι το υποσύνολο

$$M = \{(u, v, g(u, v)) : (u, v) \in U\}$$

του $\mathbb{R}^3$. Η απεικόνιση $\phi : U \to M$ με

$$\phi(u, v) = (u, v, g(u, v))$$

είναι ομοιομορφισμός του U επί του M, αφού η αντίστροφη $\phi^{-1} : M \to U$ είναι η προβολή στις δύο πρώτες συντεταγμένες. Επιπλέον, η ϕ είναι C^∞ και σε κάθε $(u, v) \in U$ έχει ιακωβιανό πίνακα

$$D\phi(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix}$$

που έχει τάξη 2. Συνεπώς, το γράφημα M μίας C^∞ συνάρτησης δύο μεταβλητών είναι λεία επιφάνεια. Εδώ η τοπική παραμέτριση ϕ καλύπτει όλη την M, δηλαδή $\phi(U) = M$. Για αυτό το λόγο η M λέγεται *ολικά παραμετρισμένη* από την ϕ και η ϕ λέγεται *ολική παραμέτριση* της M.

(β) Η σφαίρα με κέντρο το σημείο $(0, 0, 0)$ και ακτίνα $R > 0$ είναι το σύνολο

$$S^2_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}.$$

Αν $p = (x_0, y_0, z_0) \in S^2_R$, τότε κάποιο από τα x_0, y_0, z_0 δεν είναι ίσο με το 0. Ας πούμε οτι $z_0 > 0$, δηλαδή το p βρίσκεται στο βόρειο ημισφαίριο. Το (ανοιχτό, δηλαδή χωρίς τον ισημερινό) βόρειο ημισφαίριο είναι το σύνολο $V \cap S^2_R$, όπου $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$. Αν $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < R^2\}$ και $\phi : U \to S^2_R$ είναι η απεικόνιση με

$$\phi(u, v) = (u, v, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}),$$

τότε $\phi(x_0, y_0) = p$ και η ϕ απεικονίζει ομοιομορφικά το U επί του $V \cap S^2_R$, γιατί η $\phi^{-1} : V \cap S^2_R \to U$ είναι η $\phi^{-1}(x, y, z) = (x, y)$, που είναι συνεχής. Επιπλέον, η ϕ είναι C^∞ και σε κάθε $(u, v) \in U$ έχει ιακωβιανό πίνακα της μορφής

$$D\phi(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{pmatrix}$$

που έχει τάξη 2. Αν $z_0 < 0$, τότε το p βρίσκεται στο νότιο ημισφαίριο και ισχύουν τα ίδια, αν επιλέξουμε $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0\}$ και την $\phi : U \to S^2_R$ με

$$\phi(u, v) = (u, v, -\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}).$$

Έτσι έχουμε γύρω από κάθε σημείο $p \in S^2_R$ μία τοπική παραμέτριση της S^2_R, εκτός από τα σημεία του ισημερινού. Αν το σημείο p είναι στον ισημερινό, τότε $z_0 = 0$ και ένα από τα x_0, y_0 δεν είναι ισο με το 0. Αν π.χ. $y_0 > 0$, το p βρίσκεται στο ανατολικό ημισφαίριο και μπορούμε να επαναλάβουμε όλα τα προηγούμενα για τη δεύτερη συντεταγμένη στη θέση της τρίτης. Όμοια όταν $x_0 \neq 0$. Με αυτόν τον τρόπο καλύπτεται ολόκληρη η σφαίρα με τοπικές παραμετρήσεις και για αυτόν το λόγο είναι λεία επιφάνεια.

Το παράδειγμα της σφαίρας αποτελεί ειδική περίπτωση μίας γενικότερης κλάσης παραδειγμάτων, που παίρνουμε από το Θεώρημα των Πεπλεγμένων Συναρτήσεων, και

είναι τα σύνολα λύσεων εξισώσεων της μορφής $f(x,y,z)=0$, όπου η πραγματική C^∞ συνάρτηση f ικανοποιεί κατάλληλες υποθέσεις. Ιστορικά, αυτός ήταν ο ορισμός της επιφάνειας που δόθηκε από τον G. Monge στα τέλη του 18ου αιώνα.

Έστω $A\subset\mathbb{R}^3$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f:A\to\mathbb{R}$ μία C^∞ συνάρτηση. Το $p\in A$ λέγεται *κρίσιμο σημείο* της f, αν $Df(p)=0$. Στη περίπτωση αυτή το $f(p)\in\mathbb{R}$ λέγεται *κρίσιμη τιμή* της f. Ένα $c\in\mathbb{R}$ λέγεται *κανονική τιμή* της f, όταν το σύνολο στάθμης $f^{-1}(c)=\{(x,y,z)\in A: f(x,y,z)=c\}$ δεν περιέχει κανένα κρίσιμο σημείο της f.

Θεώρημα 2.1.2. *Έστω $A\subset\mathbb{R}^3$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f:A\to\mathbb{R}$ μία C^∞ συνάρτηση. Αν το $c\in\mathbb{R}$ είναι κανονική τιμή της f, τότε το σύνολο στάθμης $f^{-1}(c)$ είναι λεία επιφάνεια.*

Απόδειξη. Εστω $p=(x_0,y_0,z_0)\in f^{-1}(c)$. Αφού το c είναι κανονική τιμή της f, έχουμε $Df(p)\neq 0$ και μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε οτι $\dfrac{\partial f}{\partial z}(p)\neq 0$. Θεωρούμε την απεικόνιση $F:A\to\mathbb{R}^3$ με

$$F(x,y,z)=(x,y,f(x,y,z)).$$

Η F είναι C^∞ και σε κάθε σημείο $(x,y,z)\in A$ έχει ιακωβιανό πίνακα

$$DF(x,y,z)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\end{pmatrix}.$$

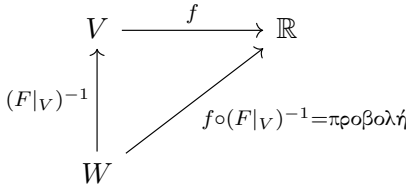
Συνεπώς, $\det DF(p)=\dfrac{\partial f}{\partial z}(p)\neq 0$ και από το Θεώρημα της Αντίστροφης Απεικόνισης υπάρχει μία ανοιχτή περιοχή $V\subset A$ του p τέτοια ώστε το $W=F(V)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ και ο περιορισμός $F|_V:V\to W$ της F στο V είναι C^∞ αμφιδιαφόριση. Η αντίστροφη $(F|_V)^{-1}$ δίνεται από έναν τύπο ανάλογο με αυτόν της F, γιατί αν $F(x,y,z)=(u,v,t)$ τότε $u=x$, $v=y$ και $t=f(x,y,z)$. Με άλλα λόγια, υπάρχει μία C^∞ συνάρτηση $g:W\to\mathbb{R}$ ώστε

$$(F|_V)^{-1}(u,v,t)=(u,v,g(u,v,t))$$

για κάθε $(u,v,t)\in W$. Προφανώς, $z=g(u,v,t)$ και

$$(f\circ(F|_V)^{-1}))(u,v,t)=f(u,v,g(u,v,t))=t$$

για κάθε $(u,v,t)\in W$.



Το σύνολο $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : (u, v, c) \in W\}$ είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}^2$, επειδή το W είναι ανοιχτό στον $\mathbb{R}^3$ και

$$F(f^{-1}(c) \cap V) = \{(u, v, c) : (u, v) \in U\}.$$

Η απεικόνιση $\phi : U \to f^{-1}(c)$ με

$$\phi(u, v) = (u, v, g(u, v, c))$$

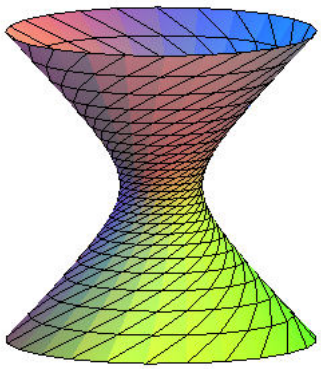
είναι τώρα τοπική παραμέτριση του $f^{-1}(c)$ με $\phi(U) = f^{-1}(c) \cap V$. Αυτό δείχνει οτι το σύνολο στάθμης $f^{-1}(c)$ είναι λεία επιφάνεια. □

Παραδείγματα 2.1.3. (α) Ο (ορθός κυκλικός) κύλινδρος με ακτίνα βάσης $R > 0$ είναι το σύνολο στάθμης $C_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2\} = f^{-1}(R^2)$, όπου $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι η C^∞ συνάρτηση με $f(x, y, z) = x^2 + y^2$. Αφού $Df(x, y, z) = (2x, 2y, 0)$, το R^2 είναι κανονική τιμή της f. Συνεπώς, ο κύλινδρος είναι λεία επιφάνεια.

(β) Το μονόχωνο υπερβολοειδές είναι το σύνολο στάθμης

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\} = f^{-1}(1)$$

της C^∞ συνάρτησης με $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ είναι λεία επιφάνεια, γιατί το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f είναι το $(0, 0, 0)$.



(γ) Έστω $a > R > 0$. Το σύνολο

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = R^2\}$$

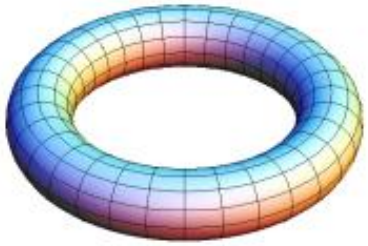
λέγεται τόρος και είναι λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$. Εδώ έχουμε $M = f^{-1}(R^2)$, όπου $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{R}$ είναι η C^∞ συνάρτηση με

$$f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2$$

που έχει ιακωβιανό πίνακα

$$Df(x, y, z) = \left(\frac{2x(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{2y(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 2z \right)$$

σε κάθε σημείο $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.



Συνεπώς, το R^2 είναι κανονική τιμή της f και ο τόρος είναι λεία επιφάνεια.

Όπως είδαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.2, η επιφάνεια στάθμης κανονικής τιμής μίας C^∞ συνάρτησης είναι τοπικά το γράφημα μίας C^∞ συνάρτησης. Στην πραγματικότητα οποιαδήποτε λεία επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί από τέτοιου είδους τοπικές παραμετρήσεις.

Θεώρημα 2.1.4. *Αν M είναι μία λεία επιφάνεια στον χώρο $\mathbb{R}^3$, τότε για κάθε $p \in M$ υπάρχει μία ανοιχτή περιοχή V του p στον $\mathbb{R}^3$ ώστε το $V \cap M$ να είναι το γράφημα κάποιας C^∞ συνάρτησης.*

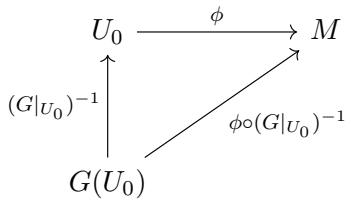
Απόδειξη. Έστω $\phi : U \to M$ μία τοπική παραμέτριση της M γύρω από το σημείο $p = \phi(u_0, v_0)$. Αν $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, ο ιακωβιανός πίνακας

$$D\phi(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \phi_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \phi_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

έχει τάξη 2. Συνεπώς, κάποιο (από τα τρία) 2×2 υπομπλόκ του έχει μη-μηδενική ορίζουσα. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας λοιπόν, ότι

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \phi_2}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Από το Θεώρημα της Αντίστροφης Απεικόνισης για την $G = (\phi_1, \phi_2) : U \to \mathbb{R}^2$, υπάρχει μία ανοιχτή περιοχή $U_0 \subset U$ του (u_0, v_0) ώστε το $G(U_0)$ να είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και η $G|_{U_0} : U_0 \to G(U_0)$ C^∞ αμφιδιαφόριση.



Αν τώρα $(s, t) = G(u, v)$, όπου $(u, v) \in U_0$, τότε $s = \phi_1(u, v)$, $t = \phi_2(u, v)$ και

$(\phi \circ (G|_{U_0})^{-1})(s, t) = \phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v), \phi_3(u, v)) = (s, t, (\phi_3 \circ (G|_{U_0})^{-1})(s, t).)$

Δηλαδή, το $\phi(U_0)$ είναι το γράφημα της συνάρτησης $\phi_3 \circ (G|_{U_0})^{-1}$. $\square$

Παράδειγμα 2.1.5. Ο (άνω) κώνος είναι το υποσύνολο

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

του $\mathbb{R}^3$ και δεν είναι λεία επιφάνεια, γιατί σε μία οσοδήποτε μικρή περιοχή το σημείου $(0, 0, 0)$, που είναι η κορυφή του κώνου, η μοναδική συνάρτηση ως προς (x, y) της οποίας γράφημα είναι ο K είναι η $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, που δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$, ενώ ο K κοντά στο $(0, 0, 0)$ προφανώς δεν είναι γράφημα καμίας μονότιμης συνάρτησης ως προς (x, z) ή ως προς (y, z).

2.2 Απεικονίσεις επιφανειών

Σκοπός της παραγράφου αυτής είναι η εισαγωγή έννοιας διαφορίσιμης απεικόνισης μεταξύ επιφανειών. Η έννοια της διαφορισιμότητας απεικονίσεων που ορίζονται σε ανοιχτά υποσύνολα ευκλείδειων χώρων είναι τοπική. Επειδή κάθε επιφάνεια τοπικά περιγράφεται από ένα σύστημα τοπικών συντεταγμένων, είναι φυσικό να αποκαλούμε διαφορίσιμη μία απεικόνιση με πεδίο ορισμού μία επιφάνεια αν εξαρτάται διαφορίσιμα από τις τοπικές συντεταγμένες. Όμως, για να στέκει ένας τέτοιος ορισμός, θα πρέπει να μην εξαρτάται από την επιλογή του συστήματος τοπικών συντεταγμένων.

Έστω $U \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοιχτό σύνολο και $\phi : U \to M$ μία τοπική παραμέτριση της επιφάνειας M. Έστω ακόμα $(u_0, v_0) \in U$. Αν $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, ο ιακωβιανός πίνακας

$$D\phi(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \phi_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \phi_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

έχει τάξη 2. Αφού κάποιο 2×2 υπομπλόκ του έχει μη-μηδενική ορίζουσα, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \phi_2}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Η C^∞ απεικόνιση $\Phi : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με

$$\Phi(u, v, t) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v), \phi_3(u, v) + t)$$

επεκτείνει («παχαίνει») την τοπική παραμέτριση ϕ με την έννοια οτι

$$\Phi(u, v, 0) = \phi(u, v)$$

και έχει ιακωβιανό πίνακα

$$D\Phi(u, v, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(u, v) & 0 \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \phi_2}{\partial v}(u, v) & 0 \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \phi_3}{\partial v}(u, v) & 1 \end{pmatrix}.$$

σε κάθε $(u, v, t) \in U \times \mathbb{R}$. Επειδή $\det D\Phi(u_0, v_0, 0) \neq 0$, από το Θεώρημα της Αντίστροφης Απεικόνισης υπάρχει μία ανοιχτή περιοχή $U_0 \subset U$ του (u_0, v_0) και

κάποιο $\delta > 0$ ώστε το $V = \Phi(U_0 \times (-\delta, \delta))$ να είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ και η $F = \Phi|_{U_0 \times (-\delta,\delta)}$ είναι C^∞ αμφιδιαφόριση. Με άλλα λόγια, η C^∞ αμφιδιαφόριση $F^{-1} : V \to U_0 \times (-\delta, \delta)$ επεκτείνει («παχαίνει») τον ομοιομορφισμό $(\phi|_{U_0})^{-1} : \phi(U_0) \to U_0$, αφού $F^{-1}(\phi(u, v)) = (u, v, 0)$ για κάθε $(u, v) \in U_0$.

Έστω τώρα $\psi : W \to M$ μία δεύτερη τοπική παραμέτριση της επιφάνειας M, όπου το $W \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο και $\phi(u_0, v_0) \in \phi(U) \cap \psi(W)$. Το σύνολο $\psi^{-1}(\phi(U) \cap \psi(W))$ είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}^2$ και ο (μη-γραμμικός) μετασχηματισμός αλλαγής τοπικών συντεταγμένων

$$\phi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(\phi(U) \cap \psi(W)) \to \phi^{-1}(\phi(U) \cap \psi(W))$$

είναι C^∞ αμφιδιαφόριση, γιατί είναι ένα-προς-ένα και επί και επιλέγοντας το U_0, όπως προηγουμένως ώστε επιπλέον $\phi(U_0) \subset \psi^{-1}(\phi(U) \cap \psi(W))$, έχουμε

$$((\phi^{-1} \circ \psi)(u, v), 0) = F^{-1}(\psi(u, v))$$

για κάθε $(u, v) \in \psi^{-1}(\phi(U_0))$.

Ορισμός 2.2.1. Έστω M μία λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$. Μία συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$ λέγεται C^k, $0 \leq k \leq \infty$, αν για κάθε σημείο $p \in M$ υπάρχει μία τοπική παραμέτριση $\phi : U \to M$ της M με $p \in \phi(U)$ ώστε η συνάρτηση $f \circ \phi : U \to \mathbb{R}$ να είναι C^k.

Ο προηγούμενος ορισμός είναι ανεξάρτητος από την επιλογή της τοπικής παραμέτρισης, γιατί αν $\psi : W \to M$ είναι μία δεύτερη τοπική παραμέτριση με $\phi(U) \cap \psi(W) \neq \varnothing$, τότε $f \circ \psi = (f \circ \phi) \circ (\phi^{-1} \circ \psi)$ και η $\phi^{-1} \circ \psi$ είναι C^∞ αμφιδιαφόριση στο $\psi^{-1}(\phi(U) \cap \psi(W))$. Συνεπώς, η $f \circ \psi$ είναι C^k στο $\psi^{-1}(\phi(U) \cap \psi(W))$ τότε και μόνο τότε όταν η $f \circ \phi$ είναι C^k στο $\phi^{-1}(\phi(U) \cap \psi(W))$. Ειδικά, όταν η f είναι C^∞ θα λέγεται *λεία*.

Ορισμός 2.2.2. Έστω M_1 και M_2 δύο λείες επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$. Μία απεικόνιση $f : M_1 \to M_2$ λέγεται C^k, $0 \leq k \leq \infty$, αν για κάθε σημείο $p \in M$ υπάρχουν μία τοπική παραμέτριση $\phi_1 : U_1 \to M_2$ της M_1 με $p \in \phi(U_1)$ και μία τοπική παραμέτριση $\phi_2 : U_1 \to M_2$ της M_2 με $f(\phi_1(U_1)) \subset \phi_2(U_2)$ ώστε η απεικόνιση

$$\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1 : U_1 \to U_2$$

να είναι C^k.

Όπως προηγουμένως, ο ορισμός δεν εξαρτάται από την επιλογή των τοπικών παραμετρήσεων, γιατί αν $\psi_1 : W_1 \to M_1$ και $\psi_2 : W_2 \to M_2$ είναι μία άλλη τέτοια επιλογή, τότε

$$\psi_2^{-1} \circ f \circ \psi_1 = (\psi_2^{-1} \circ \phi_2) \circ (\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1) \circ (\phi_1^{-1} \circ \psi_1)$$

και οι $\psi_1^{-1} \circ \phi_1$, $\psi_2^{-1} \circ \phi_2$ είναι C^∞ αμφιδιαφορίσεις.

Η απεικόνιση $\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1 : U_1 \to U_2$ λέγεται *τοπική παράσταση* της f ως προς την επιλογή των τοπικών παραμετρήσεων $\phi_1 : U_1 \to M_2$ της M_1 και $\phi_2 : U_1 \to M_2$ της M_2. Είναι προφανές από τον ορισμό οτι κάθε C^k απεικόνιση επιφανειών είναι συνεχής. Όταν η f είναι C^∞, θα αποκαλείται *λεία απεικόνιση επιφανειών*.

Ορισμός 2.2.3. Έστω M_1 και M_2 δύο λείες επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$. Μία απεικόνιση $f : M_1 \to M_2$ λέγεται *(λεία) αμφιδιαφόριση επιφανειών* αν είναι ένα-προς-ένα, επί, λεία απεικόνιση επιφανειών και η $f^{-1} : M_2 \to M_1$ είναι επίσης λεία απεικόνιση επιφανειών.

Ειδικά, κάθε αμφιδιαφόριση επιφανειών είναι ομοιομορφισμός. Δύο λείες επιφάνειες M_1 και M_2 λέγονται *αμφιδιαφορίσιμες* αν υπάρχει κάποια αμφιδιαφόριση $f : M_1 \to M_2$. Τότε οι M_1 και M_2 είναι «ισόμορφες» στα πλαίσια της (Διαφορικής) Τοπολογίας.

Παράδειγμα 2.2.4. Έστω $a > b > c > 0$. Το ελλειψοειδές με ημιάξονες a, b και c είναι η επιφάνεια στάθμης

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}.$$

Εστω $R > 0$ και $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ο γραμμικός ισομορφισμός με

$$f(x, y, z) = \left(\frac{a}{R}x, \frac{b}{R}y, \frac{c}{R}z\right).$$

Τότε, $f(S^2_R) = M$ και η $f|_{S^2_R} : S^2_R \to M$ είναι αμφιδιαφόριση. Συνεπώς, η σφαίρα (με οποιαδήποτε ακτίνα) είναι αμφιδιαφορίσιμη με το ελλειψοειδές.

2.3 Εφαπτόμενο επίπεδο και παράγωγος

Έστω M μία λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ και $p \in M$. Ένα διάνυσμα $X \in \mathbb{R}^3$ λέμε οτι είναι *εφαπτόμενο της* M στο σημείο p, αν υπάρχει μία C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$, για κάποιο $\epsilon > 0$, με $\gamma((-\epsilon, \epsilon)) \subset M$, $\gamma(0) = p$ και $\dot\gamma(0) = X$. Το σύνολο όλων των εφαπτόμενων διανυσμάτων της M στο σημείο p λέγεται *εφαπτόμενο επίπεδο* της M στο p, που συμβολίζεται με T_pM και γίνεται διανυσματικός χώρος με διάσταση 2, όπως δείχνει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.3.1. *Αν $U \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο και $\phi : U \to M$ είναι μία τοπική παραμέτριση της M, με $p = \phi(u, v)$, για κάποιο $(u, v) \in U$, τότε*

$$T_pM = D\phi(u, v)(\mathbb{R}^2).$$

Απόδειξη. Αν $Y \in \mathbb{R}^2$ και $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \to U$, για κάποιο $\epsilon > 0$, είναι οποιαδήποτε C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη με $\sigma(0) = (u, v)$ και $\dot\sigma(0) = Y$, τότε η $\gamma = \phi \circ \sigma$ έχει $\gamma(0) = p$ και $\dot\gamma(0) = D\phi(u, v)(Y)$, από τον κανόνα της αλυσίδας. Αυτό δείχνει οτι $D\phi(u, v)(\mathbb{R}^2) \subset T_pM$.

Αντίστροφα, έστω $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$, για κάποιο $\epsilon > 0$, μία C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη με $\gamma((-\epsilon, \epsilon)) \subset \phi(U)$, $\gamma(0) = p$. Επειδή η ϕ τοπικά επεκτείνεται σε μία C^∞ αμφιδιαφόριση ανοιχτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^3$, όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο 2.2, η $\sigma = \phi^{-1} \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ είναι C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη με $\sigma(0) = (u, v)$ και $D\phi(u, v)(\dot\sigma(0)) = \dot\gamma(0)$. Αυτό δείχνει οτι $T_pM \subset D\phi(u, v)(\mathbb{R}^2)$. □

Από την Πρόταση 2.3.1 και την υπόθεση οτι η $D\phi(u, v)$ είναι γραμμικός μονομορφισμός προκύπτει οτι το

$$\left\{\frac{\partial\phi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial\phi}{\partial v}(u, v)\right\}$$

αποτελεί βάση του $T_{\phi(u,v)}M$. Χρησιμοποιώντας του συμβολισμούς της απόδειξης της Πρότασης 2.3.1, αν $X \in T_pM$ έχουμε

$$X = X_1 \frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) + X_2 \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v)$$

τότε και μόνο τότε όταν $\dot{\sigma}(0) = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα 2.3.2. Εστω $A \subset \mathbb{R}^3$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f : A \to \mathbb{R}$ μία C^∞ συνάρτηση. Εστω $c \in \mathbb{R}$ μία κανονική τιμή της f και $M = f^{-1}(c)$. Αν $p \in M$ και $X \in T_pM$, υπάρχει μία C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, για κάποιο $\epsilon > 0$, με $\gamma(0) = p$ και $\dot{\gamma}(0) = X$. Αφού $f(\gamma(t)) = c$ για κάθε $|t| < \epsilon$, παραγωγίζοντας έχουμε $Df(p)(X) = 0$. Αυτό δείχνει οτι $T_pM \subset \mathrm{Ker}Df(p)$. Επειδή το c είναι κανονική τιμή, το σημείο p δεν είναι κρίσιμο σημείο της f και συνεπώς ο διανυσματικός χώρος $\mathrm{Ker}Df(p)$ έχει διάσταση 2. Κατά συνέπεια, $T_pM = \mathrm{Ker}Df(p)$.

Για κάθε $p \in A$ υπάρχει ένα μοναδικό διάνυσμα $\nabla f(p) \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $Df(p(Y) = \langle \nabla f(p), Y \rangle$ για κάθε $Y \in \mathbb{R}$. Προφανώς,

$$\nabla f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(p) \end{pmatrix}$$

και αν $p \in M$, το εφαπτόμενο επίπεδο T_pM είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του 1-διάστατου υποχώρου του $\mathbb{R}^3$ που παράγει το μη-μηδενικό διάνυσμα $\nabla f(p)$.

Έστω M_1 και M_2 δύο λείες επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$ και $f : M_1 \to M_2$ μία λεία απεικόνιση επιφανειών. Εστω $p \in M_1$ και $X \in T_pM_1$. Αν $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M_1$, για κάποιο $\epsilon > 0$, είναι οποιαδήποτε C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη με $\gamma(0) = p$ και $\dot{\gamma}(0) = X$, τότε η $f \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M_2$ είναι C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη στην M_2. Θεωρούμε μία τοπική παραμέτριση $\phi_1 : U_1 \to M_2$ της M_1 με $p \in \phi(U_1)$ και μία τοπική παραμέτριση $\phi_2 : U_2 \to M_2$ της M_2 με $f(\phi_1(U_1)) \subset \phi_2(U_2)$. Υπάρχει $0 < \delta < \epsilon$ τέτοιο ώστε $\gamma((-\delta, \delta)) \subset \phi_1(U_1)$, λόγω της συνέχειας.

Αν $\sigma = \phi_1^{-1} \circ \gamma : (-\delta, \delta) \to U_1$ και $\dot{\sigma}(0) = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$, τότε

$$X = X_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial u} + X_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial v}.$$

Αφού $\phi_2^{-1} \circ (f \circ \gamma) = (\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1) \circ \sigma$, παραγωγίζοντας, προκύπτει από τον κανόνα της αλυσίδας οτι η ταχύτητα της $\phi_2^{-1} \circ (f \circ \gamma)$ στο $\phi_2^{-1}(f(p))$ είναι

$$D(\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1)(\phi_1^{-1}(p))(\dot{\sigma}(0)).$$

Αν λοιπόν $\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1 = (f_1, f_2)$, τότε η ταχύτητα της $f \circ \gamma$ στο $f(p)$ είναι

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}(\phi_1^{-1}(p)) X_1 + \frac{\partial f_1}{\partial v}(\phi_1^{-1}(p)) X_2 \right) \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial u} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u}(\phi_1^{-1}(p)) X_1 + \frac{\partial f_2}{\partial v}(\phi_1^{-1}(p)) X_2 \right) \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial v}$$

που εξαρτάται μόνο από το εφαπτόμενο διάνυσμα $X \in T_pM_1$ και μάλιστα γραμμικά, ενώ είναι ανεξάρτητη από την C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη γ στην M_1, ως ταχύτητα της οποίας υλοποιείται στο σημείο p.

Αυτό δείχνει οτι ορίζεται καλά η απεικόνιση $f_{*p} : T_pM_1 \to T_{f(p)}M_2$ που στην ταχύτητα $X = \dot{\gamma}(0)$ της γ στο p αντιστοιχεί την ταχύτητα της $f \circ \gamma$ στο $f(p)$. Επιπλέον, η απεικόνιση αυτή είναι γραμμική και ο πίνακάς της ως προς τις διατεταγμένες βάσεις $\left[\dfrac{\partial\phi_1}{\partial u}, \dfrac{\partial\phi_1}{\partial v}\right]$ του T_pM_1 και $\left[\dfrac{\partial\phi_2}{\partial u}, \dfrac{\partial\phi_2}{\partial v}\right]$ του T_pM_2 είναι ο ιακωβιανός πίνακας

$$D(\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1)(\phi_1^{-1}(p))$$

της αντίστοιχης τοπικής παράστασης $\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1$ της f ως προς τις επιλεγμένες τοπικές παραμετρήσεις. Η γραμμική απεικόνιση f_{*p} λέγεται η *παράγωγος* της λείας απεικόνισης επιφανειών f στο σημείο p.

Με ανάλογο τρόπο ορίζεται η παράγωγος $f_{*p} : T_pM \to \mathbb{R}$ μίας λείας συνάρτησης $f : M \to \mathbb{R}$ μίας λείας επιφάνειας M.

2.4 Προσανατολίσιμες επιφάνειες

Έστω M μία λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$. Αν $\phi : U \to M$ είναι μία τοπική παραμέτριση της M, όπου το $U \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο, τότε η διατεταγμένη βάση $\left[\dfrac{\partial\phi}{\partial u}, \dfrac{\partial\phi}{\partial v}\right]$ ορίζει έναν προσανατολισμό του εφαπτόμενου επιπέδου $T_{\phi(u,v)}M$ σε κάθε σημείο $\phi(u, v)$. Έστω $\phi : W \to M$ μία δεύτερη τοπική παραμέτριση της M, όπου το $W \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο, ώστε $\phi(U) \cap \psi(W) \neq \varnothing$. Παραγωγίζοντας την $\psi = \phi \circ (\phi^{-1} \circ \psi)$ στο $\psi^{-1}(\phi(U) \cap \psi(W))$, σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$D\psi(u, v) = D\phi((\phi^{-1} \circ \psi)(u, v)) \circ D(\phi^{-1} \circ \psi)(u, v).$$

Αν λοιπόν

$$D(\phi^{-1} \circ \psi)(u, v) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

τότε

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}(u, v) = a_{11}\frac{\partial\phi}{\partial u}((\phi^{-1} \circ \psi)(u, v)) + a_{21}\frac{\partial\phi}{\partial v}((\phi^{-1} \circ \psi)(u, v))$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial v}(u, v) = a_{12}\frac{\partial\phi}{\partial u}((\phi^{-1} \circ \psi)(u, v)) + a_{22}\frac{\partial\phi}{\partial v}((\phi^{-1} \circ \psi)(u, v))$$

για κάθε $(u, v) \in \psi^{-1}(\phi(U) \cap \psi(W))$. Συνεπώς,

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\psi}{\partial v}(u, v) = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \cdot \frac{\partial\phi}{\partial u}((\phi^{-1} \circ \psi)(u, v)) \times \frac{\partial\phi}{\partial v}((\phi^{-1} \circ \psi)(u, v))$$

$$= \det D(\phi^{-1} \circ \psi)(u, v) \cdot \frac{\partial\phi}{\partial u}((\phi^{-1} \circ \psi)(u, v)) \times \frac{\partial\phi}{\partial v}((\phi^{-1} \circ \psi)(u, v)).$$

Αυτό σημαίνει οτι οι διατεταγμένες βάσεις

$$\left[\frac{\partial\phi}{\partial u}, \frac{\partial\phi}{\partial v}\right], \quad \left[\frac{\partial\psi}{\partial u}, \frac{\partial\psi}{\partial v}\right]$$

ορίζουν τον ίδιο πρασανατολισμό στα εφαπτόμενα επίπεδα της M στα σημεία του συνόλου $\phi(U)\cap\psi(W)$, δηλαδή $\det D(\phi^{-1}\circ\psi)(u,v) > 0$ όταν $(u,v) \in \psi^{-1}(\phi(U)\cap\psi(W))$, τότε και μόνο τότε όταν

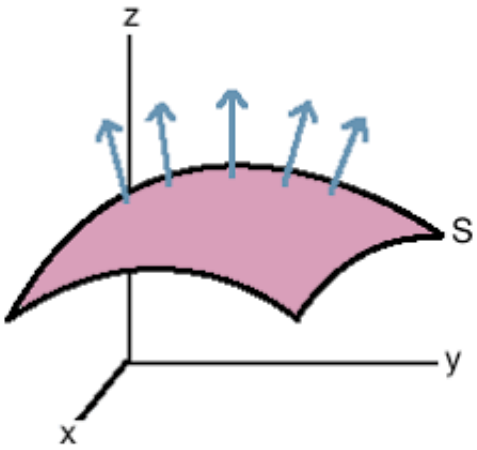
$$\frac{1}{\|\frac{\partial\psi}{\partial u}\times\frac{\partial\psi}{\partial v}\|}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}\times\frac{\partial\psi}{\partial v} = \frac{1}{\|\frac{\partial\phi}{\partial u}\times\frac{\partial\phi}{\partial v}\|}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial u}\times\frac{\partial\phi}{\partial v}.$$

Ορισμός 2.4.1. Μία λεία επιφάνεια M λέγεται *προσανατολίσιμη*, αν υπάρχει μία οικογένεια τοπικών παραμετρήσεων $\phi_i : U_i \to M$, $i \in I$, για κάποιο σύνολο δεικτών I, όπου το $U_i \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο, ώστε
(α) $M = \bigcup_{i\in I}\phi_i(U_i)$ και
(β) $\det D(\phi_i^{-1}\circ\phi_j)(u,v) > 0$ για κάθε $i,\ j \in I$ με $\phi_i(U_i)\cap\phi_j(U_j) \neq \varnothing$ και κάθε $(u,v) \in \phi_j^{-1}(\phi_i(U_i)\cap\phi_j(U_j))$.

Θεώρημα 2.4.2. *Μία λεία επιφάνεια M στον $\mathbb{R}^3$ είναι προσανατολίσιμη τότε και μόνο τότε όταν υπάρχει μία λεία απεικόνιση επιφανειών*

$$N : M \to S^2$$

όπου $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ είναι η μοναδιαία σφαίρα, ώστε το διάνυσμα $N(p)$ να είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο T_pM για κάθε $p \in M$.



Απόδειξη. Εστω οτι η M είναι προσανατολίσιμη και συνεπώς υπάρχει μία οικογένεια τοπικών παραμετρήσεων $\phi_i : U_i \to M$, $i \in I$, όπου τα $U_i \subset \mathbb{R}^2$, $i \in I$, είναι ανοιχτά σύνολα, ώστε $M = \bigcup_{i\in I}\phi_i(U_i)$ και $\det D(\phi_i^{-1}\circ\phi_j)(u,v) > 0$ για κάθε $i,\ j \in I$ με $\phi_i(U_i)\cap\phi_j(U_j) \neq \varnothing$ και κάθε $(u,v) \in \phi_j^{-1}(\phi_i(U_i)\cap\phi_j(U_j))$. Σύμφωνα με όσα προηγήθηκαν, τότε ορίζεται καλά η απεικόνιση $N : N \to S^2$ με

$$N(p) = \frac{1}{\|\frac{\partial\phi_i}{\partial u}(\phi^{-1}(p))\times\frac{\partial\phi_i}{\partial v}(\phi_i^{-1}(p))\|}\cdot\frac{\partial\phi_i}{\partial u}(\phi_i^{-1}(p))\times\frac{\partial\phi_i}{\partial v}(\phi_i^{-1}(p)),$$

όταν $p \in \phi_i(U_i)$, που είναι λεία και το $N(p)$ να είναι κάθετο στο T_pM για κάθε $p \in M$.

Αντίστροφα, έστω οτι υπάρχει μία λεία απεικόνιση $N : M \to S^2$, ώστε το $N(p)$ να είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο T_pM για κάθε $p \in M$. Υπάρχει μία (αριθμήσιμη) οικογένεια τοπικών παραμετρήσεων $\psi_i : U_i \to M$, $i \in I$, όπου $U_i = (-1,1) \times (-1,1)$, ώστε $M = \bigcup_{i \in I} \psi_i(U_i)$. Επειδή το U_i είναι κατά τόξα συνεκτικό σύνολο, έχουμε

$$N(\psi_i(u,v)) = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \psi_i}{\partial u} \times \frac{\partial \psi_i}{\partial v} \right\|} \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial u} \times \frac{\partial \psi_i}{\partial v}$$

για κάθε $(u,v) \in U_i$ ή

$$N(\psi_i(u,v)) = -\frac{1}{\left\| \frac{\partial \psi_i}{\partial u} \times \frac{\partial \psi_i}{\partial v} \right\|} \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial u} \times \frac{\partial \psi_i}{\partial v}$$

για κάθε $(u,v) \in U_i$.

Στην πρώτη περίπτωση θέτουμε $\phi_i = \psi_i$. Στη δεύτερη περίπτωση, θεωρούμε την ανάκλαση $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $g(u,v) = (u,-v)$, οπότε $g(U_i) = U_i$ και θέτουμε $\phi_i = \psi_i \circ g$. Αφού $\det g = -1$, από τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει αμέσως οτι

$$N(\phi_i(u,v)) = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \phi_i}{\partial u} \times \frac{\partial \phi_i}{\partial v} \right\|} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial u} \times \frac{\partial \phi_i}{\partial v}$$

για κάθε $(u,v) \in U_i$ και κάθε $i \in I$. Από αυτό και τον βασικό υπολογισμό που κάναμε στην αρχή της παρούσας παραγράφου συμπεραίνουμε οτι

$$\frac{\det D(\phi_i^{-1} \circ \phi_j)(u,v)}{\left|\det D(\phi_i^{-1} \circ \phi_j)(u,v)\right|} = 1$$

για κάθε i, $j \in I$ με $\phi_i(U_i) \cap \phi_j(U_j) \neq \varnothing$ και κάθε $(u,v) \in \phi_j^{-1}(\phi_i(U_i) \cap \phi_j(U_j))$. Συνεπώς, $\det D(\phi_i^{-1} \circ \phi_j)(u,v) > 0$ και η M είναι προσανατολίσιμη. □

Αν η M είναι μία προσανατολίσιμη λεία επιφάνεια στον χώρο $\mathbb{R}^3$, τότε μία λεία απεικόνιση επιφανειών $N : M \to S^2$, ώστε το διάνυσμα $N(p)$ να είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο T_pM της M για κάθε $p \in M$ λέγεται *προσανατολισμός ή απεικόνιση Gauss* της M. Αν η M είναι (κατά τόξα) συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, τότε υπάρχουν ακριβώς δύο προσανατολισμοί της M, από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής.

Παράδειγμα 2.4.3. Εστω $A \subset \mathbb{R}^3$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f : A \to \mathbb{R}$ μία C^∞ συνάρτηση. Εστω $c \in \mathbb{R}$ μία κανονική τιμή της f και $M = f^{-1}(c)$. Σύμφωνα με το Παράδειγμα 2.3.2, το εφαπτόμενο επίπεδο T_pM είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του 1-διάστατου υποχώρου του $\mathbb{R}^3$ που παράγει το μη-μηδενικό διάνυσμα $\nabla f(p)$. Συνεπώς, η λεία απεικόνιση $N : M \to S^2$ που δίνεται από τον τύπο

$$N = \frac{1}{\|\nabla f\|} \cdot \nabla f$$

είναι προσανατολισμός της M. Έτσι κάθε επιφάνεια στάθμης κανονικής τιμής μιας C^∞ συνάρτησης είναι προσανατολίσιμη.

Πρέπει να σημειωθεί οτι η έννοια της προσανατολισιμότητας είναι τοπολογική και όχι γεωμετρική. Επίσης, κάθε λεία επιφάνεια είναι τοπικά προσανατολίσιμη, αφού ορίζεται πάντα ένας προσανατολισμός στο $\phi(U)$ από μία τοπική παραμέτριση $\phi : U \to M$, με τύπο

$$N(\phi(u,v)) = \frac{1}{\|\frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v}\|} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v}.$$

2.5 Η πρώτη θεμελιώδης μορφή

Έστω M μία λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$. Για κάθε σημείο $p \in M$, ο περιορισμός του συνηθισμένου ευκλείδειου εσωτερικού γινομένου του $\mathbb{R}^3$ στο εφαπτόμενο επίπεδο T_pM μας δίνει ένα εσωτερικό γινόμενο

$$\langle .,. \rangle : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

το οποίο έχει λεία εξάρτηση από το σημείο p, όπως θα εξηγηθεί παρακάτω. Η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή $I_p : T_pM \to \mathbb{R}$, που δίνεται από τον τύπο $I_p(X) = \langle X, X \rangle$, λέγεται *πρώτη θεμελιώδης μορφή* της M στο σημείο p.

Εστω $\phi : U \to M$ μία τοπική παραμέτριση της M, όπου το $U \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο. Εστω $(u,v) \in U$. Για κάθε $X \in T_{\phi(u,v)}M$ υπάρχουν μοναδικά $X_1,\ X_2 \in \mathbb{R}$ ώστε

$$X = X_1 \frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v) + X_2 \frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v).$$

Η πρώτη θεμελιώδης μορφή της M στο σημείο $\phi(u,v)$ δίνεται λοιπόν από τον τύπο

$$I_{\phi(u,v)}(X) = \langle X, X \rangle = \langle X_1 \frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v) + X_2 \frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v), X_1 \frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v) + X_2 \frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v) \rangle$$

$$= E(u,v)X_1^2 + 2F(u,v)X_1X_2 + G(u,v)X_2^2,$$

όπου έχουμε θέσει

$$E(u,v) = \langle \frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v), \frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v) \rangle,$$

$$F(u,v) = \langle \frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v), \frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v) \rangle \quad \text{και}$$

$$G(u,v) = \langle \frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v), \frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v) \rangle.$$

Οι συναρτήσεις E, F, $G : U \to \mathbb{R}$ λέγονται *συντελεστές της πρώτης θεμελιώδους μορφής* ως προς την τοπική παραμέτριση ϕ και είναι C^∞. Αυτό σημαίνει οτι το εσωτερικό γινόμενο που έχουμε στο εφαπτόμενο επίπεδο T_pM έχει λεία εξάρτηση από το σημείο p.

Εστω $a,\ b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $\gamma : [a,b] \to M$ μία C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη με $\gamma([a,b]) \subset \phi(U)$. Αν $\sigma = \phi^{-1} \circ \gamma = (\sigma_1, \sigma_2)$. το μήκος της γ δίνεται από τον τύπο

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{E(\sigma(t))(\sigma_1'(t))^2 + F(\sigma(t))\sigma_1'(t)\sigma_2'(t) + G(\sigma(t))(\sigma_2'(t))^2}dt.$$

Παραδείγματα 2.5.1. (α) Το (οριζόντιο) επίπεδο $M = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ είναι ολικά παραμετρισμένη επιφάνεια από την παραμέτριση $\phi : \mathbb{R}^2 \to M$ με $\phi(u, v, 0)$. Εδώ έχουμε

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

οπότε $E(u, v) = 1$, $F(u, v) = 0$ και $G(u, v) = 1$ για κάθε $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

(β) Ο κύλινδρος $C_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2\}$ με ακτίνα βάσης $R > 0$ δέχεται την τοπική παραμέτριση $\phi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to C_R$ με

$$\phi(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v)$$

ώστε $\phi((0, 2\pi) \times \mathbb{R}) = C_R \setminus \{(R, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Έχουμε

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = \begin{pmatrix} -R \sin u \\ R \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

οπότε $E(u, v) = R^2$, $F(u, v) = 0$ και $G(u, v) = 1$ για κάθε $(u, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$.

(γ) Η σφαίρα $S^2_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ ακτίνας $R > 0$ μπορεί να παραμετριστεί από τις σφαιρικές συντεταγμένες, δηλαδή έχει την τοπική παραμέτριση $\phi : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to S^2_R$ με

$$\phi(u, v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u).$$

Το $\phi((0, \pi) \times (0, 2\pi))$ είναι η S^2_R χωρίς τον πρώτο μεσημβρινό. Έχουμε

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = \begin{pmatrix} R \cos u \cos v \\ R \cos u \sin v \\ -R \sin u \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial v} = \begin{pmatrix} -R \sin u \sin v \\ R \sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

οπότε $E(u, v) = R^2$, $F(u, v) = 0$ και $G(u, v) = R^2 \sin^2 u$ για $(u, v) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi)$.

2.6 Ασκήσεις

1. Να αποδειχθεί οτι ο κύλινδρος $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ είναι λεία επιφάνεια ολικά παραμετρισμένη από την $\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to C$ που δίνεται από τον τύπο (σε πολικές συντεταγμένες)

$$\phi(r, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, \log r).$$

2. Εστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με $f(x, y, z) = z^2$. Να αποδειχθεί οτι το $0 \in \mathbb{R}$ είναι κρίσιμη τιμή της f, αλλά το $f^{-1}(0)$ είναι λεία επιφάνεια.

3. Να ευρεθούν όλες οι κρίσιμες τιμές της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x, y, z) = (x + y + z - 1)^2$$

και όλα τα $c \in \mathbb{R}$ για τα οποία το $f^{-1}(c)$ είναι λεία επιφάνεια.

4. Αν $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι μία C^∞ αμφιδιαφόριση, να αποδειχθεί οτι για κάθε λεία επιφάνεια $M \subset \mathbb{R}^3$ το σύνολο $f(M)$ είναι επίσης λεία επιφάνεια.

5. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $R > 0$ η C^∞ απεικόνιση $\phi : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ με

$$\phi(u, v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u)$$

είναι τοπική παραμέτριση της σφαίρας $S^2_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$. Ποιό είναι το $S^2_R \setminus \phi((0, \pi) \times (0, 2\pi))$;

6. Εστω $R > 0$ και $\pi_+ : S^2_R \setminus \{(0, 0, R)\} \to \mathbb{R}^2$ η απεικόνιση με

$$\pi_+(x, y, z) = \frac{R}{R - z}(x, y),$$

και $\pi_- : S^2_R \setminus \{(0, 0, -R)\} \to \mathbb{R}^2$ η απεικόνιση με

$$\pi_-(x, y, z) = \frac{R}{R + z}(x, y).$$

(α) Να αποδειχθεί οτι οι απεικονίσεις π_+, π_- είναι ένα προς ένα και επί.
(β) Να αποδειχθεί οτι οι π_+^{-1}, π_-^{-1} είναι τοπικές παραμετρήσεις της σφαίρας S^2_R με $S^2_R = \pi_+^{-1}(\mathbb{R}^2) \cup \pi_-^{-1}(\mathbb{R}^2)$.
(γ) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός αλλαγής τοπικών συντεταγμένων $\pi_- \circ \pi_+^{-1}$.

Οι π_+, π_- είναι οι στερεογραφικές προβολές ως προς τον βόρειο και τον νότιο πόλο, αντίστοιχα.

7. Να ευρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ στο σημείο $(1, 0, 0)$.

8. Να ευρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο της σφαίρας

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

σε κάθε σημείο της.

9. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία C^∞ συνάρτηση.
(α) Να αποδειχθεί οτι το σύνολο

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x \cdot f(\frac{y}{x}), \quad x \neq 0\right\}$$

είναι λεία επιφάνεια.
(β) Να αποδειχθεί οτι το εφαπτόμενο επίπεδο της M σε οποιοδήποτε σημείο της διέρχεται από το $(0, 0, 0)$.

10. Εστω $a > 0$ και $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ η C^∞ απεικόνιση με

$$\phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au).$$

Να αποδειχθεί οτι το $M = \phi(\mathbb{R}^2)$ είναι λεία επιφάνεια και να ευρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε σημείο της. Η M λέγεται ελικοειδής επιφάνεια.

11. Εστω $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ η C^∞ απεικόνιση με

$$\phi(u, v) = (u, v^3, u - v)$$

και $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ η C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη με

$$\gamma(t) = (3t, t^6, 3t - t^2).$$

(α) Να αποδειχθεί οτι το $M = \phi(\mathbb{R}^2)$ είναι λεία επιφάνεια.
(β) Να αποδειχθεί οτι $\gamma(\mathbb{R}) \subset M$. Ποιά είναι η C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη $\phi^{-1} \circ \gamma$;
(γ) Να εκφραστεί η ταχύτητα $\dot{\gamma}(0)$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\left\{\dfrac{\partial\phi}{\partial u}(0,0), \dfrac{\partial\phi}{\partial v}(0,0)\right\}$ του εφαπτόμενου επιπέδου T_0M στο $\gamma(0) = (0, 0, 0)$.

12. Εστω $U = (0, 2\pi) \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2$ και ϕ, $\psi : U \to \mathbb{R}^3$ οι C^∞ απεικονίσεις με

$$\phi(u, v) = ((2 - v \sin\frac{u}{2}) \sin u, (2 - v \sin\frac{u}{2}) \cos u, v \cos\frac{u}{2}),$$

$$\psi(u, v) = ((2 - v \sin(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})) \sin u, (2 - v \sin(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})) \cos u, v \cos(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})).$$

(α) Να αποδειχθεί οτι $\phi(U) \cap \psi(U) = \phi(W_1) \cup \phi(W_2)$, όπου

$$W_1 = \{(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-1, 1) : \frac{\pi}{2} < u < 2\pi\},$$

$$W_2 = \{(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-1, 1) : 0 < u < \frac{\pi}{2}\}.$$

(β) Να αποδειχθεί οτι

$$(\psi^{-1} \circ \phi)(u, v) = \begin{cases} (u - \dfrac{\pi}{2}, v), & \text{όταν } (u, v) \in W_1, \\ (u + \dfrac{3\pi}{2}, -v), & \text{όταν } (u, v) \in W_2. \end{cases}$$

Κατά συνέπεια το σύνολο $M = \phi(U) \cup \psi(U)$ είναι λεία επιφάνεια. Το M λέγεται (ανοιχτή) ταινία του Möbius.
(γ) Να αποδειχθεί οτι η M δεν είναι προσανατολίσιμη επιφάνεια.

13. Εστω M_1 και M_2 δύο λείες επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$ για τις οποίες υπάρχει μία αμφιδιαφόριση επιφανειών $F : M_1 \to M_2$. Αν η M_1 είναι προσανατολίσιμη, να αποδειχθεί οτι και η M_2 είναι προσανατολίσιμη.

14. Να ευρεθούν όλες οι C^∞ παραμετρισμένες καμπύλες $\gamma : I \to S^2$, όπου $I \subset \mathbb{R}$ είναι κάποιο ανοιχτό διάστημα, με την ιδιότητα οτι για κάθε $t \in I$ η γ και ο μεσημβρινός που διέρχεται από το $\gamma(t)$ τέμνονται σχηματίζοντας μία σταθερή γωνία ω. Αυτές οι καμπύλες τις σφαίρας λέγονται λοξοδρομικές.

15. Εστω M η λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ που παραμετρίζεται ολικά από την $\phi : \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to M$ με

$$\phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \log(\cos v) + u).$$

Εστω $a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$ και $\gamma_1,\ \gamma_2 : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to M$ οι C^∞ παραμετρισμένες καμπύλες με $\gamma_i(t) = \phi(a_i, t),\ i = 1, 2$. Να αποδειχθεί οτι οι $\gamma_1,\ \gamma_2$ αποκόπτουν από κάθε παραμετρισμένη καμπύλη $\sigma_b : \mathbb{R} \to M$ με $\sigma_b(t) = \phi(t, b)$, όπου $b \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ένα κομμάτι σταθερού πάντα μήκους.

Κεφάλαιο 3

Καμπυλότητα

3.1 Ο τελεστής σχήματος

Έστω M μία λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ και $p \in M$. Όπως σημειώθηκε στο τέλος της παραγράφου 2.4, η M είναι τοπικά προσανατολίσιμη γύρω από το p. Συγκεκριμένα, αν $\phi : U \to M$ είναι μία τοπική παραμέτριση της M με $p \in \phi(U)$, τότε ορίζεται ο τοπικός προσανατολισμός $N : \phi(U) \to S^2$ με

$$N(\phi(u,v)) = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v}.$$

Ένας τέτοιος τοπικός προσανατολισμός λέγεται *τοπική απεικόνιση Gauss* γύρω από το σημείο p. Η N είναι λεία απεικόνιση επιφανειών. Ας σημειωθεί οτι ο αντίθετος τοπικός προσανατολισμός είναι επίσης απεικόνιση Gauss.

Το εφαπτόμενο επίπεδο $T_{N(p)}S^2$ στο σημείο $N(p) \in S^2$ είναι το κάθετο στο διάνυσμα $N(p)$ και συνεπώς $T_{N(p)}S^2 = T_pM$, σύμφωνα με το Παράδειγμα 2.3.2. Η παράγωγος της N στο σημείο p είναι λοιπόν μία γραμμική απεικόνιση $N_{*p} : T_pM \to T_pM$.

Ορισμός 3.1.1. Η γραμμική απεικόνιση $L_p = -N_{*p} : T_pM \to T_pM$ λέγεται *τελεστής σχήματος (ή απεικόνιση του Weingarten)* της M στο σημείο p.

Παραδείγματα 3.1.2. (α) Ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ είναι προσανατολίσιμη επιφάνεια με σταθερή απεικόνιση Gauss. Συνεπώς, ο τελεστής σχήματος είναι 0 σε κάθε σημείο του.

(β) Στον κύλινδρο $C_R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2\}$ με ακτίνα βάσης $R > 0$ θεωρούμε την τοπική παραμέτριση $\phi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to C_R$ με

$$\phi(u,v) = (R\cos u, R\sin u, v)$$

ώστε $\phi((0,2\pi) \times \mathbb{R}) = C_R \setminus \{(R,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$. Έχουμε

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = \begin{pmatrix} -R\sin u \\ R\cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

οπότε

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\times\frac{\partial\phi}{\partial v}=\begin{pmatrix}R\cos u\\ R\sin u\\ 0\end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, η απεικόνιση Gauss δίνεται από τον τύπο

$$N(\phi(u,v))=(\cos u,\sin u,0)$$

Αυτό συμφωνεί με το γεγονός οτι ο κύλινδρος είναι προσανατολίσιμη επιφάνεια, ως λεία επιφάνεια στάθμης κανονικής τιμής λείας συνάρτησης, και έχει ολικά ορισμένη απεικόνιση Gauss $N:C_R\to S^2$ με

$$N(x,y,z)=\frac{1}{R}\cdot(x,y,0)$$

για κάθε $(x,y,z)\in C_R$, από το Παράδειγμα 2.4.3. Παραγωγίζοντας, από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$N_{*\phi(u,v)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}N(\phi(u,v))=\begin{pmatrix}-\sin u\\ \cos u\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial u},$$

$$N_{*\phi(u,v)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial v}N(\phi(u,v))=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Συμπεραίνουμε, οτι ο πίνακας του τελεστή σχήματος στο σημείο $\phi(u,v)$ ως προς τη διατεταγμένη βάση $\left[\frac{\partial\phi}{\partial u},\frac{\partial\phi}{\partial v}\right]$ του εφαπτόμενου επιπέδου $T_{\phi(u,v)}C_R$ είναι

$$L_{\phi(u,v)}=-\frac{1}{R}\begin{pmatrix}1&0\\ 0&0\end{pmatrix}.$$

(γ) Η σφαίρα $S^2_R=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2+z^2=R^2\}$ ακτίνας $R>0$ είναι προσανατολίσιμη επιφάνεια και έχει μία ολικά ορισμένη απεικόνιση Gauss $N:S^2_R\to S^2$ που δίνεται από τον τύπο

$$N(x,y,z)=\frac{1}{R}\cdot(x,y,z)$$

Κατά συνέπεια, ο τελεστής σχήματος σε κάθε σημείο $p\in S^2_R$ είναι ο

$$L_p=-\frac{1}{R}\cdot id.$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τοπική παραμέτριση των σφαιρικών συντετεγμένων $\phi:(0,\pi)\times(0,2\pi)\to S^2_R$ με

$$\phi(u,v)=(R\sin u\cos v,R\sin u\sin v,R\cos u).$$

Εχουμε τότε

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}=\begin{pmatrix}R\cos u\cos v\\ R\cos u\sin v\\ -R\sin u\end{pmatrix},\quad\frac{\partial\phi}{\partial v}=\begin{pmatrix}-R\sin u\sin v\\ R\sin u\cos v\\ 0\end{pmatrix}$$

οπότε $E(u,v) = R^2$, $F(u,v) = 0$, $G(u,v) = R^2 \sin^2 u$ και

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| = \sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin u$$

ενώ

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} = \begin{pmatrix} R^2 \sin^2 u \cos v \\ R^2 \sin^2 u \sin v \\ R^2 \sin u \cos u \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, η απεικόνιση Gauss είναι

$$N(\phi(u,v)) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

και παραγωγίζοντας βρίσκουμε

$$N_{*\phi(u,v)}\left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u} N(\phi(u,v)) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u},$$

$$N_{*\phi(u,v)}\left(\frac{\partial \phi}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v} N(\phi(u,v)) = \begin{pmatrix} -\sin u \sin v \\ \sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v}.$$

Ο πίνακας του τελεστή σχήματος στο σημείο $\phi(u,v)$ ως προς τη διατεταγμένη βάση $\left[\frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v}\right]$ του εφαπτόμενου επιπέδου $T_{\phi(u,v)} S^2_R$ είναι λοιπόν

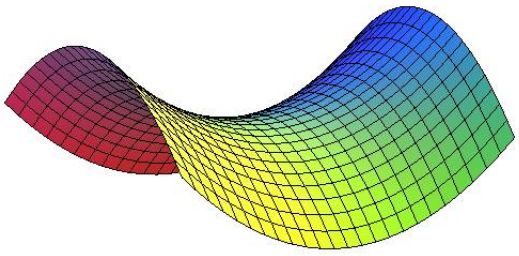
$$L_{\phi(u,v)} = -\frac{1}{R} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(δ) Το υπερβολικό παραβολοειδές ή σάγμα είναι η λεία επιφάνεια

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2 - x^2\}$$

και είναι προσανατολίσιμη, ως γράφημα λείας συνάρτησης, ενώ είναι ολικά παραμετρισμένη από την $\phi : \mathbb{R}^2 \to M$ με

$$\phi(u,v) = (u, v, v^2 - u^2).$$



Συνεπώς,

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2u\end{pmatrix},\quad \frac{\partial\phi}{\partial v}=\begin{pmatrix}0\\1\\2v\end{pmatrix}$$

και

$$N(\phi(u,v))=\frac{1}{\left\|\frac{\partial\phi}{\partial u}\times\frac{\partial\phi}{\partial v}\right\|}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial u}\times\frac{\partial\phi}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+\frac{1}{4}}}\cdot\begin{pmatrix}u\\-v\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Παραγωγίζοντας στο $(0,0)$ έχουμε

$$N_{*\phi(0,0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}(0,0)\right)=\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{(u,v)=(0,0)}N(\phi(u,v))=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=2\frac{\partial\phi}{\partial u}(0,0),$$

$$N_{*\phi(0,0)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial v}(0,0)\right)=\frac{\partial}{\partial v}\Big|_{(u,v)=(0,0)}N(\phi(u,v))=-2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=-2\frac{\partial\phi}{\partial v}(0,0).$$

Κατά συνέπεια, ο τελεστής σχήματος της M στο σημείο $(0,0,0)$ έχει πίνακα ως προς τη διατεταγμένη βάση $\left[\frac{\partial\phi}{\partial u},\frac{\partial\phi}{\partial v}\right]$ του $T_{\phi(0,0)}M$ που είναι

$$L_{\phi(0,0)}=\begin{pmatrix}-2&0\\0&2\end{pmatrix}.$$

Η κυριότερη ιδιότητα του τελεστή σχήματος είναι η ακόλουθη.

Πρόταση 3.1.3. *Ο τελεστής σχήματος $L_p:T_pM\to T_pM$ σε οποιοδήποτε σημείο p μίας λείας επιφάνειας M είναι αυτοσυζυγής, δηλαδή*

$$\langle L_p(X),Y\rangle=\langle X,L_p(Y)\rangle$$

για κάθε X, $Y\in T_pM$.

Απόδειξη. Έστω $\phi:U\to M$ μία τοπική παραμέτριση της M. Αρκεί να δείξουμε οτι

$$\langle L_{\phi(u,v)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\right),\frac{\partial\phi}{\partial v}\rangle=\langle\frac{\partial\phi}{\partial u},L_{\phi(u,v)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)\rangle.$$

Επειδή $\langle N(\phi(u,v)),\frac{\partial\phi}{\partial u}\rangle=0$ για κάθε $(u,v)\in U$, παραγωγίζοντας ως προς τη μεταβλητή v έχουμε

$$\langle N_{*\phi(u,v)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial v}\right),\frac{\partial\phi}{\partial u}\rangle+\langle N(\phi(u,v)),\frac{\partial^2\phi}{\partial v\partial u}\rangle=0.$$

Όμοια, παραγωγίζοντας ως προς u την $\langle N(\phi(u,v)),\frac{\partial\phi}{\partial v}\rangle=0$ έχουμε

$$\langle N_{*\phi(u,v)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\right),\frac{\partial\phi}{\partial v}\rangle+\langle N(\phi(u,v)),\frac{\partial^2\phi}{\partial u\partial v}\rangle=0.$$

Επειδή η ϕ είναι C^∞ όμως

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial v\partial u} = \frac{\partial^2\phi}{\partial u\partial v}$$

σύμφωνα με το Θεώρημα του Schwarz. Κατά συνέπεια,

$$\langle N_{*\phi(u,v)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial v}\right), \frac{\partial\phi}{\partial u}\rangle = \langle N_{*\phi(u,v)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\right), \frac{\partial\phi}{\partial v}\rangle. \quad \square$$

3.2 Η δεύτερη θεμελιώδης μορφή

Έστω M μία λεία επιφάνεια και $p \in M$. Επειδή ο τελεστής σχήματος $L_p : T_pM \to T_pM$ είναι αυτοσυζυγής, σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.3, ορίζεται στο εφαπτόμενο επίπεδο T_pM μία συμμετρική, διγραμμική μορφή στην οποία αντιστοιχεί η τετραγωνική μορφή $II_p : T_pM \to \mathbb{R}$ που δίνεται από τον τύπο

$$II_p(X) = \langle L_p(X), X\rangle$$

για κάθε $X \in T_pM$ και λέγεται *δεύτερη θεμελιώδης μορφή* της M στο σημείο p. Η εξάρτηση της II_p από το p είναι λεία. Όπως ο τελεστής σχήματος, η II_p εξαρτάται από την επιλογή απεικόνισης Gauss N σε μία περιοχή του p μόνο ώς προς το πρόσημο.

Ένας χρήσιμος τύπος για τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή δίνεται από το παρακάτω.

Λήμμα 3.2.1. *Εστω $X \in T_pM$ και $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ μία C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη, για κάποιο $\epsilon > 0$, με $\gamma(0) = p$ και $\dot\gamma(0) = X$. Τότε*

$$II_p(X) = \langle\ddot\gamma(0), N(p)\rangle.$$

Απόδειξη. Επειδή $\langle\dot\gamma(t), N(\gamma(t))\rangle = 0$ για κάθε $t \in I$, παραγωγίζοντας έχουμε

$$0 = \langle\ddot\gamma(0), N(\gamma(0))\rangle + \langle\dot\gamma(0), N_{*\gamma(0)}(\dot\gamma(0))\rangle = \langle\ddot\gamma(0), N(p)\rangle - \langle X, L_p(X)\rangle. \quad \square$$

Ορισμός 3.2.2. Έστω M μία λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ και $p \in M$. Επιλέγουμε μία απεικόνιση Gauss σε μία περιοχή του p στην M. Αν $X \in T_pM$ και $I_p(X) = \|X\| = 1$, ο πραγματικός αριθμός $II_p(X) = II_p(-X)$ λέγεται *κανονική καμπυλότητα* της M στο σημείο p στην κατεύθυνση του X.

Από το προηγούμενο Λήμμα 3.2.1 προκύπτει οτι το διάνυσμα $II_p(X)N(p)$ είναι η κάθετη στην M συνιστώσα της επιτάχυνσης στο p μίας οποιασδήποτε C^∞ παραμετρισμένης καμπύλης γ που διέρχεται από το p με ταχύτητα X. Η γεωμετρική σημασία της κανονικής καμπυλότητας γίνεται σαφέστερη, αν θεωρήσουμε κάθετες τομές της επιφάνειας M. Συγκεκριμένα, τα μοναδιαία διανύσματα $X \in T_pM$ και $N(p)$ ορίζουν τον 2-διάστατο υπόχωρο $Q_X = \{tX + sN(p) : (t, s) \in \mathbb{R}^2\}$ και λέγεται η κάθετη τομή της M που ορίζεται από το X. Το σύνολο $M \cap (p + Q_X)$ πολύ κοντά στο σημείο p είναι το ίχνος μίας C^∞ παραμετρισμένης καμπύλης με το μήκος της γ που διέρχεται από το $p = \gamma(0)$ με ταχύτητα X. Αφού το $\ddot\gamma(0)$ είναι κάθετο στο $\dot\gamma(0) = X$ και βρίσκεται πάνω στο επίπεδο Q_X, αναγκαστικά

$$\frac{1}{\kappa(0)} \cdot \ddot\gamma(0) = \pm N(p)$$

όπου κ είναι η καμπυλότητα της γ. Συνεπώς, $|II_p(X)| = \kappa(0)$.

Επειδή ο τελεστής σχήματος L_p είναι αυτοσυζυγής, έχει δύο πραγματικές ιδιοτιμές $k_1(p)$ και $k_2(p)$, των οποίων οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι είναι κάθετες ευθείες στο T_pM, όταν $k_1(p) \neq k_2(p)$ και λέγονται *κύριες κατευθύνσεις*. Οι ιδιοτιμές $k_1(p)$ και $k_2(p)$ του L_p λέγονται *κύριες καμπυλότητες* της M στο σημείο p. Σε κάθε περίπτωση ο L_p διαγωνοποιείται, σύμφωνα με το Φασματικό Θεώρημα. Επιπλέον, η δεύτερη θεμελιώδης μορφή στο p, ως συνάρτηση $II_p : T_pM \to \mathbb{R}$ παίρνει ακρότατες τιμές στον μοναδιαίο κύκλο $\{X \in T_PM : \|X\| = 1\}$ τις $k_1(p)$ και $k_2(p)$. Με άλλα λόγια η επιφάνεια M παρουσιάζει στο σημείο p τη μέγιστη και την ελάχιστη καμπύλωση στις κατευθύνσεις των δύο κύριων διευθύνσεων. Αν οι κύριες καμπυλότητες στο p είναι ίσες, δηλαδή ο τελεστής σχήματος έχει μία διπλή ιδιοτιμή, τότε η M παρουσιάζει στο σημείο p την ίδια καμπύλωση προς όλες τις κατευθύνσεις.

Ορισμός 3.2.3. Ενα σημείο $p \in M$ λέγεται *ομφαλικό* αν οι κύριες καμπυλότητες της M στο p είναι ίσες ή ισοδύναμα ο τελεστής σχήματος στο p είναι διαγώνιος, δηλαδή υπάρχει $k \in \mathbb{R}$ ώστε $L_p = k \cdot id$.

Για παράδειγμα, σε ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ και σε μία σφαίρα με οποιαδήποτε ακτίνα $R > 0$ όλα τα σημεία είναι ομφαλικά. Όπως είδαμε στα Παραδείγματα 3.1.2, στην περίπτωση του επιπέδου ο τελεστής σχήματος είναι ο μηδενικός, ενώ στην περίπτωση της σφαίρας είναι διαγώνιος με διπλή ιδιοτιμή την $-\dfrac{1}{R}$. Αυτές οι δύο επιφάνειες είναι οι μοναδικές στις οποίες συμβαίνει αυτό το φαινόμενο, δηλαδή όλα τα σημεία είναι ομφαλικά, όπως δείχνει το ακόλουθο.

Θεώρημα 3.2.4. *Εστω M μία (κατά τόξα) συνεκτική λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$. Αν όλα τα σημεία της M είναι ομφαλικά, τότε η M περιέχεται σε επίπεδο ή σε σφαίρα.*

Απόδειξη. Έστω $\phi : U \to M$ μία τοπική παραμέτριση της M, όπου το $U \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα (κατά τόξα) συνεκτικό ανοιχτό σύνολο, που ορίζει την αντίστοιχη απεικόνιση Gauss $N : \phi(U) \to S^2$. Επειδή υποθέτουμε οτι όλα τη σημεία της M είναι ομφαλικά, υπάρχει μία C^∞ συνάρτηση $k : U \to \mathbb{R}$ ώστε $L_{\phi(u,v)} = k(u,v) \cdot id$ για κάθε $(u,v) \in U$. Δηλαδή,

$$-k(u,v) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u} = N_{*\phi(u,v)}\left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u} N(\phi(u,v)),$$

$$-k(u,v) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v} = N_{*\phi(u,v)}\left(\frac{\partial \phi}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v} N(\phi(u,v))$$

για κάθε $(u,v) \in U$. Η συνάρτηση $|k|$ είναι καλά ορισμένη σε ολόκληρη την επιφάνεια M και είναι συνεχής.

Παραγωγίζοντας την πρώτη ισότητα ως προς v και τη δεύτερη ως προς u παίρνουμε

$$\frac{\partial k}{\partial v} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u} + k(u,v) \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial v \partial u} = -\frac{\partial^2}{\partial v \partial u} N(\phi(u,v)),$$

$$\frac{\partial k}{\partial u} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v} + k(u,v) \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} = -\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} N(\phi(u,v)).$$

Από το Θεώρημα του Schwarz προκύπτει οτι

$$\frac{\partial k}{\partial v}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial u}-\frac{\partial k}{\partial u}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial v}=0$$

και συνεπώς $\dfrac{\partial k}{\partial v}=\dfrac{\partial k}{\partial u}=0$ στο U, αφού τα $\dfrac{\partial \phi}{\partial u},\dfrac{\partial \phi}{\partial v}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Κατά συνέπεια, η συνάρτηση k είναι σταθερή στο U.

Λόγω της συνέχειας, το σύνολο $C=\{p\in M : L_p=0\}$ είναι κλειστό στην M. Όταν όλα τα σημεία της M είναι ομφαλικά, τα προηγούμενα δείχνουν οτι το C είναι επίσης ανοιχτό στην M. Αν όλα τα σημεία της M είναι ομφαλικά, η M είναι συνεκτική και $C\neq\varnothing$, τότε $L_p=0$ για κάθε $p\in M$. Στην περίπτωση αυτή, η απεικόνιση Gauss $N:\phi(U)\to S^2$ είναι σταθερή για κάθε τοπική παραμέτριση $\phi:U\to M$ της M, με το $U\subset\mathbb{R}^2$ (κατά τόξα) συνεκτικό ανοιχτό σύνολο. Συνεπώς, η C^∞ συνάρτηση $f:U\to\mathbb{R}$ με

$$f(u,v)=\langle\phi(u,v),N\rangle$$

είναι σταθερή, γιατί

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\langle\frac{\partial \phi}{\partial u},N\rangle=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial v}=\langle\frac{\partial \phi}{\partial v},N\rangle=0,$$

δηλαδή, υπάρχει $d\in\mathbb{R}$ ώστε $\langle\phi(u,v),N\rangle=d$ για κάθε $(u,v)\in U$. Με άλλα λόγια, αν

$$N=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},$$

τότε το $\phi(U)$ περιέχεται στο επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ με εξίσωση $ax+by+cz=d$. Λόγω της συνεκτικότητας, το εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε σημείο της M είναι κάθετο στον ίδιο 1-διάστατο υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$, που παράγεται από N. Συνεπώς, η M περιέχεται στο επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ με εξίσωση $ax+by+cz=d$.

Έστω τώρα οτι υπάρχει $p\in M$ ώστε $L_p\neq 0$. Σύμφωνα με όσα προηγήθηκαν, τότε $L_p\neq 0$ για κάθε $p\in M$, λόγω της συνεκτικότητας της M. Για κάθε τοπική παραμέτριση $\phi:U\to M$, με το $U\subset\mathbb{R}^2$ (κατά τόξα) συνεκτικό ανοιχτό σύνολο, θεωρούμε τη C^∞ απεικόνιση $g:U\to\mathbb{R}^3$ με

$$g(u,v)=\phi(u,v)+\frac{1}{k}N(\phi(u,v)).$$

Έχουμε

$$\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{\partial \phi}{\partial u}+\frac{1}{k}N_{*\phi(u,v)}\left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\right)=0,$$
$$\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial \phi}{\partial v}+\frac{1}{k}N_{*\phi(u,v)}\left(\frac{\partial \phi}{\partial v}\right)=0$$

στο U και συνεπώς η g είναι σταθερή. Δηλαδή, υπάρχει $q\in\mathbb{R}^3$ ώστε

$$\phi(u,v)-q=-\frac{1}{k}N(\phi(u,v))$$

για κάθε $(u, v) \in U$. Αυτό σημαίνει οτι το $\phi(U)$ περιέχεται στη σφαίρα με κέντρο το σημείο q και ακτίνα $\frac{1}{|k|}$. Η απεικόνιση $h : M \to \mathbb{R}^3$ με

$$h(p) = p + \frac{1}{k}N(p)$$

είναι καλά ορισμένη, αφού αν επιλέξουμε τοπικά ως απεικόνιση Gauss την $-N$, τότε στη θέση του k θα έχουμε το $-k$. Επειδή η h είναι τοπικά σταθερή στην M, όπως δείξαμε και η M είναι συνεκτική, η h είναι σταθερή. Συνεπώς, η M περιέχεται στη σφαίρα κέντρου q και ακτίνας $\frac{1}{|k|}$. □

Στο συμπέρασμα του προηγούμενου Θεωρήματος 3.2.4, η επιφάνεια M περιέχεται σε επίπεδο ή σε σφαίρα ως ανοιχτό υποσύνολό του, αντίστοιχα.

Πόρισμα 3.2.5. *Εστω M μία (κατά τόξα) συνεκτική λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$. Αν η M είναι συμπαγής και όλα τα σημεία της είναι ομφαλικά, τότε η M είναι μία σφαίρα.*

3.3 Καμπυλότητα Gauss και μέση καμπυλότητα

Έστω M μία λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ και $p \in M$. Επιλέγουμε τοπικά σε μία περιοχή του p μία απεικόνιση Gauss N. Αν $L_p : T_pM \to T_pM$ είναι ο τελεστής σχήματος, τότε ο πραγματικός αριθμός

$$K(p) = \det L_p$$

είναι ανεξάρτητος από την επιλογή της απεικόνισης Gauss, γιατί $\det L_p = \det(-L_p)$, αφού το εφαπτόμενο επίπεδο T_pM έχει διάσταση 2. Η τιμή $K(p)$ λέγεται *καμπυλότητα Gauss* της M στο σημείο p. Η $K : M \to \mathbb{R}$ είναι μία καλά ορισμένη λεία συνάρτηση.

Ο πραγματικός αριθμός

$$H(p) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}L_p$$

λέγεται *μέση καμπυλότητα* της M στο σημείο p και το πρόσημό της εξαρτάται από την επιλογή τοπικά σε μία περιοχή του p της απεικόνιση Gauss. Όμως, η $|H| : M \to [0, +\infty)$ είναι μία καλά ορισμένη, συνεχής συνάρτηση. Ας σημειωθεί οτι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του τελεστή σχήματος L_p είναι το

$$x^2 - 2H(p)x + K(p)$$

και συνεπώς οι κύριες καμπυλότητες στο p είναι $H(p) \pm \sqrt{(H(p))^2 - K(p)}$. Ειδικά, το p είναι ομφαλικό σημείο τότε και μόνο τότε όταν $K(p) = (H(p))^2$.

Το σημείο $p \in M$ λέγεται

- *επίπεδο*, όταν $L_p = 0$.
- *παραβολικό*, όταν $L_p \neq 0$, και $K(p) = 0$.
- *ελλειπτικό*, όταν $K(p) > 0$.
- *υπερβολικό*, όταν $K(p) < 0$.

Από τα Παραδείγματα 3.1.2, κάθε σημείο ενός επιπέδου είναι επίπεδο και ομφαλικό με μηδενική καμπυλότητα Gauss, κάθε σημείο ενός κυλίνδρου είναι παραβολικό με μηδενική

καμπυλότητα Gauss, ενώ όλα τα σημεία μίας σφαίρας ακτίνας $R > 0$ είναι ελλειπτικά και ομφαλικά με καμπυλότητα Gauss $\frac{1}{R^2}$. Το σημείο $(0,0,0)$ του σάγματος

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2 - x^2\}$$

είναι υπερβολικό, αφού η καμπυλότητα Gauss της M σε αυτό είναι -4.

Στη συνέχεια της παρούσας παραγράφου θα υπολογίσουμε την καμπυλότητα Gauss, τη μέση καμπυλότητα, αλλά και τον τελεστή σχήματος από μία τοπική παραμέτριση της επιφάνειας. Εστω $\phi : U \to M$ μία τοπική παραμέτριση της M, και $N : \phi(U) \to S^2$ με

$$N(\phi(u,v)) = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v}\right\|} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v}$$

η αντίστοιχη απεικόνιση Gauss. Έστω οτι ο πίνακας του τελεστή σχήματος $L_{\phi(u,v)}$ ως προς τη διατεταγμένη βάση $\left[\frac{\partial\phi}{\partial u}, \frac{\partial\phi}{\partial v}\right]$ του εφαπτόμενου επιπέδου $T_{\phi(u,v)}M$ είναι

$$L_{\phi(u,v)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Αν $X \in T_{\phi(u,v)}M$ και $X = X_1\frac{\partial\phi}{\partial u} + X_2\frac{\partial\phi}{\partial v}$, έχουμε

$$L_{\phi(u,v)}(X) = -X_1 N_{*\phi(u,v)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\right) - X_2 N_{*\phi(u,v)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)$$

και συνεπώς

$$II_{\phi(U,v)}(X) = e(u,v)X_1^2 + 2f(u,v)X_1X_2 + g(u,v)X_2^2,$$

όπου

$$e(u,v) = -\langle N_{*\phi(u,v)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\right), \frac{\partial\phi}{\partial u}\rangle = \langle N(\phi(u,v)), \frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}\rangle,$$

$$f(u,v) = -\langle N_{*\phi(u,v)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial v}\right), \frac{\partial\phi}{\partial u}\rangle = \langle N(\phi(u,v)), \frac{\partial^2\phi}{\partial v\partial u}\rangle,$$

$$g(u,v) = -\langle N_{*\phi(u,v)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial v}\right), \frac{\partial\phi}{\partial v}\rangle = \langle N(\phi(u,v)), \frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}\rangle.$$

Οι C^∞ συναρτήσεις e, f, $g : U \to \mathbb{R}$ λέγονται οι *συντελεστές της δεύτερης θεμελιώδους μορφής* ως προς την τοπική παραμέτριση ϕ της M.

Από την άλλη μεριά,

$$e(u,v) = -\langle N_{*\phi(u,v)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\right), \frac{\partial\phi}{\partial u}\rangle = \langle a_{11}(u,v)\frac{\partial\phi}{\partial u} + a_{21}(u,v)\frac{\partial\phi}{\partial v}, \frac{\partial\phi}{\partial u}\rangle$$

$$= a_{11}(u,v)E(u,v) + a_{21}(u,v)F(u,v)$$

και όμοια

$$f(u,v) = a_{12}(u,v)E(u,v) + a_{22}(u,v)F(u,v) = a_{11}F(u,v) + a_{21}(u,v)G(u,v),$$

$$g(u,v) = a_{12}(u,v)F(u,v) + a_{22}(u,v)G(u,v).$$

Δηλαδή, σε μορφή πινάκων

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Κατά συνέπεια η καμπυλότητα Gauss δίνεται από τον τύπο

$$K(\phi(u,v)) = \frac{e(u,v)g(u,v) - (f(u,v))^2}{E(u,v)G(u,v) - (F(u,v))^2}$$

και η μέση καμπυλότητα από τον τύπο

$$H(\phi(u,v)) = \frac{e(u,v)G(u,v) - 2f(u,v)F(u,v) + g(u,v)E(u,v)}{2(E(u,v)G(u,v) - (F(u,v))^2)}$$

για κάθε $(u,v) \in U$.

Παράδειγμα 3.3.1. Έστω $U \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f : U \to \mathbb{R}$ μία C^∞ συνάρτηση. Το γράφημα $M = \{(u,v,f(u,v)) : (u,v) \in U\}$ της f είναι ολικά παραμετρισμένο από τη $\phi : U \to M$ με $\phi(u,v) = (u,v,f(u,v))$, για την οποία έχουμε

$$\frac{\partial\phi}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Οι συντελεστές της πρώτης θεμελιώδους μορφής είναι

$$E(u,v) = \left\| \frac{\partial\phi}{\partial u} \right\|^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2,$$

$$F(u,v) = \langle \frac{\partial\phi}{\partial u}, \frac{\partial\phi}{\partial v} \rangle = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v},$$

$$G(u,v) = \left\| \frac{\partial\phi}{\partial v} \right\|^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2,$$

Συνεπώς,

$$\left\| \frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v} \right\| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}.$$

Επιπλέον,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial u\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial v^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{pmatrix}$$

και οι συντελεστές της δεύτερης θεμελιώδους μορφής είναι

$$e = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det(\frac{\partial\phi}{\partial u}, \frac{\partial\phi}{\partial v}, \frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \end{vmatrix},$$

$$f=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\det\Big(\frac{\partial\phi}{\partial u},\frac{\partial\phi}{\partial v},\frac{\partial^2\phi}{\partial u\partial v}\Big)=\frac{1}{\sqrt{1+\big(\frac{\partial f}{\partial u}\big)^2+\big(\frac{\partial f}{\partial v}\big)^2}}\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\frac{\partial f}{\partial u}&\frac{\partial f}{\partial v}&\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\end{vmatrix},$$

$$g=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\det\Big(\frac{\partial\phi}{\partial u},\frac{\partial\phi}{\partial v},\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}\Big)=\frac{1}{\sqrt{1+\big(\frac{\partial f}{\partial u}\big)^2+\big(\frac{\partial f}{\partial v}\big)^2}}\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\frac{\partial f}{\partial u}&\frac{\partial f}{\partial v}&\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\end{vmatrix}.$$

Συνεπώς, η καμπυλότητα Gauss δίνεται από τον τύπο

$$K(u,v,f(u,v))=\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}-\big(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\big)^2}{\big[1+\big(\frac{\partial f}{\partial u}\big)^2+\big(\frac{\partial f}{\partial v}\big)^2\big]^2}.$$

Η καμπυλότητα Gauss παραμένει αναλλοίωτη από ισομετρίες του $\mathbb{R}^3$, όπως και η μέση καμπυλότητα κατ΄ απόλυτη τιμή. Πράγματι, αν M είναι μία λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ και $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ είναι μία C^∞ αμφιδιαφόριση, τότε το $h(M)$ είναι επίσης λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$. Μάλιστα, αν $\phi:U\to M$ είναι μία τοπική παραμέτριση της M, όπου το $U\subset\mathbb{R}^2$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο, τότε η $h\circ\phi:U\to h(M)$ είναι τοπική παραμέτριση της $h(M)$. Έστω ότι $h\in I(\mathbb{R}^3)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.3.4, υπάρχουν μοναδικά $A\in O(3,\mathbb{R})$ και $a\in\mathbb{R}^3$ ώστε η h να δίνεται από τον τύπο $h(x)=Ax+a$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^3$. Αφού $Dh(x)=A$, για όλα τα $x\in\mathbb{R}^3$, αν E, F, G είναι οι συντελεστές της πρώτης θεμελιώδους μορφής της M ως προς την τοπική παραμέτριση ϕ, τότε η $h(M)$ έχει τους ίδιους συντελεστές της πρώτης θεμελιώδους μορφής ως προς την τοπική παραμέτριση $h\circ\phi$, γιατί

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial u}(h\circ\phi)(u,v)\Big\|^2=\Big\|A\big(\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v)\big)\Big\|^2=\Big\|\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v)\Big\|^2=E(u,v)$$

από τον κανόνα της αλυσίδας και όμοια

$$\big\langle\frac{\partial}{\partial u}(h\circ\phi)(u,v),\frac{\partial}{\partial v}(h\circ\phi)(u,v)\big\rangle=F(u,v),\quad\Big\|\frac{\partial}{\partial v}(h\circ\phi)(u,v)\Big\|^2=G(u,v)$$

για κάθε $(u,v)\in U$. Παραγωγίζοντας δύο φορές έχουμε

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}(h\circ\phi)(u,v)=\frac{\partial}{\partial u}\big(A\big(\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v)\big)\big)=A\big(\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}(u,v)\big),$$

αφού ο πίνακας A είναι σταθερός και όμοια

$$\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}(h\circ\phi)(u,v)=A\big(\frac{\partial^2\phi}{\partial u\partial v}(u,v)\big),\quad\frac{\partial^2}{\partial v^2}(h\circ\phi)(u,v)=A\big(\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}(u,v)\big).$$

Συνεπώς, αν e, f, g είναι οι συντελεστές της δεύτερης θεμελιώδους μορφής της M ως προς την τοπική παραμέτριση ϕ, τότε οι συντελεστές της δεύτερης θεμελιώδους μορφής της $h(M)$ ως προς την τοπική παραμέτριση $h\circ\phi$ είναι

$$\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\det\bigg(\frac{\partial}{\partial u}(h\circ\phi)(u,v),\frac{\partial}{\partial v}(h\circ\phi)(u,v),\frac{\partial^2}{\partial u^2}(h\circ\phi)(u,v)\bigg)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\big\langle (\det A)\cdot A\big(\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v)\big), A\big(\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}(u,v)\big)\big\rangle = (\det A)\cdot e(u,v)$$

από την Πρόταση 1.4.1 και όμοια

$$\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\det\left(\frac{\partial}{\partial u}(h\circ\phi)(u,v), \frac{\partial}{\partial v}(h\circ\phi)(u,v), \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}(h\circ\phi)(u,v)\right) = (\det A)\cdot f(u,v),$$

$$\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\det\left(\frac{\partial}{\partial u}(h\circ\phi)(u,v), \frac{\partial}{\partial v}(h\circ\phi)(u,v), \frac{\partial^2}{\partial v^2}(h\circ\phi)(u,v)\right) = (\det A)\cdot g(u,v).$$

Κατά συνέπεια η καμπυλότητα Gauss της $h(M)$ στο σημείο $h(p)$ είναι ίση με την καμπυλότητα Gauss της M στο σημείο p για κάθε $p\in M$ και το ίδιο ισχύει για τις απόλυτες τιμές των μέσων καμπυλοτήτων.

3.4 Τοπική γεωμετρία και καμπυλότητα Gauss

Το πρόσημο της καμπυλότητας Gauss μίας λείας επιφάνειας σε ένα σημείο έχει την ακόλουθη τοπική γεωμετρική ερμηνεία.

Πρόταση 3.4.1. *Έστω M μία λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ και $p\in M$.*
(α) Αν το p είναι ελλειπτικό σημείο της M, τότε υπάρχει μία περιοχή του p στην M, η οποία κείται στην ίδια μεριά του επιπέδου $p+T_pM$ μέσα στον χώρο $\mathbb{R}^3$.
(β) Αν το p είναι υπερβολικό σημείο της M, τότε σε κάθε περιοχή του p στην M υπάρχει ζεύγος σημείων της M που βρίσκονται σε διαφορετικές μεριές του επιπέδου $p+T_pM$ στον $\mathbb{R}^3$.

Απόδειξη. Θεωρούμε μία τοπική παραμέτριση $\phi: U\to M$, όπου το $U\subset\mathbb{R}^2$ είναι ένα κυρτό ανοιχτό σύνολο με $(0,0)\in U$, ώστε $p=\phi(0,0)$. Έστω $N:\phi(U)\to S^2$ η αντίστοιχη απεικόνιση Gauss. Η μεριά του επιπέδου $p+T_pM$ στον $\mathbb{R}^3$ στην οποία βρίσκεται το σημείο $\phi(u,v)$ εξαρτάται από το πρόσημο της τιμής

$$d(u,v) = \langle\phi(u,v)-p, N(p)\rangle.$$

Η συνάρτηση $d:U\to\mathbb{R}$ που ορίζεται από τον τύπο αυτό είναι C^∞. Σύμφωνα με το Θεώρημα του Taylor

$$\phi(u,v)-p = D\phi(0,0)\cdot\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}(0,0)u^2+2\frac{\partial^2\phi}{\partial u\partial v}(0,0)uv+\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}(0,0)v^2\right)+R(u,v)$$

όπου

$$\lim_{(u,v)\to(0.0)}\frac{\|R(u,v)\|}{u^2+v^2}=0.$$

Συνεπώς,

$$d(u,v) = \frac{1}{2}\left(\langle\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}(0,0), N(p)\rangle)u^2+2\langle\frac{\partial^2\phi}{\partial u\partial v}(0,0), N(p)\rangle uv+\langle\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}(0,0), N(p)\rangle v^2\right)$$

$$+\langle R(u,v), N(p)\rangle$$

$$= \frac{1}{2} II_p\big(D\phi(0,0)\cdot\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\big) + \langle R(u,v),N(p)\rangle$$

και

$$\lim_{(u,v)\to(0.0)} \frac{\langle R(u,v),N(p)\rangle}{\|D\phi(0,0)\cdot\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\|^2} = 0,$$

αφού η $D\phi(0,0) : \mathbb{R}^2 \to T_pM$ είναι γραμμικός ισομορφισμός. Έστω οτι οι κύριες καμπυλότητες της M στο p είναι $k_1 \le k_2$.

(α) Αν το p είναι ελλειπτικό σημείο, μπορούμε να υποθέσουμε οτι $0 < k_1 \le k_2$. Επειδή

$$\frac{II_p(X)}{\|X\|^2} \ge k_1 > 0$$

για κάθε $X \in T_pM$ με $X \neq 0$, έχουμε

$$\frac{d(u,v)}{\|D\phi(0,0)\cdot\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\|^2} \ge k_1 + \frac{\langle R(u,v),N(p)\rangle}{\|D\phi(0,0)\cdot\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\|^2}$$

και συνεπώς υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $d(u,v) > 0$ όταν $0 < \sqrt{u^2+v^2} < \delta$.

(β) Αν το p είναι υπερβολικό, τότε $k_1 < 0 < k_2$ και υπάρχουν $(u_1,v_1) \neq (0,0)$ και $(u_2,v_2) \neq (0,0)$ ώστε

$$\frac{II_p\big(D\phi(0,0)\cdot\begin{pmatrix}tu_1\\tv_1\end{pmatrix}\big)}{\|D\phi(0,0)\cdot\begin{pmatrix}tu_1\\tv_1\end{pmatrix}\|^2} = k_1 < 0 < k_2 = \frac{II_p\big(D\phi(0,0)\cdot\begin{pmatrix}tu_2\\tv_2\end{pmatrix}\big)}{\|D\phi(0,0)\cdot\begin{pmatrix}tu_2\\tv_2\end{pmatrix}\|^2}$$

για κάθε $t \neq 0$. Συνεπώς, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $d(tu_1,tv_1) < 0 < d(tu_2,tv_2)$ για $0 < |t| < \delta$, που σημαίνει οτι τα σημεία $\phi(tu_1,tv_1)$ και $\phi(tu_2,tv_2)$ βρίσκονται σε διαφορετικές μεριές του επιπέδου $p + T_pM$. □

Μία *ασυμπτωτική κατεύθυνση* της λείας επιφάνειας M στο σημείο $p \in M$ είναι μία κατεύθυνση στο εφαπτόμενο επίπεδο T_pM κατά την οποία η κανονική καμπυλότητα είναι μηδενική. Μία *ασυμπτωτική καμπύλη* στην M είναι μία κανονική C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : I \to M$, όπου το $I \subset \mathbb{R}$ είναι ένα ανοιχτό διάστημα, τέτοια ώστε το διάνυσμα της ταχύτητας $\dot\gamma(t)$ παράγει μία ασυμπτωτική κατεύθυνση στο $T_{\gamma(t)}M$ για κάθε $t \in I$.

Πρόταση 3.4.2. *Για ένα σημείο $p \in M$ μία λείας επιφάνειας M στον $\mathbb{R}^3$ ισχύουν τα ακόλουθα.*
(α) Αν το p είναι ελλειπτικό σημείο, τότε δεν υπάρχουν ασυμπτωτικές κατευθύνσεις στο p.
(β) Αν το p είναι υπερβολικό, τότε υπάρχουν ακριβώς δύο ασυμπτωτικές κατευθύνσεις.
(γ) Αν το p είναι παραβολικό σημείο, τότε υπάρχει ακριβώς μία ασυμπτωτική κατεύθυνση στο p, η οποία μάλιστα είναι κύρια κατεύθυνση.
(δ) Αν το p είναι επίπεδο σημείο, τότε κάθε κατεύθυνση στο p είναι ασυμπτωτική.

Απόδειξη. (α) Έστω $\{X, Y\}$ μία ορθοκανονική βάση του T_pM που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του τελεστή σχήματος L_p. Αν το p είναι ελλειπτικό, οι αντίστοιχες κύριες καμπυλότητες k_1, k_2 στο p είναι μη-μηδενικές και ομόσημες. Για κάθε $Z \in T_pM$ με $\|Z\| = 1$ υπάρχουν μοναδικά a, $b \in \mathbb{R}$ με $a^2 + b^2 = 1$ ώστε $Z = aX + bY$ και η κανονική καμπυλότητα κατά την κατεύθυνση του Z είναι

$$II_p(Z) = k_1 a^2 + k_2 b^2 \neq 0.$$

(β) Υπάρχει μοναδικό $0 \leq \theta < 2\pi$ ώστε $a = \cos\theta$ και $b = \sin\theta$, οπότε

$$II_p(Z) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta.$$

Αν λοιπόν το p είναι υπερβολικό σημείο, τότε οι κύριες καμπυλότητες k_1, k_2 είναι μη-μηδενικές και ετερόσημες. Συνεπώς η τριγωνομετρική εξίσωση

$$k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta = 0$$

έχει ακριβώς δύο λύσεις στο διάστημα $[0, 2\pi)$.
(γ) Όταν το σημείο p είναι παραβολικό, τότε $k_1 \neq 0$ και $k_2 = 0$, οπότε $II_p(Z) = k_1 \cos^2\theta$, που είναι μηδέν ακριβώς τότε όταν $X = \pm Y$. Το (δ) είναι τετριμένο. □

Η κωνική τομή στο εφαπτόμενο επίπεδο T_pM με εξίσωση $II_p(Z) = \pm 1$ λέγεται *δείκτρια Dupin στο p*. Όταν το σημείο p είναι ελλειπτικό, η δείκτρια Dupin είναι έλλειψη, ενώ όταν είναι υπερβολικό, είναι ένα ζεύγος υπερβολών. Όταν το p είναι παραβολικό, η δείκτρια Dupin είναι ένα ζεύγος παράλληλων ευθειών. Αν το p είναι επίπεδο σημείο, η δείκτρια Dupin είναι το κενό σύνολο.

3.5 Συμπαγείς επιφάνειες και σφαίρες

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε το Θεώρημα των Hilbert-Liebmann σύμφωνα με το οποίο οι μοναδικές συμπαγείς και συνεκτικές λείες επιφάνειες στον χώρο $\mathbb{R}^3$ με σταθερή καμπυλότητα Gauss είναι οι σφαίρες. Μία βασική ιδιότητα των συμπαγών επιφανειών μέσα στον $\mathbb{R}^3$ είναι η ακόλουθη.

Θεώρημα 3.5.1. *Σε κάθε συμπαγή λεία επιφάνεια M μέσα στον χώρο $\mathbb{R}^3$ υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $p_0 \in M$ στο οποίο η καμπυλότητα Gauss είναι $K(p_0) > 0$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη C^∞ συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to [0, +\infty)$ με $f(p) = \|p\|^2$. Επειδή η M υποτίθεται οτι είναι συμπαγής, η f παίρνει μέγιστη τιμή στην M σε κάποιο σημείο $p_0 \in M$, δηλαδή $f(p) \leq f(p_0)$ για κάθε $p \in M$. Θα δείξουμε οτι $K(p_0) > 0$.

Είναι προφανές οτι $f(p_0) > 0$ και η M περιέχεται στην κλειστή μπάλλα του $\mathbb{R}^3$ με κέντρο το $(0, 0, 0)$ και ακτίνα $R = \sqrt{f(p_0)} > 0$. Έστω $X \in T_{p_0}M$ με $\|X\| = 1$ και $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ μία C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη, για κάποιο $\epsilon > 0$, με $\gamma(0) = p$ και $\dot\gamma(0) = X$. Τότε $(f \circ \gamma)'(0) = 0$ και $(f \circ \gamma)''(0) \leq 0$. Από την πρώτη έχουμε

$$0 = (f \circ \gamma)'(0) = 2\langle \dot\gamma(0), \gamma(0) \rangle = 2\langle X, p_0 \rangle.$$

Αυτό σημαίνει οτι το διάνυσμα θέσης p_0 στον $\mathbb{R}^3$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο $T_{p_0}M$, δηλαδή $T_{p_0}M = T_{p_0}S^2_R$. Από τη δεύτερη παίρνουμε

$$0 \geq (f \circ \gamma)''(0) = 2\langle \dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0)\rangle + 2\langle \gamma(0), \ddot{\gamma}(0)\rangle = 2 + 2\langle p_0, \ddot{\gamma}(0)\rangle$$

οπότε $\langle p_0, \ddot{\gamma}(0)\rangle \leq -1$.

Επειδή το διάνυσμα θέσης p_0 είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο $T_{p_0}M$, μπορούμε να επιλέξουμε σε μία περιοχή του p_0 στην M την απεικόνιση Gauss N ώστε $N(p_0) = \dfrac{1}{\|p_0\|} \cdot p_0$. Από το Λήμμα 3.2.1 έχουμε τώρα

$$II_{p_0}(X) = \langle \ddot{\gamma}(0), N(p_0)\rangle = \langle \ddot{\gamma}(0), \frac{1}{\|p_0\|} \cdot p_0\rangle \leq -\frac{1}{\|p_0\|}$$

για κάθε $X \in T_{p_0}M$ με $\|X\| = 1$. Συνεπώς, για την καμπυλότητα Gauss της M στο σημείο p_0 έχουμε

$$K(p_0) \geq \left(-\frac{1}{\|p_0\|}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\|p_0\|}\right) = \frac{1}{R^2} > 0. \quad \square$$

Πόρισμα 3.5.2. *Δεν υπάρχουν συμπαγείς λείες επιφάνειες μέσα στον χώρο $\mathbb{R}^3$ που έχουν παντού μη-θετική καμπυλότητα Gauss.*

Το κύριο τεχνικό μέρος του χαρακτηρισμού των σφαιρών στον $\mathbb{R}^3$ είναι το επόμενο θεώρημα του D. Hilbert. Η απόδειξη που παρουσιάζουμε είναι σχετικά πρόσφατη.

Θεώρημα 3.5.2. (D. Hilbert, 1902) *Έστω M μία λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ και $p \in M$. Έστω $\phi : U \to M$ μία τοπική παραμέτριση με $p \in \phi(U)$ και $N : \phi(U) \to S^2$ η αντίστοιχη απεικόνιση Gauss. Εστω k_1, $k_2 : \phi(U) \to \mathbb{R}$ οι συναρτήσεις των κυρίων καμπυλοτήτων, ώστε $k_1(p) \leq k_2(p)$. Υποθέτουμε οτι*
(α) το p είναι ελλειπτικό σημείο της M,
(β) η k_1 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο p και
(γ) η k_2 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο p.
Τότε το p είναι ομφαλικό σημείο της M.

Απόδειξη. Επειδή η καμπυλότητα Gauss παραμένει αναλλοίωτη από ισομετρίες του περιβάλλοντα χώρου $\mathbb{R}^3$, όπως είδαμε στο τέλος της παραγράφου 3.3, απεικονίζοντας με μία ισομετρία του $\mathbb{R}^3$, μπορούμε να υποθέσουμε οτι $p = (0,0,0)$ και $N(p) = e_3$, ενώ τα e_1, e_2 είναι ιδιοδιανύσματα του τελεστή σχήματος L_p. Αν η απαιτούμενη ισομετρία αντιστρέφει τον προσανατολισμό του $\mathbb{R}^3$, τότε οι κύριες καμπυλότητες αλλάζουν πρόσημο. Στη περίπτωση αυτή εναλλάσουμε τους ρόλους των k_1, k_2 και οι υποθέσεις (β) και (γ) εξακολουθούν να ισχύουν.

Επίσης από το Θεώρημα 2.1.4 μπορούμε να υποθέσουμε οτι υπάρχει μία C^∞ συνάρτηση $f : U \to \mathbb{R}$ ώστε η τοπική παραμέτριση ϕ να δίνεται απο τον τύπο $\phi(u,v) = (u,v,f(u,v))$, όπου $\phi(0,0) = p = (0,0,0)$, οπότε $f(0,0) = 0$. Αφού το T_pM είναι το οριζόντιο επίπεδο, έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$$

και συνεπώς $\frac{\partial\phi}{\partial u}(0,0) = e_1$ και $\frac{\partial\phi}{\partial v}(0,0) = e_2$, οπότε $E(0,0) = G(0,0) = 1$ και $F(0,0) = 0$. Όπως υπολογίσαμε στο Παράδειγμα 3.3.1, οι συντελεστές της δεύτερης θεμελιώδους μορφής στο U είναι

$$e = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}},$$

$$j = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}},$$

$$g = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}}.$$

Ο τελεστής σχήματος στο p έχει πίνακα

$$L_p = \begin{pmatrix} e(0,0) & j(0,0) \\ j(0,0) & g(0,0) \end{pmatrix}$$

ως προς τη διατεταγμένη βάση $[e_1, e_2]$, που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα. Αυτό σημαίνει οτι

$$k_1(p) = e(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0), \quad j(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(0,0) = 0, \quad k_2(p) = g(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(0,0).$$

Επειδή το U είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε τα εφαπτόμενα διανύσματα

$$X_1(t) = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\phi}{\partial u}(0,t)\right\|} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial u}(0,t) \in T_{\phi(0,t)}M,$$

$$X_2(t) = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\phi}{\partial v}(t,0)\right\|} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial v}(t,0) \in T_{\phi(t,0)}M$$

να ορίζονται για κάθε $|t| < \epsilon$. Θεωρούμε τις C^∞ συναρτήσεις h_1, $h_2 : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ που ορίζονται από τους τύπους

$$h_1(t) = II_{\phi(0,t)}(X_1(t)) = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2\right] \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}}(0,t),$$

$$h_2(t) = II_{\phi(t,0)}(X_2(t)) = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right] \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}}(t,0).$$

Προφανώς, $h_1(0) = k_1(p)$ και $h_2(0) = k_2(p)$. Επειδή υποθέτουμε οτι η k_2 παίρνει τοπικά μέγιστη τιμή στο p, έχουμε

$$h_2(0) = II_p(e_2) = k_2(p) \geq k_2(\phi(0,t)) \geq II_{\phi(0,t)}(X_2(t)) = h_2(t)$$

και όμοια υποθέτουμε οτι η k_1 παίρνει τοπικά ελάχιστη τιμή στο p, έχουμε

$$h_1(0) = II_p(e_1) = k_1(p) \leq k_1(\phi(t,0)) \leq II_{\phi(t,0)}(X_1(t)) = h_1(t),$$

μικραίνοντας εν ανάγκη το $\epsilon > 0$. Κατά συνέπεια,

$$h_1'(0) = h_2'(0) = 0 \quad \text{και} \quad h_2''(0) \leq 0 \leq h_1''(0).$$

Παραγωγίζοντας βρίσκουμε

$$h_2'(t) = -\frac{2\frac{\partial f}{\partial v}(t,0)\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(t,0)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(t,0)}{\left[1+\left(\frac{\partial f}{\partial v}(t,0)\right)^2\right]^2 \cdot \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial u}(t,0)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}(t,0)\right)^2}}$$

$$+\frac{\frac{\partial^3 f}{\partial u \partial v \partial v}(t,0)}{\left[1+\left(\frac{\partial f}{\partial v}(t,0)\right)^2\right]^2 \cdot \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial u}(t,0)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}(t,0)\right)^2}}$$

$$-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(t,0)\left[\frac{\partial f}{\partial u}(t,0)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(t,0)+\frac{\partial f}{\partial v}(t,0)\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(t,0)\right]}{\left[1+\left(\frac{\partial f}{\partial v}(t,0)\right)^2\right]^2 \cdot \left[1+\left(\frac{\partial f}{\partial u}(t,0)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}(t,0)\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial u \partial v \partial v}(0,0) = h_2'(0) = 0.$$

Παραγωγίζοντας άλλη μία φορά

$$h_2''(0) = 0 + \frac{\partial^4 f}{\partial u \partial u \partial v \partial v}(0,0) - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(0,0)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0)\right)^2.$$

Με ανάλογο τρόπο παίρνουμε

$$h_1''(0) = 0 + \frac{\partial^4 f}{\partial v \partial v \partial u \partial u}(0,0) - \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(0,0)\right)^2.$$

Από το Θεώρημα του Schwarz και τα προηγούμενα προκύπτει οτι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(0,0)\right)^2 \leq \frac{\partial^4 f}{\partial v \partial v \partial u \partial u}(0,0) = \frac{\partial^4 f}{\partial u \partial u \partial v \partial v}(0,0) \leq \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(0,0)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0)\right)^2$$

οπότε

$$K(p)\cdot[k_2(p)-k_1(p)] = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(0,0)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(0,0) - \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0)\right] \leq 0.$$

επειδή το σημείο p υποτίθεται οτι είναι ελλειπτικό, συμπεραίνουμε οτι

$$k_2(p) \leq k_1(p) \leq k_2(p)$$

και συνεπώς το p είναι ομφαλικό. □

Για τον χαρακτηρισμό των σφαιρών στον $\mathbb{R}^3$ θα χρειαστούμε την παρακάτω πρόταση, που έχει ανεξάρτητο ενδιαφέρον. Θυμίζουμε οτι η απόλυτη τιμή της μέσης καμπυλότητα μίας λείας επιφάνειας M στον $\mathbb{R}^3$ είναι μία καλά ορισμένη συνεχής συνάρτηση $|H| : M \to \mathbb{R}$.

Πρόταση 3.5.3. *Έστω M μία λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$. Αν η μέση καμπυλότητα της M δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο της M, τότε η M είναι προσανατολίσιμη.*

Απόδειξη. Υπάρχει μία (αριθμήσιμη) οικογένεια τοπικών παραμετρήσεων $\phi_i : U \to M$, $i \in I$, όπου $U = (-1,1) \times (-1,1)$, ώστε $M = \bigcup_{i\in I} \phi_i(U)$. Εστω $N_i : \phi_i(U) \to S^2$ η αντίστοιχη απεικόνιση Gauss, δηλαδή

$$N_i(\phi_i(u,v)) = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \phi_i}{\partial u} \times \frac{\partial \phi_i}{\partial v} \right\|} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial u} \times \frac{\partial \phi_i}{\partial v}$$

και $H_i : U \to \mathbb{R}$ η αντίστοιχη C^∞ συνάρτηση μέσης καμπυλότητας. Επειδή το U είναι (κατά τόξα) συνεκτικό σύνολο, έχουμε $H_i > 0$ στο U ή $H_i < 0$ στο U, αφού υποθέτουμε οτι η μέση καμπυλότητα δεν μηδενίζεται πουθενά στην M. Αν $\phi_i(U) \cap \phi_j(U) \neq \varnothing$ και $H_i > 0$ στο U ενώ $H_j < 0$ στο U, τότε $N_i = -N_j$ στο $\phi_i(U) \cap \phi_j(U)$. Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.2, αν $H_i > 0$, θέτουμε $\psi_i = \phi_i$ και αν $H_i < 0$ θέτουμε $\psi_i = \phi_i \circ g$, όπου $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι η ανάκλαση με $g(u,v) = (u,-v)$. Έχουμε τώρα $\det D(\psi_i^{-1} \circ \psi_j)(u,v) > 0$ για κάθε $(u,v) \in \psi_j^{-1}(\psi_i(U) \cap \psi_j(U))$. Αυτό δείχνει οτι η M είναι προσανατολίσιμη. □

Θεώρημα 3.5.4. (K.O.H. Liebmann, 1899) *Αν μία συμπαγής και (κατά τόξα) συνεκτική λεία επιφάνεια στον χώρο $\mathbb{R}^3$ έχει παντού σταθερή καμπυλότητα Gauss , τότε είναι σφαίρα.*

Απόδειξη. Αν M είναι μία συμπαγής και συνεκτική λεία επιφάνεια στον χώρο $\mathbb{R}^3$ με παντού σταθερή καπυλότητα Gauss c, τότε $c > 0$, από το Θεώρημα 3.5.1. Έτσι η μέση καμπυλότητα της M δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο της και η M είναι προσανατολίσιμη, από την Πρόταση 3.5.3. Υπάρχει λοιπόν μία ολικά ορισμένη απεικόνιση Gauss $N : M \to S^2$. Από αυτήν παίρνουμε τον τελεστή σχήματος της M σε κάθε σημείο της και τις ολικά ορισμένες λείες απεικονίσεις της καμπυλότητας Gauss $K : M \to \mathbb{R}$, που παίρνει την σταθερή τιμή c και της μέσης καμπυλότητας $H : M \to \mathbb{R}$, όπως επίσης και τις συνεχείς συναρτήσεις των κυρίων καμπυλοτήτων k_1, $k_2 : M \to \mathbb{R}$, που δίνονται από τους γνωστούς τύπους

$$k_1 = H - \sqrt{H^2 - K}, \quad k_2 = H + \sqrt{H^2 - K}.$$

Αφού $K = k_1 k_2 = c > 0$, μπορούμε να υποθέσουμε οτι $k_1 > 0$ και $k_2 > 0$, οπότε $H > 0$ και $k_1 \leq k_2$. Λόγω της συνέχειας, η k_2 παίρνει μέγιστη τιμή στην M σε κάποιο σημείο $p \in M$. Στο ίδιο σημείο p παίρνει η k_1 την ελάχιστη τιμή της στην M. Επειδή το p είναι ελλειπτικό σημείο, είναι ομφαλικό, από το Θεώρημα 3.5.2. Κατά συνέπεια,

$$k_1(p) \leq k_1(q) \leq k_2(q) \leq k_2(p) = k_1(p),$$

για κάθε $q \in M$, δηλαδή όλα τα σημεία της M είναι ομφαλικά. Από το Θεώρημα 3.2.4, η M είναι σφαίρα. □

3.6 Επιφάνειες εκ περιστροφής

Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ μία κανονική C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη της μορφής

$$\gamma(s) = (h(s), 0, z(s))$$

όπου οι h, $z : I \to \mathbb{R}$ είναι C^∞ συναρτήσεις με $h(s) > 0$ για κάθε $s \in I$. Υποθέτουμε οτι είτε η γ είναι ένα-προς-ένα και η $\gamma^{-1} : \gamma(I) \to I$ είναι συνεχής, δηλαδή η γ είναι τοπολογική εμφύτευση, είτε $I = \mathbb{R}$ και η γ είναι περιοδική με κάποια περίοδο $T > 0$, ώστε η γ να είναι ένα-προς-ένα στο διάστημα $[0, T)$. Το υποσύνολο

$$M = \{(h(v)\cos u, h(v)\sin u, z(v)) : (u, v) \in [0, 2\pi) \times I\}$$

του $\mathbb{R}^3$ λέγεται *επιφάνεια εκ περιστροφής* περί τον κάθετο άξονα με γενέτειρα γ.

Η C^∞ απεικόνιση $\phi : \mathbb{R} \times I \to M \subset \mathbb{R}^3$ με

$$\phi(u, v) = (h(v)\cos u, h(v)\sin u, z(v))$$

έχει ιακωβιανό πίνακα

$$D\phi(u, v) = \begin{pmatrix} -h(v)\sin u & h'(v)\cos u \\ h(v)\cos u & h'(v)\sin u \\ 0 & z'(v) \end{pmatrix}$$

που έχει τάξη 2 για κάθε $(u, v) \in \mathbb{R} \times I$, γιατί η γ είναι κανονική και $h > 0$. Στην περίπτωση που η γ είναι τοπολογική εμφύτευση, οι περιορισμοί της ϕ στα ανοιχτά σύνολα $(0, 2\pi) \times I$ και $(-\pi, \pi) \times I$ είναι τοπολογικές εμφυτεύσεις και

$$M = \phi((0, 2\pi) \times I)) \cup \phi((-\pi, \pi) \times I)).$$

Συνεπώς, το M είναι λεία επιφάνεια. Ανάλογα ισχύουν στην δεύτερη περίπτωση, που το ίχνος της γ είναι μία απλή κλειστή καμπύλη. Τότε

$$M = \phi((0, 2\pi) \times (0, T)) \cup \phi((-\pi, \pi) \times (0, T))$$

$$\cup\phi((0, 2\pi) \times (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})) \cup \phi((-\pi, \pi) \times (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})).$$

Αφού

$$\frac{\partial\phi}{\partial u} = \begin{pmatrix} -h(v)\sin u \\ h(v)\cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial v} = \begin{pmatrix} h'(v)\cos u \\ h'(v)\sin u \\ z'(v) \end{pmatrix}$$

οι συντελεστές της πρώτης θεμελιώδους μορφής είναι

$$E(u, v) = (h(v))^2, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = (h'(v))^2 + (z'(v))^2.$$

Στη συνέχεια θα υποθέτουμε οτι η γ είναι παραμετρισμένη με το μήκος της, οπότε $G(u, v) = 1$.

Οι συντελεστές της δεύτερης θεμελιώδους μορφής είναι

$$e(u, v) = \frac{1}{h(v)} \begin{vmatrix} -h(v)\sin u & h'(v)\cos u & -h(v)\cos u \\ h(v)\cos u & h'(v)\sin u & -h(v)\sin u \\ 0 & z'(v) & 0 \end{vmatrix} = -h(v)z'(v),$$

$$f(u,v)=\frac{1}{h(v)}\begin{vmatrix}-h(v)\sin u & h'(v)\cos u & -h'(v)\sin u\\ h(v)\cos u & h'(v)\sin u & h'(v)\cos u\\ 0 & z'(v) & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$g(u,v)=\frac{1}{h(v)}\begin{vmatrix}-h(v)\sin u & h'(v)\cos u & h''(v)\cos u\\ h(v)\cos u & h'(v)\sin u & h''(v)\sin u\\ 0 & z'(v) & z''(v)\end{vmatrix}=h''(v)z'(v)-h'(v)z''(v).$$

Αφού $F=0$ και $f=0$, ο πίνακας του τελεστή σχήματος $L_{\phi(u,v)}$ ως προς τη διατεταγμένη βάση $\left[\frac{\partial\phi}{\partial u},\frac{\partial\phi}{\partial v}\right]$ του εφαπτόμενου επιπέδου $T_{\phi(u,v)}M$ είναι

$$L_{\phi(u,v)}=\begin{pmatrix}e(u,v)/E(u,v) & 0\\ 0 & g(u,v)/G(u,v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-z'(v)/h(v) & 0\\ 0 & h''(v)z'(v)-h'(v)z''(v)\end{pmatrix}.$$

Η καμπυλότητα Gauss είναι λοιπόν

$$K(\phi(u,v))=\det L_{\phi(u,v)}=-\frac{z'(v)\cdot[h''(v)z'(v)-h'(v)z''(v)]}{h(v)}.$$

Επειδή υποθέτουμε οτι η γ είναι παραμετρισμένη με το μήκος της, παραγωγίζοντας την ισότητα $(h')^2+(z')^2=1$, έχουμε $h'(v)h''(v)=-z'(v)z''(v)$. Αντικαθιστώντας προκύπτει οτι

$$K(\phi(u,v))=-\frac{(z'(v))^2h''(v)+(h'(v))^2h''(v)}{h(v)}=-\frac{h''(v)}{h(v)}.$$

Παράδειγμα 3.6.1. Αν $a>R>0$, ο τόρος

$$M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2=R^2\}$$

είναι επιφάνεια εκ περιστροφής περί τον κάθετο άξονα με γενέτειρα την C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη με το μήκος της $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ με

$$\gamma(s)=\left(a+R\cos\frac{s}{R},0,R\sin\frac{s}{R}\right)$$

της οποίας το ίχνος είναι ο κύκλος στο επίπεδο xz με κέντρο το σημείο $(a,0,0)$ και ακτίνα R. Σύμφωνα με τους προηγούμενους υπολογισμούς, η καμπυλότητα Gauss του τόρου στο σημείο $((a+R\cos\frac{v}{R})\cos u,(a+R\cos\frac{v}{R})\sin u,R\sin\frac{v}{R})$ είναι

$$K=\frac{\cos\frac{v}{R}}{R(a+R\cos\frac{v}{R})}.$$

Ο παραπάνω τύπος για την καμπυλότητα Gauss μίας επιφάνειας εκ περιστροφής υποδεικνύει τον τρόπο κατασκευής μίας επιφάνειας εκ περιστροφής με προκαθορισμένη καμπυλότητα Gauss. Αν $I\subset\mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $s_0\in I$ και $K:I\to\mathbb{R}$ είναι μία C^∞ συνάρτηση, πρώτα αναζητούμε μία C^∞ συνάρτηση $h:I\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $h''+Kh=0$ και τους επιπλέον περιορισμούς $h(s_0)>0$ και $|h'(s_0)|<1$. Λόγω της συνέχειας, υπάρχει $\epsilon>0$ ώστε $h(s)>0$ για $|s-s_0|<\epsilon$. Η

επιφάνεια εκ περιστροφής περί τον κάθετο άξονα με γενέτειρα την C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη με το μήκος της $\gamma : (s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon) \to \mathbb{R}^3$ που δίνεται από τον τύπο

$$\gamma(s) = (h(s), 0, \int_0^s \sqrt{1 - (h'(t))^2} dt)$$

έχει συνάρτηση καμπυλότητας Gauss την K. Ειδικά, με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε μία επιφάνεια εκ περιστροφής που έχει παντού σταθερή αρνητική καμπυλότητα Gauss.

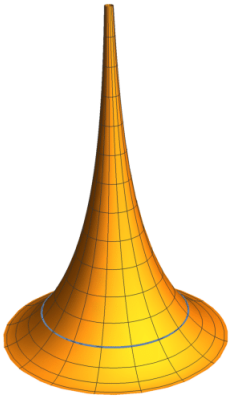
Παράδειγμα 3.6.2. Μία προφανής λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$x'' - x = 0$$

είναι η $h(s) = e^{-s}$, $s \in \mathbb{R}$. Αφού $h(s) > 0$ και $|h'(s)| < 1$ ακριβώς τότε όταν $s > 0$, η επιφάνεια εκ περιστροφής περί τον κάθετο άξονα με γενέτειρα την C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη με το μήκος της $\gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ που δίνεται από τον τύπο

$$\gamma(s) = (e^{-s}, 0, \int_0^s \sqrt{1 - e^{-2t}} dt)$$

έχει παντού σταθερή καμπυλότητα Gauss -1. Η επιφάνεια αυτή λέγεται *ψευδοσφαίρα*. Η γενέτειρα γ είναι η tractrix του Παραδείγματος 1.2.4.



3.7 Ασκήσεις

1. Εστω M μία λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ και $p \in M$. Να αποδειχθεί οτι

$$L_p(v) \times L_p(w) = K(p)(v \times w)$$

για κάθε $v, w \in T_pM$, όπου L_p είναι ο τελεστής σχήματος και $K(p)$ είναι η καμπυλότητα Gauss της M στο p.

2. Να αποδειχθεί οτι ένα σημείο μίας λείας επιφάνειας είναι ελλειπτικό τότε και μόνο τότε όταν ο τελεστής σχήματος στο σημείο αυτό είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένος.

3. Να υπολογιστούν ο τελεστής σχήματος, η καμπυλότητα Gauss, η μέση καμπυλότητα και οι κύριες καμπυλότητες σε κάθε σημείο της ελικοειδούς επιφάνειας $M = \phi(\mathbb{R}^2)$, όπου $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ είναι η

$$\phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au), \quad a > 0.$$

4. Εστω $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ η C^∞ απεικόνιση με

$$\phi(u, v) = \Big(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\Big).$$

(α) Να αποδειχτεί οτι το σύνολο $M = \phi(\mathbb{R}^2) \setminus C$, όπου $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \quad \acute{\eta} \quad y = 0\}$ είναι λεία επιφάνεια, ολικά παραμετρισμένη, με συντελεστές της πρώτης θελιώδους μορφής $E(u, v) = G(u, v) = (1 + u^2 + v^2)^2$ και $F(u, v) = 0$.
(β) Να αποδειχτεί οτι οι συντελεστές της δεύτερης θεμελιώδους μορφής είναι $e(u, v) = 2$, $g(u, v) = -2$ και $f(u, v) = 0$.
(γ) Να αποδειχτεί οτι οι κύριες καμπυλότητες στο σημείο $\phi(u, v)$ δίνονται από τους τύπους

$$\kappa_1(u, v) = \frac{-2}{(1 + u^2 + v^2)^2}, \quad \kappa_2(u, v) = \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}.$$

5. Εστω $h : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ μία C^∞ συνάρτηση με $h' > 0$ και $\phi : (0, 1) \times (0, \pi) \to \mathbb{R}^3$ η C^∞ απεικόνιση με

$$\phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, h(v)).$$

(α) Να αποδειχτεί οτι το $M = \phi((0, 1) \times (0, \pi))$ είναι λεία επιφάνεια.
(β) Να υπολογιστεί η καμπυλότητα Gauss σε κάθε σημείο της M.
(γ) Να ευρεθούν τα ομφαλικά σημεία της M, αν υπάρχουν.

6. Εστω $M \subset \mathbb{R}^3$ μία λεία επιφάνεια, I ένα ανοιχτό διάστημα και $\gamma : I \to M$ μία κανονική C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη. Αν υπάρχει ένα επίπεδο το οποίο εφάπτεται της M σε κάθε σημείο του $\gamma(I)$, να αποδειχθεί οτι κάθε σημείο του $\gamma(I)$ είναι παραβολικό ή επίπεδο.

7. Να υπολογιστεί η καμπυλότητα Gauss της επιφάνειας εκ περιστροφής περί τον κάθετο άξονα με γενέτειρα την $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με $\gamma(t) = (e^{-t^2/2}, 0, t)$.

8. Εστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία C^∞ συνάρτηση. Να αποδειχθεί οτι το σύνολο

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad \text{και} \quad x^2 + y^2 > 0\}$$

είναι επιφάνεια εκ περιστροφής με καμπυλότητα Gauss

$$K(x, y, z) = \frac{f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot f''(\sqrt{x^2 + y^2})}{(\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot [1 + (f'(\sqrt{x^2 + y^2}))^2]^2}$$

για κάθε $(x, y, z) \in M$.

9. Εστω (M, N) μία προσανατολισμένη λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$. Μία κανονική C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : I \to M$, όπου το $I \subset \mathbb{R}$ είναι ένα ανοιχτό διάστημα, λέγεται κύρια αν το $\dot\gamma(t)$ ορίζει κύρια κατεύθυνση για κάθε $t \in I$.
(α) Να αποδειχθεί οτι η γ είναι κύρια τότε και μόνο τότε όταν τα εφαπτόμενα διανύσματα $(N \circ \gamma)'(t)$ και $\dot\gamma(t)$ είναι συγραμμικά για κάθε $t \in I$.
(β) Να αποδειχθεί οτι

$$II_{\gamma(t)}\Big(\frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|}\Big) = \frac{\langle \ddot\gamma(t), N(\gamma(t))\rangle}{\|\dot\gamma(t)\|^2}.$$

(γ) Αν η M είναι επιφάνεια εκ περιστροφής περί τον κάθετο άξονα με γενέτειρα την $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ και $\phi : \mathbb{R} \times I \to M$ είναι η κανονική παραμέτριση της M, να αποδειχθεί οτι για κάθε $(u, v) \in \mathbb{R} \times I$ οι παραμετρισμένες καμπύλες $\gamma_1(t) = \phi(t, v)$, $t \in \mathbb{R}$ και $\gamma_2(t) = \phi(u, t)$, $t \in I$, είναι κύριες.

10. Να αποδειχθεί οτι δεν υπάρχει συμπαγής λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ σε κάθε σημείο της οποίας η μέση καμπυλότητα είναι μηδενική.

11. Να αποδειχθεί οτι κάθε λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ που έχει θετική καμπυλότητα Gauss σε κάθε σημείο της, είναι προσανατολίσιμη.

12. Εστω $M \subset \mathbb{R}^3$ μία συνεκτική, συμπαγής, λεία επιφάνεια που έχει παντού θετική καμπυλότητα Gauss $K > 0$.
(α) Αν η μέση καμπυλότητα H της M είναι κατ΄ απόλυτη τιμή σταθερή, δηλαδή η $|H|$ είναι σταθερή, να αποδειχθεί οτι η M είναι σφαίρα.
(β) Αν ο λόγος H/K σταθερός στην M, να αποδειχθεί οτι η M είναι σφαίρα.

13. Εστω $M \subset \mathbb{R}^3$ μία συμπαγής λεία επιφάνεια που περιέχεται σε μία κλειστή μπάλλα με ακτίνα $R > 0$. Να αποδειχθεί οτι υπάρχει κάποιο σημείο $p \in M$ στο οποίο η μέση καμπυλότητα της M είναι $|H(p)| \geq \dfrac{1}{R}$.

14. Εστω $M \subset \mathbb{R}^3$ μία συνεκτική, συμπαγής, λεία επιφάνεια που έχει παντού θετική καμπυλότητα Gauss $K > 0$. Αν μία κύρια καμπυλότητα της M είναι παντού σταθερή, να αποδειχθεί οτι η M είναι σφαίρα.

Κεφάλαιο 4

Η εσωτερική γεωμετρία των επιφανειών

4.1 Ισομετρίες επιφανειών

Εστω M_1, M_2 δύο λείες επιφάνειες στον χώρο $\mathbb{R}^3$. Μία λεία αμφιδιαφόριση επιφανειών $f : M_1 \to M_2$ λέγεται *ισομετρία επιφανειών*, αν

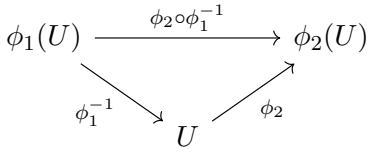
$$\langle f_{*p}(X), f_{*p}(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle$$

για κάθε X, $Y \in T_pM_1$ και κάθε $p \in M_1$ ή ισοδύναμα $I_{f(p)}(f_{*p}(X)) = I_p(X)$ για κάθε $X \in T_pM_1$ και $p \in M_1$. Είναι προφανές οτι η ταυτοτική απεικόνιση μία λείας επιφάνειας είναι ισομετρία επιφανειών. Επίσης, η αντίστροφη μίας ισομετρίας επιφανειών είναι ισομετρία επιφανειών και η σύνθεση δύο ισομετριών επιφανειών είναι ισομετρία επιφανειών.

Δύο λείες επιφάνειες M_1, M_2 στον χώρο $\mathbb{R}^3$ λέγονται *ισομετρικές* αν υπάρχει μία ισομετρία επιφανειών $f : M_1 \to M_2$. Είναι φανερό οτι η σχέση αυτή είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο όλων των λείων επιφανειών στον $\mathbb{R}^3$.

Είναι προφανές οτι αν υπάρχει μία ισομετρία $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ώστε $F(M_1) = M_2$, δηλαδή οι επιφάνειες M_1 και M_2 είναι ισοδύναμα σχήματα του $\mathbb{R}^3$, τότε οι M_1 και M_2 είναι ισομετρικές επιφάνειες. Όμως το αντίστροφο δεν ισχύει, όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω. Δύο ισομετρικές επιφάνειες μπορεί να είναι εντελώς διαφορετικά σχήματα στον $\mathbb{R}^3$.

Λήμμα 4.1.1. *Εστω M_1 και M_2 δύο λείες επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$ και $\phi_1 : U \to M_1$ και $\phi_2 : U \to M_2$ δύο αντίστοιχες τοπικές παραμετρίσεις τους, που ορίζονται στο ίδιο ανοιχτό σύνολο $U \subset \mathbb{R}^2$. Εστω E_i, F_i, $G_i : U \to \mathbb{R}$ οι συντελεστές της πρώτης θεμελιώδους μορφής της M_i ως προς την τοπική παραμέτριση ϕ_i, $i = 1, 2$. Αν $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$ και $G_1 = G_2$, τότε η $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U) \to \phi_2(U)$ είναι ισομετρία επιφανειών.*



Απόδειξη. Εστω $(u,v) \in U$ και $X \in T_{\phi_1(u,v)}M_1$. Υπάρχουν μοναδικά $X_1,\ X_2 \in \mathbb{R}$, ώστε

$$X = X_1\frac{\partial \phi_1}{\partial u} + X_2\frac{\partial \phi_1}{\partial v}.$$

Τότε

$$(\phi_2 \circ \phi_1^{-1})_{*\phi_1(u,v)}(X) = X_1\frac{\partial \phi_2}{\partial u} + X_2\frac{\partial \phi_2}{\partial v}.$$

Κατά συνέπεια,

$$I_{\phi_1(u,v)}(X) = E_1(u,v)X_1^2 + 2F_1(u,v)X_1X_2 + G_1(u,v)X_2^2 = I_{\phi_1(u,v)}((\phi_2 \circ \phi_1^{-1})_{*\phi_1(u,v)}(X)).$$

Αυτό δείχνει οτι η $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ είναι ισομετρία επιφανειών. □

Παράδειγμα 4.1.2. Η επιφάνεια $M_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, \quad x \neq 1\}$ είναι ο κύλινδρος με ακτίνα βάσης ίση με 1 χωρίς τη γενέτειρα ευθεία $\{(1,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$. Η $\phi_2 : (0,2\pi) \times \mathbb{R} \to M$ με

$$\phi_2(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$$

είναι ολική παραμέτριση της M_2, ως προς την οποία οι συντελεστές της πρώτης θεμελιώδους μορφής είναι $E_2 = 1$, $F_2 = 0$ και $G_2 = 1$. Η επίπεδη λωρίδα

$$M_1 = (0,2\pi) \times \mathbb{R} \times \{0\}$$

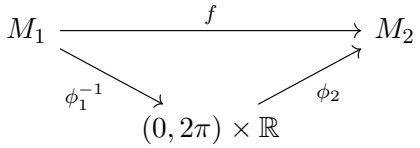
είναι λεία επιφάνεια ολικά παραμετρισμένη από την $\phi_1 : (0,2\pi) \times \mathbb{R} \to M_1$ με

$$\phi_1(u,v) = (u,v,0),$$

ως προς την οποία οι συντελεστές της πρώτης θεμελιώδους μορφής είναι $E_1 = 1$, $F_1 = 0$ και $G_1 = 1$. Από το Λήμμα 4.1.1 προκύπτει οτι η απεικόνιση $f : M_1 \to M_2$ με

$$f(u,v,0) = (\cos u, \sin u, v)$$

είναι ισομετρία επιφανειών. Η f δεν είναι ο περιορισμός καμίας ισομετρίας του $\mathbb{R}^3$ στην M_1.



Οι επιφάνειες M_1 και M_2 είναι λοιπόν ισομετρικές, αλλά δεν είναι ισοδύναμα σχήματα του χώρου $\mathbb{R}^3$, αφού δεν υπάρχει καμία $F \in I(\mathbb{R}^3)$ τέτοια ώστε $F(M_1) = M_2$, γιατί οι ισομετρίες του $\mathbb{R}^3$ απεικονίζουν επίπεδα στον $\mathbb{R}^3$ σε επίπεδα, από το Θεώρημα 1.3.4.

Έστω M μία κατά τόξα συνεκτική λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$. Για $p,\ q \in M$ θέτουμε

$$d_M(p,q) = \inf\{L(\gamma) : \text{η } \gamma : [0,1] \to M \text{ είναι κατά τμήματα } C^\infty \text{ παραμετρισμένη}$$

$$\text{καμπύλη με } \gamma(0) = p \text{ και } \gamma(1) = q\}.$$

Από το Παράδειγμα 1.1.7(γ) έχουμε $\|p-q\| \leq d_M(p,q)$ για κάθε $p,\, q \in M$. Επειδή η M είναι κατά τόξα συνεκτική, παίρνουμε μία συνάρτηση $d_M : M \times M \to \mathbb{R}$ με τις παρακάτω προφανείς ιδιότητες:
(α) $d_M(p,q) \geq 0$ για κάθε $p,\, q \in M$ και $d_M(p,q) = 0$ τότε και μόνο τότε όταν $p = q$.
(β) Η d_M είναι συμμετρική, δηλαδή $d_M(p,q) = d_M(q,p)$ για κάθε $p,\, q \in M$.
(γ) Η d_M ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα, δηλαδή

$$d_M(p,q) \leq d_M(p,r) + d_M(r,q)$$

για κάθε $p,\, q,\, r \in M$. Με άλλα λόγια, η d_M είναι μία συνάρτηση απόστασης στην M και το ζεύγος (M, d_M) είναι ένας μετρικός χώρος. Η d_M λέγεται *εσωτερική απόσταση* στην M.

Πρόταση 4.1.3. *Η τοπολογία που ορίζει στην M η εσωτερική απόσταση d_M ταυτίζεται με την τοπολογία που έχει η M ως υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^3$.*

Απόδειξη. Επειδή $\|p-q\| \leq d_M(p,q)$ για κάθε $p,\, q \in M$, η d_M-τοπολογία είναι λεπτότερη της υπάρχουσας τοπολογίας της M. Θα δείξουμε οτι και η υπάρχουσα τοπολογία της M είναι λεπτότερη της d_M-τοπολογίας. Εστω $p \in M$ και $\phi : U \to M$ μία τοπική παραμέτριση της M με $p = \phi(u_0, v_0)$ για κάποιο $(u_0, v_0) \in U$, όπου το $U \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο. Υπάρχει $R_0 > 0$ ώστε $(u,v) \in U$, όταν $(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2 \leq R_0^2$.

Αν E, F και G είναι οι συντελεστές της πρώτης θεμελιώδους μορφής στο U ως προς την τοπική παραμέτριση ϕ, θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f : U \times \mathbb{R}^2 \to (0, +\infty)$ με

$$f(u,v,X_1,X_2) = \sqrt{E(u,v)X_1^2 + 2F(u,v)X_1X_2 + G(u,v)X_2^2}.$$

Λόγω της συνέχειας και της συμπάγειας, για κάθε $0 < R \leq R_0$ υπάρχει $c_R > 0$ ώστε $f(u,v,X_1,X_2) \leq c_R$, όταν $(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2 \leq R^2$ και $X_1^2 + X_2^2 = 1$. Επιπλέον, $c_R \leq c_{R_0}$. Συνεπώς,

$$f(u,v,X_1,X_2) = \sqrt{X_1^2+X_2^2} \cdot f\left(u, v, \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}}, \frac{X_2}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}}\right) \leq c_R \cdot \sqrt{X_1^2+X_2^2}$$

για $(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2 \leq R^2$ και $X_1^2 + X_2^2 \neq 0$.

Αν τώρα $\sigma : [0,1] \to U$ είναι η παραμέτριση του ευθύγραμμου τμήματος από το (u_0, v_0) στο (u,v), όπου $(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2 \leq R^2$, δηλαδή

$$\sigma(t) = (1-t)(u_0,v_0) + t(u,v),$$

έχουμε

$$d_M(p, \phi(u,v)) \leq L(\phi \circ \sigma) = \int_0^1 f((1-t)u_0 + tu, (1-t)v_0 + tv, u-u_0, v-v_0)dt$$

$$\leq c_R \cdot \sqrt{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2}.$$

Το σύνολο $D(R) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : (u-u_0)^2 + (v-v_0)^2 < R^2\}$ είναι ο ανοιχτός δίσκος στο $\mathbb{R}^2$ με κέντρο το σημείο (u_0, v_0) και ακτίνα R. Επειδή η ϕ είναι τοπολογική εμφύτευση του U στην M και το $\phi(U)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο στην υπάρχουσα

τοπολογία της M, το $\phi(D(R))$ είναι ανοιχτή περιοχή του p στην M. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $0 < R < R_0$ ώστε $0 < Rc_{R_0} < \epsilon$. Ο προηγούμενος υπολογισμός σημαίνει οτι

$$d_M(p,q) < c_R \cdot R \leq c_{R_0} \cdot R < \epsilon$$

για κάθε $q \in \phi(D(R))$. Αυτό δείχνει οτι η υπάρχουσα τοπολογία της M είναι λεπτότερη της d_M-τοπολογίας. □

Πρόταση 4.1.4. *Εστω M_1 και M_2 δύο λείες επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$ με αντίστοιχες εσωτερικές αποστάσεις d_{M_1} και d_{M_2} . Αν $f : M_1 \to M_2$ είναι μία ισομετρία επιφανειών, τότε*

$$d_{M_2}(f(p), f(q)) = d_{M_1}(p,q)$$

για κάθε p, $q \in M_1$. Δηλαδή, η $f : (M_1, d_{M_1}) \to (M_2, d_{M_2})$ είναι ισομετρία μετρικών χώρων.

Απόδειξη. Αν $\gamma : [0,1] \to M_1$ είναι μία οποιαδήποτε κατά τμήματα C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη με $\gamma(0) = p$ και $\gamma(1) = q$, η $f \circ \gamma : [0,1] \to M_2$ είναι μία κατά τμήματα C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη από το $f(p)$ στο $f(q)$ και

$$d_{M_2}(f(p), f(q)) \leq L(f \circ \gamma) = \int_0^1 \sqrt{I_{f(\gamma(t))}(f_{*\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)))}dt = \int_0^1 \sqrt{I_p(\dot{\gamma}(t))}dt = L(\gamma).$$

Αυτό δείχνει οτι $d_{M_2}(f(p), f(q)) \leq d_{M_1}(p,q)$. Το ίδιο επιχείρημα εφαρμοσμένο για την $f^{-1} : M_2 \to M_1$ δείχνει οτι $d_{M_1}(p,q) \leq d_{M_2}(f(p), f(q))$. □

Ιδιότητες και στοιχεία των λείων επιφανειών που παραμένουν αναλλοίωτα από ισομετρίες επιφανειών λέγονται εσωτερικές ιδιότητες και στοιχεία της εσωτερικής γεωμετρίας των επιφανειών. Αν μία ιδιότητα ή ένα στοιχείο μίας επιφάνειας εξαρτάται μόνο από την πρώτη θεμελιώδη μορφή της, τότε ανήκει στην εσωτερική γεωμετρία της. Στην αμέσως επόμενη παράγραφο θα αποδείξουμε το περίφημο Theorema Egregium του C.F. Gauss σύμφωνα με το οποίο η καμπυλότητα Gauss παραμένει αναλλοίωτη από ισομετρίες επιφανειών, δηλαδή είναι στοιχείο της εσωτερικής γεωμετρίας μίας επιφάνειας. Αυτό θα γίνει εκφράζοντας την καμπυλότητα Gauss μίας επιφάνειας μόνο από τους συντελεστές της πρώτης θεμελιώδους μορφής και τις μερικές παραγώγους τους πρώτης και δεύτερης τάξης.

4.2 Το Theorema Egregium

Έστω M μία λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ και $\phi : U \to M$ μία τοπική παραμέτριση της M, όπου το $U \subset \mathbb{R}^2$ είναι ανοιχτό σύνολο, με αντίστοιχη απεικόνιση Gauss $N : \phi(U) \to S^2$. Υπάρχουν C^∞ συναρτήσεις $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$, $i,j,k = 1,2$ και L_1, L_2, L_2', $L_3 : U \to \mathbb{R}$, ώστε

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} = \Gamma_{11}^1 \frac{\partial \phi}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial \phi}{\partial v} + L_1 N(\phi(u,v)),$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} = \Gamma_{12}^1 \frac{\partial \phi}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial \phi}{\partial v} + L_2 N(\phi(u,v)),$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial v\partial u} = \Gamma^1_{21}\frac{\partial\phi}{\partial u} + \Gamma^2_{21}\frac{\partial\phi}{\partial v} + L_2'N(\phi(u,v)),$$
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2} = \Gamma^1_{22}\frac{\partial\phi}{\partial u} + \Gamma^2_{22}\frac{\partial\phi}{\partial v} + L_3N(\phi(u,v)).$$

Από το Θεώρημα του Schwarz, $\Gamma^k_{12} = \Gamma^k_{21}$, $k = 1, 2$ και $L_2 = L_2'$. Επίσης, αν e, f, g είναι οι συντελεστές της δεύτερης θεμελιώδους μορφής, έχουμε

$$e(u,v) = \langle\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}, N(\phi(u,v))\rangle = \langle L_1N(\phi(u,v)), N(\phi(u,v))\rangle = L_1(u,v),$$

$$f(u,v) = \langle\frac{\partial^2\phi}{\partial u\partial v}, N(\phi(u,v))\rangle = \langle L_2N(\phi(u,v)), N(\phi(u,v))\rangle = L_2(u,v),$$

$$g(u,v) = \langle\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}, N(\phi(u,v))\rangle = \langle L_3N(\phi(u,v)), N(\phi(u,v))\rangle = L_3(u,v),$$

Οι C^∞ συναρτήσεις $\Gamma^k_{ij} : U \to \mathbb{R}$, $i, j, k = 1, 2$ λέγονται *σύμβολα του Christoffel* ως προς την τοπική παραμέτριση ϕ και μπορούν να υπολογιστούν ανά ζεύγη ως λύσεις τριών γραμμικών συστημάτων. Συγκεκριμένα, παίρνοντας εσωτερικά γινόμενα έχουμε

$$E\cdot\Gamma^1_{11} + F\cdot\Gamma^2_{11} = \langle\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}, \frac{\partial\phi}{\partial u}\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}$$

$$F\cdot\Gamma^1_{11} + G\cdot\Gamma^2_{11} = \langle\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}, \frac{\partial\phi}{\partial v}\rangle = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}$$

γιατί

$$\frac{\partial E}{\partial u} = 2\langle\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}, \frac{\partial\phi}{\partial u}\rangle$$

και

$$\langle\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}, \frac{\partial\phi}{\partial v}\rangle = \frac{\partial F}{\partial u} - \langle\frac{\partial\phi}{\partial u}, \frac{\partial^2\phi}{\partial u\partial v}\rangle = \frac{\partial F}{\partial u} - \langle\frac{\partial\phi}{\partial u}, \frac{\partial^2\phi}{\partial v\partial u}\rangle = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}.$$

Όμοια παίρνουμε τα γραμμικά συστήματα

$$E\cdot\Gamma^1_{12} + F\cdot\Gamma^2_{12} = \langle\frac{\partial^2\phi}{\partial u\partial v}, \frac{\partial\phi}{\partial u}\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}$$

$$F\cdot\Gamma^1_{12} + G\cdot\Gamma^2_{12} = \langle\frac{\partial^2\phi}{\partial u\partial v}, \frac{\partial\phi}{\partial v}\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}$$

και

$$E\cdot\Gamma^1_{22} + F\cdot\Gamma^2_{22} = \langle\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}, \frac{\partial\phi}{\partial u}\rangle = \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}$$

$$F\cdot\Gamma^1_{22} + G\cdot\Gamma^2_{22} = \langle\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}, \frac{\partial\phi}{\partial v}\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}.$$

Συνεπώς, τα σύμβολα του Christoffel εξαρτώνται μόνο από τους συντελεστές της πρώτης θεμελιώδους μορφής και των μερικών παραγώγων τους πρώτης τάξης. Είναι δηλαδή στοιχείο της εσωτερικής γεωμετρίας της επιφάνειας.

Παραδείγματα 4.2.1. (α) Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 2.5.1(γ), οι συντελεστές της πρώτης θεμελιώδους μορφής στη σφαίρα $S^2_R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = R^2\}$

με ακτίνα $R > 0$ ως προς την τοπική παραμέτρηση $\phi : (0,\pi) \times (0,2\pi) \to S^2_R$ των σφαιρικών συντεταγμένων

$$\phi(u,v) = (R\sin u\cos v, R\sin u\sin v, R\cos u)$$

είναι $E(u,v) = R^2$, $F(u,v) = 0$ και $G(u,v) = R^2\sin^2 u$ για $(u,v) \in (0,\pi)\times(0,2\pi)$. Συνεπώς,

$$\frac{\partial E}{\partial u} = \frac{\partial E}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial u} = 2R^2\sin u\cos u, \quad \frac{\partial G}{\partial v} = 0.$$

Τα σύμβολα του Christoffel Γ^1_{11}, Γ^2_{11} είναι οι λύσεις του διαγώνιου γραμμικού συστήματος εξισώσεων

$$\Gamma^1_{11}R^2 = 0, \quad \Gamma^2_{11}R^2\sin^2 u = 0$$

οπότε $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = 0$. Τα Γ^1_{12}, Γ^2_{12} είναι οι λύσεις του διαγώνιου γραμμικού συστήματος

$$\Gamma^1_{12}R^2 = 0, \quad \Gamma^2_{12}R^2\sin^2 u = R^2\sin u\cos u$$

οπότε $\Gamma^1_{12} = 0$ και $\Gamma^2_{12}(u,v) = \cot u$. Τέλος, τα Γ^1_{22}, Γ^2_{22} είναι οι λύσεις του διαγώνιου γραμμικού συστήματος

$$\Gamma^1_{22}R^2 = -R^2\sin u\cos u, \quad \Gamma^2_{22}R^2\sin^2 u = 0$$

οπότε $\Gamma^1_{22}(u,v) = -\sin u\cos u$ και $\Gamma^2_{22} = 0$.

(β) Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ μία C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη με το μήκος της της μορφής $\gamma(s) = (h(s), 0, z(s))$ όπου οι h, $z : I \to \mathbb{R}$ είναι C^∞ συναρτήσεις με $h(s) > 0$ για κάθε $s \in I$. Υποθέτουμε οτι είτε η γ είναι ένα-προς-ένα και η $\gamma^{-1} : \gamma(I) \to I$ είναι συνεχής, δηλαδή η γ είναι τοπολογική εμφύτευση, είτε $I = \mathbb{R}$ και η γ είναι περιοδική με κάποια περίοδο $T > 0$, ώστε η γ να είναι ένα-προς-ένα στο διάστημα $[0,T)$. Έστω

$$M = \{(h(v)\cos u, h(v)\sin u, z(v)) : (u,v) \in [0,2\pi)\times I\}$$

η επιφάνεια εκ περιστροφής περί τον κάθετο άξονα με γενέτειρα γ.

Όπως υπολογίσαμε στην παράγραφο 3.6, οι συντελεστές της πρώτης θεμελιώδους μορφής της M ως προς την τοπική παραμέτριση $\phi : \mathbb{R}\times I \to M \subset \mathbb{R}^3$ με

$$\phi(u,v) = (h(v)\cos u, h(v)\sin u, z(v))$$

είναι $E(u,v) = (h(v))^2$, $F(u,v) = 0$, $G(u,v) = 1$. Συνεπώς,

$$\frac{\partial E}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial v} = 2h(v)h'(v), \quad \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial G}{\partial v} = 0.$$

Τα σύμβολα του Christoffel Γ^1_{11}, Γ^2_{11} είναι οι λύσεις του διαγώνιου γραμμικού συστήματος

$$\Gamma^1_{11}h^2 = 0, \quad \Gamma^2_{11} = -hh'$$

οπότε $\Gamma^1_{11} = 0$ και $\Gamma^2_{11}(u,v) = h(v)h'(v)$. Τα Γ^1_{12}, Γ^2_{12} είναι οι λύσεις του διαγώνιου γραμμικού συστήματος

$$\Gamma^1_{12}h^2 = hh', \quad \Gamma^2_{12} = 0$$

οπότε $\Gamma^1_{12}(u,v) = \dfrac{h'(v)}{h(v)}$ και $\Gamma^2_{12} = 0$. Τέλος, τα Γ^1_{22}, Γ^2_{22} είναι οι λύσεις του διαγώνιου γραμμικού συστήματος

$$\Gamma^1_{22} h^2 = 0, \quad \Gamma^2_{22} = 0$$

οπότε $\Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{22} = 0$.

Θεώρημα 4.2.2. (C.F. Gauss, 1828) *Η καμπυλότητα Gauss μίας λείας επιφάνειας στον χώρο $\mathbb{R}^3$ εξαρτάται μόνο από τους συντελεστές της πρώτης θεμελιώδους μορφής και τις μερικές παραγώγους τους πρώτης και δεύτερης τάξης και συνεπώς παραμένει αναλλοίωτη από ισομετρίες επιφανειών.*

Απόδειξη. Έστω $\phi : U \to M$ μία τοπική παραμέτριση της M, όπου το $U \subset \mathbb{R}^2$ είναι ανοιχτό σύνολο και $N : \phi(U) \to S^2$ η αντίστοιχη απεικόνιση Gauss. Από όσα προηγήθηκαν στην παρούσα παράγραφο, αρκεί να εκφράσουμε την καμπυλότητα Gauss στο $\phi(U)$ ως συνάρτηση των συντελεστών της πρώτης θεμελιώδους μορφής E, F, G και των συμβόλων του Chrisroffel και των μερικών παραγώγων τους. Όπως είδαμε στην παράγραφο 3.3, αν ο πίνακας του τελεστή σχήματος ως προς τη διατεταγμένη βάση $\left[\dfrac{\partial\phi}{\partial u}, \dfrac{\partial\phi}{\partial v}\right]$ του εφαπτόμενου επιπέδου $T_{\phi(u,v)}M$ είναι ο

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

και e, f, g είναι οι συντελεστές της δεύτερης θεμελιώδους μορφής, τότε

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Από το Θεώρημα του Schwarz έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial u \partial v}\right)$$

και αντικαθιστώντας

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\Gamma^1_{11}\frac{\partial\phi}{\partial u} + \Gamma^2_{11}\frac{\partial\phi}{\partial v} + eN(\phi(u,v))\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\Gamma^1_{12}\frac{\partial\phi}{\partial u} + \Gamma^2_{12}\frac{\partial\phi}{\partial v} + fN(\phi(u,v))\right).$$

Συνεπώς,

$$\Gamma^1_{11}\frac{\partial^2\phi}{\partial v\partial u} + \Gamma^2_{11}\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2} + e\frac{\partial}{\partial v}N(\phi(u,v)) + \frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial v}\frac{\partial\phi}{\partial u} + \frac{\partial\Gamma^2_{11}}{\partial v}\frac{\partial\phi}{\partial v} + \frac{\partial e}{\partial v}N(\phi(u,v))$$

$$= \Gamma^1_{12}\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2} + \Gamma^2_{12}\frac{\partial^2\phi}{\partial u\partial v} + f\frac{\partial}{\partial u}N(\phi(u,v)) + \frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial u} + \frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial u}N(\phi(u,v)).$$

Αντικαθιστώντας

$$\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{12}\frac{\partial\phi}{\partial u} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12}\frac{\partial\phi}{\partial v} + \Gamma^1_{11}fN(\phi(u,v)) + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22}\frac{\partial\phi}{\partial u} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}\frac{\partial\phi}{\partial v} + \Gamma^2_{11}gN(\phi(u,v))$$

$$-ea_{12}\frac{\partial\phi}{\partial u}-ea_{22}\frac{\partial\phi}{\partial v}+\frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial v}\frac{\partial\phi}{\partial u}+\frac{\partial\Gamma^2_{11}}{\partial v}\frac{\partial\phi}{\partial v}+\frac{\partial e}{\partial v}N(\phi(u,v))$$

$$=\Gamma^1_{12}\Gamma^1_{11}\frac{\partial\phi}{\partial u}+\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11}\frac{\partial\phi}{\partial v}+\Gamma^1_{12}eN(\phi(u,v))+\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12}\frac{\partial\phi}{\partial u}+\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}\frac{\partial\phi}{\partial v}+\Gamma^2_{12}fN(\phi(u,v))$$

$$-fa_{11}\frac{\partial\phi}{\partial u}-fa_{21}\frac{\partial\phi}{\partial v}+\frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial u}+\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial u}N(\phi(u,v)),$$

από όπου παίρνουμε τις τρείς ισότητες

$$\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{12}+\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22}-ea_{12}+\frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial v}=\Gamma^1_{12}\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12}-fa_{11}+\frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial u}$$

$$\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12}+\Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}-ea_{22}+\frac{\partial\Gamma^2_{11}}{\partial v}=\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11}+\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}-fa_{21}+\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial u}$$

$$\Gamma^2_{11}g+\frac{\partial e}{\partial v}=\Gamma^2_{12}f+\frac{\partial f}{\partial u}-\Gamma^1_{11}f+\Gamma^1_{12}e.$$

Αν στη δεύτερη ισότητα αντικαταστήσουμε τις τιμές

$$a_{21}=\frac{fE-eF}{EG-F^2},\quad a_{22}=\frac{gE-fF}{EG-F^2}$$

που βρίσκουμε από τον πίνακα του τελεστή σχήματος, προκύπτει οτι

$$\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12}+\Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}+\frac{\partial\Gamma^2_{11}}{\partial v}-\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11}-\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}-\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial u}=ea_{22}-fa_{21}$$

$$=e\frac{gE-fF}{EG-F^2}-f\frac{fE-eF}{EG-F^2}=E\frac{eg-f^2}{EG-F^2}=E\cdot K(\phi(u,v)).$$

Αφού $E(u,v)\neq 0$ για κάθε $(u,v)\in U$, η καμπυλότητα Gauss στο $\phi(U)$ δίνεται από τον τύπο

$$K(\phi(u,v))=\frac{1}{E}\left[\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12}+\Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}+\frac{\partial\Gamma^2_{11}}{\partial v}-\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11}-\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}-\frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial u}\right]$$

και εξαρτάται μόνο από τους συντελεστές της πρώτης θεμελιώδους μορφής και τις μερικές παραγώγους τους πρώτης και δεύτερης ταξης. □

4.3 Γεωδαισιακές

Αν θέλουμε να αναπτύξουμε την εσωτερική γεωμετρία μίας λείας επιφάνειας M με πρότυπο την επίπεδη Ευκλείδεια Γεωμετρία, ερχόμαστε στην αρχή αντιπέτωποι με το ακόλουθο ερώτημα. Ποιές καμπύλες στην M θα παίξουν τον αντίστοιχο ρόλο των ευθειών της Ευκλείδειας Επιπεδομετρίας; Οι ευθείες στην Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι τα ίχνη C^∞ παραμετρισμένων καμπύλων των οποίων η επιτάχυνση είναι μηδενική. Αν όμως η M δεν είναι επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$, τότε η επιτάχυνση μίας C^∞ παραμετρισμένης καμπύλης στην M μπορεί να μην είναι εφαπτόμενο διάνυσμα της M. Επειδή μας ενδιαφέρει η εσωτερική γεωμετρία της M και ένα επιφανειακό όν βλέπει μόνο την εφαπτομενική συνιστώσα της επιτάχυνσης, οδηγούμαστε να

πάρουμε ως υποκατάστατα των ευκλείδειων ευθειών τις C^∞ παραμετρισμένες καμπύλες στην M των οποίων η επιτάχυνση είναι κάθετη στην M σε κάθε χρονική στιγμή.

Ορισμός 4.3.1. Έστω M μία λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ και $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα. Μία C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : I \to M$ λέγεται *γεωδαισιακή* της M, όταν το διάνυσμα της επιτάχυνσης $\ddot{\gamma}(s)$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο $T_{\gamma(s)}M$ της M για κάθε $s \in I$.

Κάθε γεωδαισιακή έχει σταθερό μήκος ταχύτητας. Πράγματι, αν η C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : I \to M$ είναι γεωδαισιακή της M, τότε τα διανύσματα $\ddot{\gamma}(s)$ και $\dot{\gamma}(s)$ είναι κάθετα για κάθε $s \in I$ και συνεπώς,

$$\frac{d}{ds}\|\dot{\gamma}\|^2 = 2\langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle = 0.$$

Μία επιπλέον προφανής ιδιότητα των γεωδαισιακών είναι η ομογένεια. Συγκεκριμένα, αν η $\gamma : I \to M$ είναι γεωδαισιακή της M και $a \in \mathbb{R}$, με $a \neq 0$, τότε και η C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη $\beta : \frac{1}{a}I \to M$ με $\beta(s) = \gamma(as)$ είναι επίσης γεωδαισιακή της M. Μπορούμε λοιπόν χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέτουμε οτι οι γεωδαισιακές είναι παραμετρισμένες με το μήκος τους, όταν δεν είναι σταθερές.

Θα δείξουμε στη συνέχεια οτι οι γεωδαισιακές μίας λείας επιφάνειας στον $\mathbb{R}^3$ είναι στοιχείο της εσωτερικής γεωμετρίας της.

Έστω M μία λεία επιφάνεια στον χώρο $\mathbb{R}^3$. Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $\gamma : I \to M$ μία C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη με το μήκος της. Ως συνήθως, θέτουμε $T(s) = \dot{\gamma}(s)$, οπότε $\langle T(s), T'(s)\rangle = 0$ για κάθε $s \in I$.

Έστω $s_0 \in I$. Θεωρούμε μία τοπική παραμέτριση $\phi : U \to M$ της M, όπου το $U \subset \mathbb{R}^2$ είναι ανοιχτό σύνολο, με αντίστοιχη απεικόνιση Gauss $N : \phi(U) \to S^2$ ώστε $\gamma(s_0) \in \phi(U)$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\gamma((s_0 - \delta, s_0 + \delta)) \subset \phi(U)$. Για $|s - s_0| < \delta$ το διάνυσμα

$$N_\gamma(s) = N(\gamma(s)) \times T(s)$$

εφάπτεται στην M στο σημείο $\gamma(s)$ και το $\{T(s), N_\gamma(s), N(\gamma(s))\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Έχουμε τώρα

$$T'(s) = \langle T'(s), N_\gamma(s)\rangle N_\gamma(s) + \langle T'(s), N(\gamma(s))\rangle N(\gamma(s)).$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 3.2.1, ο συντελεστής $II_{\gamma(s)}(T(s)) = \langle T'(s), N(\gamma(s))\rangle$ είναι η κανονική καμπυλότητα της M στο σημείο $\gamma(s)$ κατά την κατεύθυνση του $T(s)$. Ο συντελεστής

$$k_g(s) = \langle T'(s), N_\gamma(s)\rangle$$

λέγεται *γεωδαισιακή καμπυλότητα* της γ στο $\gamma(s)$ και εξαρτάται από την επιλογή της τοπικής απεικόνισης Gauss μόνο ως προς το πρόσημο. Συνεπώς, η απόλυτη τιμή της γεωδαισιακής καμπυλότητας είναι μία συνεχής συνάρτηση $|k_g| : I \to \mathbb{R}$. Στην περίπτωση που η M είναι προσανατολίσιμη, επιλέγοντας μία απεικόνιση Gauss $N : M \to S^2$ παίρνουμε μία C^∞ συνάρτηση γεωδαισιακής καμπυλότητας $k_g : I \to \mathbb{R}$.

Το διάνυσμα $\langle T'(s), N_\gamma(s)\rangle N_\gamma(s)$ είναι η εφαπτομενική συνιστώσα της επιτάχυνσης $\ddot{\gamma}(s) = T'(s)$ της γ τη χρονική στιγμή $s \in I$. Συνεπώς, από όσα προηγήθηκαν, μία C^∞

παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : I \to M$ είναι γεωδαισιακή της M τότε και μόνο τότε όταν η γ είναι παραμετρισμένη (αναλογικά) με το μήκος της και έχει μηδενική γεωδαισιακή καμπυλότητα.

Θεώρημα 4.3.2. (F. Minding, 1830) *Η γεωδαισιακή καμπυλότητα μίας C^∞ παραμετρισμένης καμπύλης με το μήκος της γ σε μία λεία επιφάνεια M εξαρτάται κατ' απόλυτη τιμή μόνο από την πρώτη θεμελιώδη μορφή της M και τη γ.*

Απόδειξη. Θα συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε τους παραπάνω συμβολισμούς. Αν

$$(\phi^{-1} \circ \gamma)(s) = (u(s), v(s))$$

τότε

$$T(s) = u'(s)\frac{\partial \phi}{\partial u} + v'(s)\frac{\partial \phi}{\partial v}$$

για $|s - s_0| < \delta$. Παραγωγίζοντας,

$$T' = u''\frac{\partial \phi}{\partial u} + v''\frac{\partial \phi}{\partial v} + u'\left(u'\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + v'\frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v}\right) + v'\left(u'\frac{\partial^2 \phi}{\partial v \partial u} + v'\frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}\right)$$

$$= u''\frac{\partial \phi}{\partial u} + v''\frac{\partial \phi}{\partial v} + (u')^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + 2u'v'\frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} + (v')^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}$$

$$= u''\frac{\partial \phi}{\partial u} + v''\frac{\partial \phi}{\partial v} + (u')^2\left[\Gamma_{11}^1\frac{\partial \phi}{\partial u} + \Gamma_{11}^2\frac{\partial \phi}{\partial v} + eN(\phi(u,v))\right]$$

$$+2u'v'\left[\Gamma_{12}^1\frac{\partial \phi}{\partial u} + \Gamma_{12}^2\frac{\partial \phi}{\partial v} + fN(\phi(u,v))\right] + (v')^2\left[\Gamma_{22}^1\frac{\partial \phi}{\partial u} + \Gamma_{22}^2\frac{\partial \phi}{\partial v} + gN(\phi(u,v))\right]$$

$$= \left[u'' + (u')^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + (v')^2\Gamma_{22}^1\right]\frac{\partial \phi}{\partial u}$$

$$+\left[v'' + (u')^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + (v')^2\Gamma_{22}^2\right]\frac{\partial \phi}{\partial v}$$

$$+[(u')^2 e + 2u'v'f + (v')^2 g]N(\phi(u,v)).$$

Συνεπώς,

$$k_g(s)N_\gamma(s) = \left[u'' + (u')^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + (v')^2\Gamma_{22}^1\right]\frac{\partial \phi}{\partial u}$$

$$+\left[v'' + (u')^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + (v')^2\Gamma_{22}^2\right]\frac{\partial \phi}{\partial v}$$

και

$$k_g(s) = \langle k_g(s)N_\gamma(s), N_\gamma(s)\rangle = \langle k_g(s)N_\gamma(s), N(\gamma(s))\times T(s)\rangle = \langle T(s)\times(k_g(s)N_\gamma(s)), N(\gamma(s))\rangle$$

$$= \langle\big(u'\frac{\partial \phi}{\partial u} + v'\frac{\partial \phi}{\partial v}\big) \times \big((u'' + (u')^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + (v')^2\Gamma_{22}^1)\frac{\partial \phi}{\partial u}\big), N(\phi(u,v))\rangle$$

$$+\langle\big(u'\frac{\partial \phi}{\partial u} + v'\frac{\partial \phi}{\partial v}\big) \times \big((v'' + (u')^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + (v')^2\Gamma_{22}^2)\frac{\partial \phi}{\partial v}\big), N(\phi(u,v))\rangle$$

$$= \left(-v'u'' - (u')^2 v' \Gamma^1_{11} - 2u'(v')^2 \Gamma^1_{12} 1 - (v')^3 \Gamma^1_{22}\right) \sqrt{EG - F^2}$$

$$+ \left(u'v'' + (u')^3 \Gamma^2_{11} + 2(u')2v' \Gamma^2_{12} + u'(v')^2 \Gamma^2_{22}\right) \sqrt{EG - F^2}$$

$$= \sqrt{EG - F^2} \cdot \begin{vmatrix} u' & u'' + (u')^2 \Gamma^1_{11} + 2u'v' \Gamma^1_{12} + (v')^2 \Gamma^1_{22} \\ v' & v'' + (u')^2 \Gamma^2_{11} + 2u'v' \Gamma^2_{12} + (v')^2 \Gamma^2_{22} \end{vmatrix},$$

που εξαρτάται μόνο από τη γ και τους συντελεστές της πρώτης θεμελιώδους μορφής και των μερικών παραγώγων τους πρώτης τάξης. □

Πόρισμα 4.3.3. *Εστω M_1, M_2 δύο λείες επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$. Αν $f : M_1 \to M_2$ είναι μία ισομετρία επιφανειών, τότε η f απεικονίζει γεωδαισιακές της M_1 σε γεωδαισιακές της M_2.*

Όπως δείχνει η απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.2, οι γεωδαισιακές μίας λείας επιφάνειας M, τοπικά στο $\phi(U)$, όταν $\phi : U \to M$ είναι μία τοπική παραμέτριση της M, είναι οι λύσεις του (μη-γραμμικού) συστήματος διαφορικών εξισώσεων

$$u'' + (u')^2 \Gamma^1_{11} + 2u'v' \Gamma^1_{12} + (v')^2 \Gamma^1_{22} = 0$$

$$v'' + (u')^2 \Gamma^2_{11} + 2u'v' \Gamma^2_{12} + (v')^2 \Gamma^2_{22} = 0.$$

Οι γεωδαισιακές στο $\phi(U)$ είναι $\phi(u(s), v(s))$, όπου $s \in I$ και το I είναι κατάλληλο ανοιχτό διάστημα, που εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή αρχική θέση και αρχική ταχύτητα και η (u, v) είναι λύση του συστήματος.

Αυτό το σύστημα διαφορικών εξισώσεων είναι η τοπική έκφραση ενός νευτώνιου μηχανικού συστήματος με χώρο θέσεων την επιφάνεια M και μηδενική δυναμική ενέργεια. Τέτοιου είδους συστήματα ενδέχεται να είναι χαοτικά.

Παράδειγμα 4.3.4. Οι συντελεστές της πρώτης θεμελιώδους μορφής του κυλίνδρου

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$$

ως προς την τοπική παραμέτριση $\phi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to C$ με $\phi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ είναι $E = 1$, $F = 0$ και $G = 1$. Συνεπώς, τα σύμβολα του Christoffel είναι όλα μηδενικά και οι γεωδαισιακές είναι οι λύσεις του συστήματος διαφορικών εξισώσεων

$$u'' = 0, \quad v'' = 0.$$

Οι γεωδαισιακές, λοιπόν, στον κύλινδρο δίνονται από τον γενικό τύπο

$$\gamma(s) = (\cos(\lambda s + \mu), \sin(\lambda s + \mu), bs + c), \quad s \in \mathbb{R},$$

όπου λ, μ, b, $c \in \mathbb{R}$. Όταν η γ δεν είναι σταθερή, έχουμε $\lambda^2 + b^2 \neq 0$. Όταν $\lambda = 0$, το ίχνος της γ είναι μία γενέτειρα ευθεία του κυλίνδρου. Όταν $\lambda \neq 0$ και $b = 0$, το ίχνος της γ είναι ένας οριζόντιος κύκλος. Όταν, τέλος, $\lambda \neq 0$ και $b \neq 0$, το ίχνος της γ είναι το ίχνος μίας έλικας.

Παράδειγμα 4.3.5. Το προηγούμενο παράδειγμα του κυλίνδρου είναι ειδική περίπτωση επιφάνειας εκ περιστροφής. Γενικότερα, έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ μία C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη με το μήκος της της μορφής $\gamma(s) = (h(s), 0, z(s))$ όπου οι h, $z : I \to \mathbb{R}$ είναι C^∞ συναρτήσεις με $h(s) > 0$ για κάθε $s \in I$. Υποθέτουμε οτι είτε η γ είναι ένα-προς-ένα και η $\gamma^{-1} : \gamma(I) \to I$ είναι συνεχής, δηλαδή η γ είναι τοπολογική εμφύτευση, είτε $I = \mathbb{R}$ και η γ είναι περιοδική με κάποια περίοδο $T > 0$, ώστε η γ να είναι ένα-προς-ένα στο διάστημα $[0, T)$. Έστω

$$M = \{(h(v)\cos u, h(v)\sin u, z(v)) : (u, v) \in [0, 2\pi) \times I\}$$

η επιφάνεια εκ περιστροφής περί τον κάθετο άξονα με γενέτειρα γ.

Στο Παράδειγμα 4.2.1(β) υπολογίσαμε οτι τα σύμβολα του Christoffel της M, ως προς την τοπική παραμέτριση $\phi : \mathbb{R} \times I \to M \subset \mathbb{R}^3$ με

$$\phi(u, v) = (h(v)\cos u, h(v)\sin u, z(v))$$

είναι

$$\Gamma^1_{11} = 0, \quad \Gamma^2_{11}(u, v) = -h(v)h'(v), \quad \Gamma^1_{12}(u, v) = \frac{h'(v)}{h(v)}, \quad \Gamma^2_{12} = 0, \quad \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{22} = 0.$$

Συνεπώς, οι γεωδαισιακές τοπικά στην M είναι οι λύσεις του συστήματος διαφορικών εξισώσεων

$$u''(s) + 2u'(s)v'(s)\frac{h'(v(s))}{h(v(s))} = 0$$

$$v''(s) - (u'(s))^2 h(v(s))h'(v(s)) = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση κατά μέλη με $(h(v(s)))^2$ βρίσκουμε

$$\frac{d}{ds}\Big((h(v(s)))^2 u'(s)\Big) = 0$$

και συνεπώς υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $(h(v(s)))^2 u'(s) = c$ για όλα τα s στο διάστημα ορισμού της λύσης. Θυμιζουμε οτι η ακτίνα του παράλληλου που διέρχεται από το $\phi(u(s), v(s))$ είναι $h(v(s))$. Η γωνία $\theta(s)$ που σχηματίζει η γεωδαισιακή στο σημείο $\phi(u(s), v(s))$ με τον παράλληλο έχει

$$\cos\theta(s) = \frac{1}{\sqrt{E(u(s), v(s))}}\langle u'(s)\frac{\partial\phi}{\partial u} + v'(s)\frac{\partial\phi}{\partial v}, \frac{\partial\phi}{\partial u}\rangle = u'(s)h(v(s)) = \frac{c}{h(v(s))}.$$

Συνεπώς, η συνάρτηση $f(u, v, u', v') = h(v)\cos\theta(u, v, u', v')$, που ορίζεται στον χώρο φάσεων, είναι μία δεύτερη σταθερά της κίνησης, ανεξάρτητη από την κινητική ενέργεια. Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως Θεώρημα του Clairaut, που το απέδειξε, και λέει οτι το νευτώνιο σύστημα των γεωδαισιακών μίας επιφάνειας εκ περιστροφής στον χώρο $\mathbb{R}^3$ είναι ολοκληρώσιμο.

Η εύρεση των γεωδαισιακών μίας λείας επιφάνειας M είναι εν γένει εξαιρετικά δύσκολη, λόγω της αδυναμίας επίλυσης του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων

των γεωδαισιακών. Μερικές φορές, αυτό είναι δυνατόν χρησιμοποιώντας της συμμετρίες του, που είναι ακριβώς η ομάδα των ισομετριών της M. Για κάθε λεία επιφάνεια M, το σύνολο

$$I(M) = \{f | f : M \to M \quad \text{είναι ισομετρία επιφανειών}\}$$

είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση και λέγεται ομάδα των ισομετριών της M. Σύμφωνα με το Πόρισμα 4.3.3, τα στοιχεία της $I(M)$ απεικονίζουν γεωδαισιακές σε γεωδαισιακές, δηλαδή είναι συμμετρίες της διαφορικής εξίσωσης των γεωδαισιακών. Αν η ομάδα $I(M)$ είναι αρκετά μεγάλη, δηλαδή η επιφάνεια είναι αρκετά συμμετρική, και δρά με ισχυρά μεταβατικό τρόπο στον χώρο φάσεων, τότε μπορούμε σε κάποιες περιπτώσεις να βρούμε όλες τις γεωδαισιακές. Θα εφαρμόσουμε αυτή τη μέθοδο στην επόμενη παράγραφο για να βρούμε τις γεωδαισιακές της σφαίρας.

Θα κλείσουμε την παρούσα παράγραφο με το παρακάτω θεώρημα που δείχνει την σχέση των γεωδαισιακών μίας λείας επιφάνειας με την εσωτερική της απόσταση.

Θεώρημα 4.3.6. *Έστω M μία λεία επιφάνεια και $\gamma : I \to M$ μία C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη με το μήκος της, όπου το $I \subset \mathbb{R}$ είναι ένα ανοιχτό διάστημα. Έστω $a,\ b \in I$ με $a < b$ και $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$. Αν $d_M(p,q) = L(\gamma|_{[a,b]})$, τότε η γ είναι γεωδαισιακή στο διάστημα (a,b).*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε οτι η γεωδαισιακή καμπυλότητα της γ είναι παντού μηδεν. Προχωρούμε με απαγωγή στο άτοπο. Έστω οτι υπάρχει $a < s_0 < b$ ώστε $|k_g|(s_0) > 0$. Θεωρούμε μία τοπική παραμέτριση $\phi : U \to M$ της M, όπου το $U \subset \mathbb{R}^2$ είναι ανοιχτό σύνολο, με $\gamma(s_0) \in \phi(U)$. Από τη συνέχεια, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $[s_0 - \delta, s_0 + \delta] \subset (a,b)$ και $\gamma([s_0 - \delta, s_0 + \delta]) \subset \phi(U)$, ενώ επιπλέον $k_g(s) > 0$ για κάθε $|s - s_0| \leq \delta$, όπου η γεωδαισιακή καμπυλότητα υπολογίζεται με βάση την απεικόνιση Gauss που αντιστοιχεί στην ϕ. Έστω οτι $(\phi^{-1} \circ \gamma)(s) = (u(s), v(s))$ για $|s - s_0| \leq \delta$.

Υπάρχει μία C^∞ συνάρτηση $\lambda : \mathbb{R} \to [0,1]$ τέτοια ώστε $\lambda(s) > 0$ για $|s - s_0| < \delta$ και $\lambda(s) = 0$ για $|s - s_0| \geq \delta$. Υπάρχουν τώρα C^∞ συναρτήσεις $\bar{u},\ \bar{v} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\bar{u}(s) = \bar{v}(s) = 0$ για $|s - s_0| \geq \delta$ και

$$\lambda(s) N_\gamma(s) = \bar{u}(s) \frac{\partial \phi}{\partial u} + \bar{v}(s) \frac{\partial \phi}{\partial v}$$

για $|s - s_0| \leq \delta$. Λόγω της συνέχειας και της συμπάγειας του κλειστού διαστήματος $[s_0 - \delta, s_0 + \delta]$, υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε να ορίζεται η C^∞ μεταβολή $C : (-\epsilon, \epsilon) \times [a,b] \to M$ της γ, με

$$C(t,s) = \phi(u(s) + t\bar{u}(s), v(s) + t\bar{v}(s))$$

για $|s - s_0| \leq \delta$, δηλαδή $C(0,s) = \gamma(s)$ για $|s - s_0| \geq \delta$. Τότε

$$\frac{\partial C}{\partial t}(0,s) = \lambda(s) N_\gamma(s)$$

για κάθε $|s - s_0| \leq \delta$. Επιπλέον, $C(t,a) = p$ και $C(t,b) = q$ για κάθε $|t| < \epsilon$.

Σύμφωνα με την υπόθεσή μας η C^∞ συνάρτηση $L : (-\epsilon, \epsilon) \to [0, +\infty)$ με

$$L(t) = \int_a^b \left\| \frac{\partial C}{\partial s} \right\| ds$$

παίρνει τοπικά ελάχιστη τιμή στο 0. Συνεπώς, $L'(0) = 0$. Όμως,

$$L'(t) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\left\|\frac{\partial C}{\partial s}\right\| ds = \int_a^b \frac{\langle \frac{\partial^2 C}{\partial t \partial s}, \frac{\partial C}{\partial s}\rangle}{\|\frac{\partial C}{\partial s}\|} ds.$$

Από το Θεώρημα του Schwarz και ολοκληρώνοντας κατά μέρη, ειδικά για $t = 0$ έχουμε

$$0 = L'(0) = \int_a^b \langle \frac{\partial^2 C}{\partial s \partial t}(0,s), \frac{\partial C}{\partial s}(0,s)\rangle ds$$

$$= \langle \frac{\partial C}{\partial t}(0,b), \frac{\partial C}{\partial s}(0,b)\rangle - \langle \frac{\partial C}{\partial t}(0,a), \frac{\partial C}{\partial s}(0,a)\rangle - \int_a^b \langle \frac{\partial C}{\partial t}(0,s), \frac{\partial^2 C}{\partial s^2}(0,s)\rangle ds$$

$$= 0 - 0 - \int_{s_0-\delta}^{s_0+\delta} \langle \lambda(s) N_\gamma(s), \ddot{\gamma}(s)\rangle ds = -\int_{s_0-\delta}^{s_0+\delta} \lambda(s) k_g(s) ds < 0.$$

Αυτή η αντίφαση ολοκληρώνει την απόδειξη. □

4.4 Σφαιρική Γεωμετρία

Έστω $R > 0$. Η σφαίρα με ακτίνα R και κέντρο το σημείο $(0,0,0)$ είναι η λεία επιφάνεια

$$S_R^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

και είναι ισομετρική με κάθε άλλη σφαίρα με την ίδια ακτίνα. Για κάθε $A \in O(3,\mathbb{R})$, έχουμε $A(S_R^2) = S_R^2$ και συνεπώς ο περιορισμός του A στην S_R^2 είναι ισομετρία της S_R^2. Με άλλα λόγια η ορθογώνια ομάδα $O(3,\mathbb{R})$ είναι υποομάδα της $I(S_R^2)$. Μπορεί να αποδειχθεί οτι στην πραγματικότητα $I(S_R^2) = O(3,\mathbb{R})$, αλλά δεν θα χρειαστούμε την ισότητα.

Μας ενδιαφέρει η δράση της ομάδας $O(3,\mathbb{R})$ στα σημεία της σφαίρας S_R^2 και στα εφαπτόμενα διανύσματά της. Έστω $p \in S_R^2$ και $\{X, Y\}$ μία ορθοκανονική βάση του εφαπτόμενου επιπέδου $T_pS_R^2$. Το $\{X, Y, \frac{1}{R}p\}$ είναι μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Συνεπώς, υπάρχει $A \in O(3,\mathbb{R})$ ώστε

$$A(e_1) = X, \quad A(e_2) = Y, \quad A(e_3) = \frac{1}{R}p.$$

Συγκεκριμένα, ο A είναι ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα X, Y και $\frac{1}{R}p$, με αυτή τη διάταξη. Ειδικά, $A(Re_3) = p$ και επειδή το εφαπτόμενο επίπεδο $T_{Re_3}S_R^2$ στον βόρειο πόλο Re_3 είναι το οριζόντιο που έχει βάση $\{e_1, e_2\}$, έχουμε $A(T_{Re_3}S_R^2) = T_pS_R^2$. Από αυτά προκύπτει οτι για κάθε $p \in S_R^2$, $X \in T_pS_R^2$, με $\|X\| = 1$ και $Z \in T_{Re_3}S_R^2$, με $\|Z\| = 1$, υπάρχει ισομετρία $f = A \in O(3,\mathbb{R})$ ώστε $f(Re_3) = p$ και $f_{*Re_3}(Z) = A(Z) = X$. Συνεπώς, για κάθε $p_1, p_2 \in S_R^2$ και $X_1 \in T_{p_1}S_R^2$, $X_2 \in T_{p_2}S_R^2$ με $\|X_1\| = 1$ και $\|X_2\| = 1$, υπάρχει ισομετρία $f \in O(3,\mathbb{R})$ ώστε $f(p_1) = p_2$ και $f_{*p_1}(X_1) = f(X_1) = X_2$. Δηλαδή, η δράση της ομάδας ισομετριών $O(3,\mathbb{R})$ είναι μεταβατική στην S_R^2 και στα εφαπτόμενα διανύσματά της.

Από τη μοναδικότητα της εξάρτησης των λύσεων του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων των γεωδαισιακών από τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή την αρχική θέση

και την αρχική ταχύτητα, και την μεταβατικότητα της δράσης της ορθογώνιας ομάδας $O(3,\mathbb{R})$ σε αυτές τις αρχικές συνθήκες, αρκεί να βρούμε μόνο μία γεωδιασιακή της σφαίρας. Όλες οι άλλες είναι εικόνες αυτής μέσω ορθογώνιων μετασχηματισμών.

Στο Παράδειγμα 4.2.1(α) υπολογίσαμε οτι τα σύμβολα του Christoffel ως προς την τοπική παραμέτριση $\phi : (0,\pi) \times (0,2\pi) \to S^2_R$ των σφαιρικών συντεταγμένων

$$\phi(u,v) = (R\sin u\cos v, R\sin u\sin v, R\cos u)$$

είναι

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = 0, \quad \Gamma^2_{12}(u,v) = \cot u, \quad \Gamma^1_{22}(u,v) = -\sin u\cos u, \quad \Gamma^2_{22} = 0.$$

Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων των γεωδαισιακών είναι λοιπόν

$$u'' - (v')^2 \sin u\cos u = 0$$

$$v'' + 2u'v'\cot u = 0.$$

Μία προφανής λύση είναι η

$$u(s) = \frac{1}{R}s + \frac{\pi}{2}, \quad v(s) = \frac{\pi}{4}, \quad |s| < \frac{\pi R}{2}$$

που δίνει τη γεωδαισιακή $\gamma(s) = \phi(u(s), v(s))$, $|s| < \dfrac{\pi R}{2}$, στο $\phi((0,\pi)\times(0,2\pi))$. Το ίχνος της γ είναι ένας μεσημβρινός από τον βόρειο στον νότιο πόλο. Από τη μοναδικότητα της εξάρτησης των λύσεων του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων των γεωδαισιακών από την αρχική θέση και την αρχική ταχύτητα και την μεταβατικότητα της δράσης των ισομετριών της S^2_R σε αυτές προκύπτει οτι οι (μη-σταθερές) γεωδαισιακές της S^2_R είναι οι C^∞ παραμετρισμένες καμπύλες με το μήκος της που έχουν ίχνη τους μέγιστους κύκλους, δηλαδή τις τομές της S^2_R με 2-διάστατους διανυσματικούς υπόχωρους του $\mathbb{R}^3$.

Από κάθε ζεύγος σημείων $p, q \in S^2_R$, με $p \neq \pm q$, διέρχεται ακριβώς μία γεωδαισιακή, το ίχνος της οποίας χωρίζεται σε ένα μικρό και ένα μεγάλο τόξο από τα σημεία. Το μεγάλο τόξο είναι γεωδαισιακό, αλλά δεν είναι ίχνος καμπύλης ελαχίστου μήκους στη σφαίρα που συνδέει τα p, q. Αυτό δείχνει οτι το αντίστροφο του Θεωρήματος 4.3.6 δεν ισχύει.

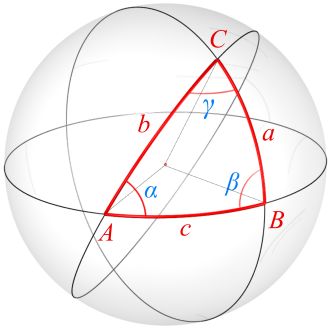
Παρατηρούμε οτι στην εσωτερική σφαιρική γεωμετρία δύο γεωδαισιακές που εκκινούν από το ίδιο σημείο ξανασυναντιούνται στο αντιποδικό του μετά από χρόνο πR, σχηματίζοντας έτσι ένα δίγωνο. Αυτή η συμπεριφορά των γεωδαισιακών οφείλεται στην θετική καμπυλότητα Gauss της σφαίρας. Αν $0 \leq \epsilon \leq 2\pi$ είναι η γωνία των αρχικών ταχυτήτων των δύο γεωδαισιακών, τότε το εμβαδόν του διγώνου είναι ισο με

$$\int_0^\epsilon \int_0^\pi \left\| \frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v} \right\| du dv = \int_0^\epsilon \int_0^\pi R^2 \sin u \, du dv = 2\epsilon R^2.$$

Ειδικά, για $\epsilon = 2\pi$, το εμβαδόν της σφαίρας S^2_R είναι ίσο με $4\pi R^2$. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το εμβαδόν των σφαιρικών γεωδαισιακών τριγώνων, που φυσικά είναι αναλλοίωτο από ισομετρίες της σφαίρας.

Θεώρημα 4.4.1. (T. Harriot, 1603) *Εστω* $\overset{\triangle}{ABC}$ *ένα σφαιρικό γεωδαισιακό τρίγωνο με αντίστοιχες εσωτερικές γωνίες* α, β, γ *στη σφαίρα* S^2_R *ακτίνας* $R > 0$. *Αν* $E(\overset{\triangle}{ABC})$ *είναι το εμβαδόν του τριγώνου, τότε*

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{E(\overset{\triangle}{ABC})}{R^2}.$$



Απόδειξη. (L. Euler, 1781) Θεωρούμε τους τρείς μέγιστους κύκλους τόξα των οποίων είναι οι πλευρές του σφαιρικού γεωδαισιακού τριγώνου. Αυτοί χωρίζουν τη σφαίρα σε 6 σφαιρικά δίγωνα. Τα 3 από αυτά περιέχουν το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABC}$, των οποίων είναι η τομή και τα άλλα 3 το αντιποδικό του. Δηλαδή, αυτά τα 6 δίγωνα καλύπτουν τα δύο τρίγωνα από 3 φορές και την υπόλοιπη σφαιρική επιφάνεια από μία φορά. Έχουμε λοιπόν,

$$2[2\alpha R^2 + 2\beta R^2 + 2\gamma R^2] = 4\pi R^2 + 2[E(\overset{\triangle}{ABC}) + E(\overset{\triangle}{ABC})]$$

και συνεπώς

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{E(\overset{\triangle}{ABC})}{R^2}. \quad \square$$

Έτσι στη Σφαιρική Γεωμετρία το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός σφαιρικού γεωδαισιακού τριγώνου είναι πάντα μεγαλύτερο του π και η διαφορά είναι το εμβαδόν του τριγώνου επί την καμπυλότητα Gauss.

4.5 Υπερβολική Γεωμετρία

Στο Παράδειγμα 3.6.2 κατασκευάσαμε την ψευδοσφαίρα S, που είναι η επιφάνεια εκ περιστροφής περί τον κάθετο άξονα της C^∞ παραμετρισμένης καμπύλης με το μήκος της $\gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ που δίνεται από τον τύπο

$$\gamma(s) = (e^{-s}, 0, \int_0^s \sqrt{1 - e^{-2t}}dt)$$

και είναι η tractrix του Παραδείγματος 1.2.4. Η ψευδοσφαίρα έχει παντού σταθερή καμπυλότητα Gauss -1. Η συνηθισμένη τοπική παραμέτριση της ψευδοσφαίρας χωρίς τη γενέτειρα, ως επιφάνειας εκ περιστροφής, είναι η $\phi : (0, 2\pi) \times (0, +\infty) \to S$ με

$$\phi(u, v) = \left(e^{-v}\cos u, e^{-v}\sin u, \int_0^v \sqrt{1 - e^{-2t}}dt\right).$$

Αν θέσουμε $w = e^v$, παίρνουμε μία νέα τοπική παραμέτριση της ψευδοσφαίρας χωρίς τη γενέτειρα, $\psi : (0, 2\pi) \times (1, +\infty) \to S$ που δίνεται από τον τύπο

$$\psi(u, w) = \Big(\frac{\cos u}{w}, \frac{\sin u}{w}, \int_0^{\log w} \sqrt{1 - e^{-2t}}dt\Big).$$

Αφού

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin u}{w} \\ \frac{\cos u}{w} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial w} = \begin{pmatrix} -\frac{\cos u}{w^2} \\ -\frac{\sin u}{w^2} \\ \frac{1}{w}\sqrt{1 - \frac{1}{w^2}} \end{pmatrix}$$

οι συντελεστές της πρώτης θεμελιώδους μορφής ως προς την τοπική παραμέτριση ψ είναι

$$E(u, w) = \frac{1}{w^2}, \quad F(u, w) = 0, \quad G(u, w) = \frac{1}{w^2}$$

για $(u, w) \in (0, 2\pi) \times (1, +\infty)$. Οι C^∞ συναρτήσεις E, F, G δεν ορίζονται μόνο στη λωρίδα $(0, 2\pi) \times (1, +\infty)$, αλλά σε όλο το άνω ημιεπίπεδο

$$\mathbb{H}^2 = \{(u, w) \in \mathbb{R}^2 : w > 0\}.$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε το $\mathbb{H}^2$ ως μία αφηρημένη επιφάνεια εφοδιασμένη με την πρώτη θεμελιώδη μορφή που έχει συντελεστές τις παραπάνω συναρτήσεις E, F, G. Έτσι, αν $(u, w) \in \mathbb{H}^2$ και $X \in T_{(u,w)}\mathbb{H}^2$, δηλαδή το X είναι διάνυσμα με σημείο εφαρμογής το (u, w), τότε

$$I_{(u,w)}(X) = \frac{1}{w^2}\|X\|^2.$$

Το $\mathbb{H}^2$ εφοδιασμένο με αυτή την πρώτη θεμελιώδη μορφή λέγεται *υπερβολικό επίπεδο* του Poincaré και έχει παντού σταθερή καμπυλότητα Gauss -1.

Τα σύμβολα του Christoffel Γ^1_{11}, Γ^2_{11} είναι οι λύσεις του διαγώνιου γραμμικού συστήματος

$$\Gamma^1_{11}\frac{1}{w^2} = 0, \quad \Gamma^2_{11}\frac{1}{w^2} = \frac{1}{w^3}$$

οπότε $\Gamma^1_{11} = 0$ και $\Gamma^2_{11}(u, w) = \dfrac{1}{w}$. Τα Γ^1_{12}, Γ^2_{12} είναι οι λύσεις του διαγώνιου γραμμικού συστήματος

$$\Gamma^1_{12}\frac{1}{w^2} = -\frac{1}{w^3}, \quad \Gamma^2_{12}\frac{1}{w^2} = 0$$

οπότε $\Gamma^1_{12}(u, w) = -\dfrac{1}{w}$ και $\Gamma^2_{12} = 0$. Τέλος, τα Γ^1_{22}, Γ^2_{22} είναι οι λύσεις του διαγώνιου γραμμικού συστήματος

$$\Gamma^1_{22}\frac{1}{w^2} = 0, \quad \Gamma^2_{22}\frac{1}{w^2} = -\frac{1}{w^3}$$

οπότε $\Gamma^1_{22} = 0$ και $\Gamma^2_{22} = -\dfrac{1}{w}$. Συνεπώς, το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων των γεωδαισιακών στο $\mathbb{H}^2$ είναι

$$u'' - \frac{2}{w}u'w' = 0$$

$$w'' + \frac{1}{w}[(u')^2 - (w')^2] = 0.$$

Για κάθε $u_0 \in \mathbb{R}$, μία προφανής λύση είναι η $u(s) = u_0$, $w(s) = e^s$, $s \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, κάθε ευκλείδεια ημιευθεία στο $\mathbb{H}^2$ που είναι κάθετη στον οριζόντιο άξονα είναι το ίχνος υπερβολικής γεωδαισιακής. Θα βρούμε όλες τις υπερβολικές γεωδαισιακές με δύο τρόπους. Ο πρώτος τρόπος είναι στοιχειώδης και μάλλον επιφανειακός. Έστω οτι $(u(s), w(s))$ είναι μία υπερβολική γεωδαισιακή που δεν είναι κάθετη στον οριζόντιο άξονα ημιευθεία. Τότε $u'(s) \neq 0$ για όλα τα s στο διάστημα ορισμού της, από την μοναδικότητα των λύσεων από τις αρχικές συνθήκες. Αφού οι γεωδαισιακές είναι παραμετρισμένες (αναλογικά) με το μήκος τους έχουμε επιπλέον $(u')^2+(w')^2 = w^2$. Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη διαφορική εξίσωση με w' και τη δεύτερη με u' παίρνουμε

$$w'u'' = \frac{2}{w}u'(w')^2, \quad u'w'' = \frac{u'}{w}[(w')^2 - (u')^2]$$

και αφαιρώντας κατά μέλη

$$w'u'' - u'w'' = \frac{u'}{w}[(w')^2 + (u')^2] = u'w.$$

Υπολογίζουμε τώρα οτι

$$(u')^2\left(\frac{uu' + ww'}{u'}\right)' = u'[(u')^2 + uu'' + (w')^2 + ww''] - u''(uu' + ww')$$

$$= u'(uu'' + w^2 + ww'') - u''(uu' + ww') = u'w^2 + u'ww'' - wu'(w + w'') = 0.$$

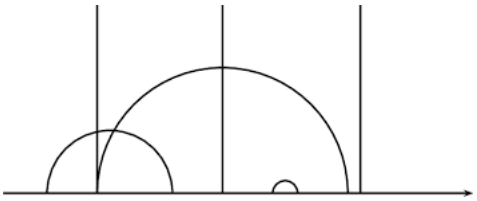
Συνεπώς, υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{uu' + ww'}{u'} = a$$

ή ισοδύναμα $\big((u-a)^2 + w^2\big)' = 0$. Δηλαδή, υπάρχει $R > 0$, ώστε

$$\big(u(s) - a\big)^2 + (w(s))^2 = R^2$$

για όλα τα s στο διάστημα ορισμού της γεωδαισιακής. Αυτό σημαίνει οτι το ίχνος της υπερβολικής γεωδαισιακής είναι ευκλείδειο ημικύκλιο με κέντρο πάνω στον οριζόντιο άξονα και κάποια ακτίνα.



Μία δεύτερη μέθοδος για την εύρεση των γεωδαισιακών στο υπερβολικό επίπεδο είναι αυτή που εφαρμόσαμε στην προηγούμενη παράγραφο 4.4 για την περίπτωση της σφαίρας, χρησιμοποιώντας τη δράση της ομάδας των ισομετριών. Αυτή η προσέγγιση είναι αποκαλυπτική για τη βαθύτερη υφή της επίπεδης Υπερβολικής Γεωμετρίας. Για να γίνει αυτό, πρέπει πρώτα να περιγράψουμε τις ισομετρίες του υπερβολικού επιπέδου.

Το υπερβολικό επίπεδο μπορεί να περιγραφεί πολύ βολικά με τη χρήση μιγαδικών αριθμών, ταυτίζοντας το $(u, w) \in \mathbb{R}^2$ με τον $u + iw \in \mathbb{C}$. Τότε,

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$$

και η πρώτη θεμελιώδης μορφή γράφεται

$$I_z(X) = \frac{1}{(\mathrm{Im}z)^2}|X|^2$$

για κάθε $z \in \mathbb{H}^2$ και $X \in T_z\mathbb{H}^2$, όπου και για τα εφαπτόμενα διανύσματα χρησιμοποιούμε μιγαδικό συμβολισμό.

Μία προφανής υπερβολική ισομετρία είναι η $h : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ με $h(z) = -\overline{z}$, που είναι η ανάκλαση ως προς τον φανταστικό ημιάξονα $\ell = \{iy : y > 0\}$. Πράγματι, επειδή η h είναι περιορισμός γραμμικής απεικόνισης στο $\mathbb{H}^2$, έχουμε $h_{*z}(X) = -\overline{X}$ για κάθε $z \in \mathbb{H}^2$, $X \in T_z\mathbb{H}^2$ και συνεπώς

$$I_{h(z)}(h_{*z}(X)) = \frac{1}{(\mathrm{Im}h(z))^2}|h_{*z}(X)|^2 = \frac{1}{(\mathrm{Im}(-\overline{z}))^2}|(-\overline{X})|^2 = \frac{1}{(\mathrm{Im}z)^2}|X|^2 = I_z(X).$$

Αν a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ και $ad - bc = 1$, ο μετασχηματισμός Möbius $g : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, στη σφαίρα του Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, με

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

απεικονίζει το $\mathbb{H}^2$ στον εαυτό του, γιατί

$$\mathrm{Im}g(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{az + b}{cz + d} - \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d}\right) = \frac{\mathrm{Im}z}{|cz + d|^2}.$$

Η μιγαδική παράγωγος του g είναι

$$g'(z) = \frac{1}{(cz + d)^2}$$

και

$$I_{g(z)}(g_{*z}(X)) = \frac{1}{(\mathrm{Im}g(z))^2}|g'(z)X|^2 = \frac{1}{(\mathrm{Im}z)^2}|cz + d|^4\frac{1}{|cz + d|^4}|X|^2 = I_z(X)$$

για κάθε $z \in \mathbb{H}^2$ και $X \in T_z\mathbb{H}^2$. Συνεπώς, ο g είναι ισομετρία του υπερβολικού επιπέδου $\mathbb{H}^2$. Το σύνολο $PSL(2, \mathbb{R})$ όλων των μετασχηματισμών Möbius με πραγματικούς συντελεστές αποτελεί υποομάδα της ομάδας $I(\mathbb{H}^2)$ των ισομετριών του υπερβολικού επιπέδου και είναι η αντίστοιχη της ομάδας $SO(2, \mathbb{R})$ των στροφών της Ευκλείδειας Επιπεδομετρίας.

Η $PSL(2, \mathbb{R})$ δρά μεταβατικά στο $\mathbb{H}^2$, γιατί για κάθε $u + iw \in \mathbb{H}^2$, αν θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό Möbius $g(z) = wz + u$ έχουμε $g(i) = u + iw$. Επιπλέον, αν $X \in T_i\mathbb{H}^2$ και $|X| = I_i(X) = 1$, υπάρχει $0 \leq \theta < 2\pi$ ώστε $X = e^{-2i\theta}$ και θεωρώντας τον μετασχηματισμό Möbius

$$g(z) = \frac{\cos\theta \cdot z - \sin\theta}{\sin\theta \cdot z + \cos\theta}$$

έχουμε $g(i) = i$ και $g'(i) = e^{-2i\theta}$, δηλαδή $g_{*i}(1) = X$. Αυτό σε συνδυασμό με τη μεταβατικότητα της δράσης στα σημεία του $\mathbb{H}^2$ δείχνει οτι η $PSL(2, \mathbb{R})$ δρά μεταβατικά και στα εφαπτόμενα διανύσματα.

Επειδή τώρα η $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^2$ με $\gamma(s) = ie^s$ είναι υπερβολική γεωδαισιακή παραμετρισμένη με το μήκος της, όπως είδαμε στην αρχή της παρούσας παραγράφου, από την μεταβατικότητα της δράσης της ομάδας υπερβολικών ισομετριών $PSL(2,\mathbb{R})$ στα σημεία και στα εφαπτόμενα διανύσματα, κάθε άλλη (μη-σταθερή) υπερβολική γεωδαισιακή παραμετρισμένη με το μήκος της είναι εικόνα της γ μέσω κάποιου μετασχηματισμού Möbius με πραγματικούς συντελεστές, δηλαδή είναι της μορφής $g \circ \gamma$, όπου $g \in PSL(2,\mathbb{R})$. Το ίχνος της $g \circ \gamma$ είναι είτε μία ημιευθεία κάθετη στον οριζόντιο άξονα είτε ένα ημικύκλιο με κέντρο στον οριζόντιο άξονα. Συγκεκριμένα, ο κάθετος άξονας είναι η ευθεία με εξίσωση $z + \overline{z} = 0$ και αν ο g δίνεται από τον τύπο

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

όπου a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ με $ad - bc = 1$, τότε

$$z = \frac{dg(z) - b}{-cg(z) + a}$$

οπότε

$$\frac{dg(z) - b}{-cg(z) + a} + \frac{d\overline{g(z)} - b}{-c\overline{g(z)} + a} = 0$$

ή ισοδύναμα

$$cd|g(z)|^2 - (ad + bc)\mathrm{Re}g(z) + ab = 0.$$

Αν $c = 0$, τότε $d \neq 0$ και $\mathrm{Re}g(z) = \dfrac{b}{d}$, που σημαίνει οτι το ίχνος της $g \circ \gamma$ είναι μία ημιευθεία κάθετη στον οριζόντιο άξονα. Όμοια, αν $d = 0$, τότε $c \neq 0$ και $\mathrm{Re}g(z) = \dfrac{a}{c}$, που σημαίνει οτι το ίχνος της $g \circ \gamma$ είναι πάλι μία ημιευθεία κάθετη στον οριζόντιο άξονα. Αν $cd \neq 0$, τότε η παραπάνω εξίσωση είναι η εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο

$$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{d}\right), 0\right)$$

πάνω στον οριζόντιο άξονα και ακτίνα $\dfrac{1}{4c^2d^2}$. Σε αυτή την περίπτωση λοιπόν το ίχνος της $g \circ \gamma$ είναι ένα ημικύκλιο με κέντρο στον οριζόντιο άξονα. Αυτές είναι όλες οι υπερβολικές γεωδαισιακές. Εκτός όλων των άλλων, η μέθοδος αυτή μας έδωσε και την πληροφορία οτι οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης των γεωδαισιακών στο υπερβολικό επίπεδο έχουν διάστημα ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.

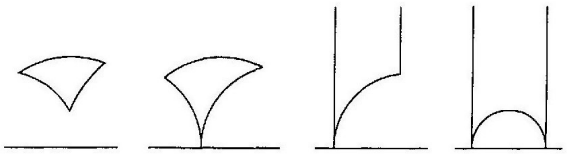
Παρατηρούμε οτι από κάθε δύο διαφορετικά σημεία του $\mathbb{H}^2$ διέρχεται ακριβώς μία υπερβολική γεωδαισιακή. Επιπλέον, σε αντίθεση με τη Σφαιρική Γεωμετρία όπου δύο οποιεσδήποτε γεωδαισιακές τέμνονται (σε δύο αντιποδικά σημεία) στην Υπερβολική Γεωμετρία από ένα σημείο εκτός μίας δεδομένης υπερβολικής γεωδαισιακής διέρχονται ένα υπεραριθμήσιμο πλήθος από υπερβολικές γεωδαισιακές που δεν την τέμνουν. Συνεπώς, και στις δύο περιπτώσεις δεν ισχύει το αξίωμα των παραλλήλων, όμως με διαφορετικό τρόπο σε κάθε περίπτωση.

Όπως κάναμε στην Σφαιρική Γεωμετρία, θα υπολογίσουμε το εμβαδόν των τριγώνων στην Υπερβολική Γεωμετρία. Το υπερβολικό εμβαδόν ενός συνόλου $A \subset \mathbb{H}^2$ είναι

$$E(A) = \iint_A \sqrt{EG - F^2}\,dudw = \iint_A \frac{1}{w^2}\,dudw,$$

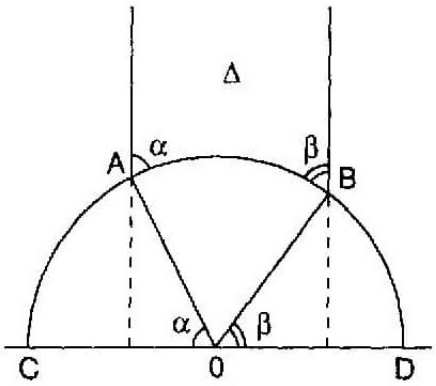
αν το ολοκλήρωμα υπάρχει και παραμένει αναλλοίωτο από τις υπερβολικές ισομετρίες. Θυμίζουμε οτι η ύπαρξη του ολοκληρώματος εξαρτάται από το σύνολο A.

Ενα υπερβολικό γεωδαισιακό n-γωνο, $n \geq 3$, είναι ένα κλειστό υποσύνολο P του $\mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$, που φράσσεται από n υπερβολικά γεωδαισιακά τμήματα, που λέγονται πλευρές. Τα σημεία τομής των πλευρών λέγονται κορυφές. Επιτρέπουμε κάποιες από τις κορυφές να βρίσκονται στο $\partial\mathbb{H}^2 = \hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Τέτοιες κορυφές αποκαλούνται ιδεώδεις κορυφές και βέβαια δεν ανήκουν στο $P \cap \mathbb{H}^2$. Αν το P δεν έχει καμμία ιδεώδη κορυφή, είναι κλειστό και φραγμένο, δηλαδή συμπαγές.



Πρόταση 4.5.1. *Εστω Δ ένα υπερβολικό γεωδαισιακό τρίγωνο με μία μόνον ιδεώδη κορυφή. Αν $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi$ είναι οι εσωτερικές γωνίες στις δύο άλλες κορυφές, τότε το υπερβολικό εμβαδόν του είναι*

$$E(\Delta) = \pi - \alpha - \beta.$$



Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλο στοιχείο της ομάδας των υπερβολικών ισομετριών $I(\mathbb{H}^2)$ μπορούμε να μετασχηματίσουμε το τρίγωνο, ώστε η ιδεώδης κορυφή του να είναι η ∞, οπότε οι δύο πλευρές που τέμνονται σ΄ αυτήν είναι τμήματα ευκλειδείων ημιευθειών κάθετων στο $\hat{\mathbb{R}}$. Μετασχηματίζοντας στην συνέχεια το τρίγωνο με μετασχηματισμούς Möbius της μορφής $f(z) = z + b$, $b \in \mathbb{R}$ και $g(z) = \lambda z$, $\lambda > 0$, το φέρνουμε σε θέση ώστε η τρίτη πλευρά να περιέχεται στο ευκλείδειο ημικύκλιο με κέντρο το $0 \in \mathbb{R}$ και ακτίνα 1. Το υπερβολικό εμβαδόν και οι γωνίες παραμένουν αναλλοίωτα από τους μετασχηματισμούς αυτούς. Εχουμε τώρα

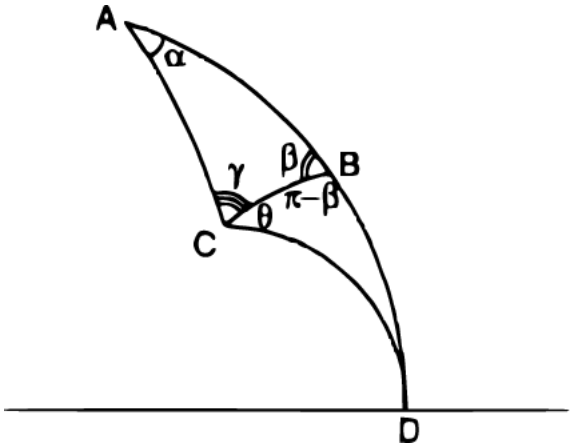
$$E(\Delta) = \iint_{\Delta} \frac{1}{w^2} du dw = \int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta} \left(\int_{\sqrt{1-u^2}}^{+\infty} \frac{1}{w^2} dw \right) du = \int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du.$$

Θέτοντας $u = \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$, βρίσκουμε

$$E(\Delta) = \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin\theta}{\sin\theta} d\theta = \pi - \alpha - \beta. \quad \square$$

Θεώρημα 4.5.2. *Εστω $\Delta \subset \mathbb{H}^2$ ένα υπερβολικό γεωδαισιακό τρίγωνο με εσωτερικές γωνίες α, β, γ. Το υπερβολικό εμβαδόν του Δ είναι*

$$E(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$



Απόδειξη. Μετασχηματίζοντας το τρίγωνο με κατάλληλα στοιχεία της ομάδας $I(\mathbb{H}^2)$ των υπερβολικών ισομετριών παίρνουμε ένα ισοδύναμο τρίγωνο του οποίου καμία πλευρά δεν είναι μέρος ευκλείδειας ευθείας κάθετης στο $\hat{\mathbb{R}}$. Οπως πάντα το εμβαδόν και οι γωνίες δεν αλλάζουν. Εστω οτι A, B, C είναι οι κορυφές του γεωδαισιακού τριγώνου με αντίστοιχες εσωτερικές γωνίες α, β, γ. Προεκτείνοντας την πλευρά AB προς την κατεύθυνση του B, η υπερβολική γεωδαισιακή, μέρος της οποίας είναι η AB, έχει ένα σημείο D στο $\hat{\mathbb{R}}$. Το υπερβολικό τρίγωνο Δ_1 με κορυφές A, D, C έχει μόνον μία ιδεώδη κορυφή, την D και το ίδιο ισχύει για το υπερβολικό γεωδαισιακό τρίγωνο Δ_2 με κορυφές B, D, C. Αν θ είναι η εσωτερική γωνία του τριγώνου Δ_2 στην κορυφή C, έχουμε

$$E(\Delta) = E(\Delta_1) - E(\Delta_2) = [\pi - \alpha - (\gamma + \theta)] - [\pi - (\theta + \pi - \beta)] = \pi - (\alpha + \beta + \gamma). \quad \square$$

Έτσι το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός υπερβολικού γεωδαισιακού τριγώνου είναι πάντα μικρότερο από π και η διαφορά είναι το υπερβολικό εμβαδόν του τριγώνου.

4.6 Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα σύμβολα Christoffel της ελικοειδούς επιφάνειας $M = \phi(\mathbb{R}^2)$, όπου $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ είναι η ολική παραμέτριση

$$\phi(u, v) = (v\cos u, v\sin u, au), \quad a > 0.$$

2. Εστω ϕ, $\psi : (0, 2\pi) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ οι C^∞ απεκονίσεις με

$$\phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \log v),$$

$$\psi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u).$$

Το $M_1 = \phi((0, 2\pi) \times (0, +\infty))$ είναι η επιφάνεια εκ περιστροφής (περί τον κάθετο άξονα) με γενέτειρα την C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma(t) = (t, 0, \log t)$, $t > 0$, χωρίς τη γενέτειρα, και το $M_2 = \psi((0, 2\pi)\times(0, +\infty))$ είναι μέρος μίας ελικοειδούς επιφάνειας.
(α) Να αποδειχθεί οτι για τις καμπυλότητες Gauss ισχύει $K(\phi(u, v)) = K(\psi(u, v))$ για κάθε $0 < u < 2\pi$, $v > 0$.
(β) Να αποδειχθεί οτι η $\phi \circ \psi^{-1} : M_2 \to M_1$ δεν είναι ισομετρία επιφανειών.

3. Εστω M μία λεία επιφάνεια και $\phi : U \to M$ μία τοπική παραμέτριση της, τέτοια ώστε $F(u, v) = 0$ και για κάθε $(u, v) \in U$. Να αποδειχθεί οτι η καμπυλότητα Gauss στο $\phi(U)$ δίνεται από τον τύπο

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{EG}} \cdot \frac{\partial G}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{EG}} \cdot \frac{\partial E}{\partial v}\right)\right].$$

4. Εστω M μία λεία επιφάνεια και $\phi : U \to M$ μία τοπική παραμέτριση της, τέτοια ώστε $F(u, v) = 0$ και $E(u, v) = G(u, v) = \lambda(u, v)$ για κάθε $(u, v) \in U$, όπου η $\lambda : U \to (0, +\infty)$ είναι κάποια C^∞ συνάρτηση. Να αποδειχθεί οτι η καμπυλότητα Gauss στο $\phi(U)$ δίνεται από τον τύπο

$$K(\phi(u, v)) = -\frac{1}{2\lambda(u, v)}\left[\frac{\partial^2(\log \lambda)}{\partial u^2}(u, v) + \frac{\partial^2(\log \lambda)}{\partial v^2}(u, v)\right]$$

για κάθε $(u, v) \in U$. Ειδικά, όταν $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\}$ και $\lambda(u, v) = \dfrac{1}{v^2}$, τότε $K = -1$.

5. Εστω M μία λεία επιφάνεια και $\phi : U \to M$ μία τοπική παραμέτριση της, τέτοια ώστε $E(u, v) = G(u, v) = 1$ και $F(u, v) = \cos\theta(u, v)$ για κάθε $(u, v) \in U$, όπου $\theta : U \to (0, \pi)$ είναι κάποια C^∞ συνάρτηση. Να αποδειχθεί οτι η καμπυλότητα Gauss στο $\phi(U)$ δίνεται από τον τύπο

$$K(\phi(u, v)) = -\frac{1}{\sin\theta(u, v)} \cdot \frac{\partial^2\theta}{\partial u \partial v}(u, v).$$

6. Εστω M μία λεία επιφάνεια και $\phi : U \to M$ μία τοπική παραμέτριση της, τέτοια ώστε $E(u, v) = 1$, $F(u, v) = 0$ και $G(u, v) = (h(u, v))^2$ για κάθε $(u, v) \in U$, όπου $h : U \to (0, +\infty)$ είναι κάποια C^∞ συνάρτηση. Να αποδειχθεί οτι η καμπυλότητα Gauss στο $\phi(U)$ δίνεται από τον τύπο

$$K(\phi(u, v)) = -\frac{1}{h(u, v)} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(u, v).$$

7. Αν M είναι μία λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$, να αποδειχθεί οτι δεν υπάρχει καμία τοπική παραμέτριση $\phi : U \to M$ τέτοια ώστε $E(u,v) = G(u,v) = 1$, $F(u,v) = 0$, ενώ $e(u,v) = 1$, $g(u,v) = -1$ και $f(u,v) = 0$ για κάθε $(u,v) \in U$.

8. Εστω M μία λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ για την οποία υπάρχει μία ισομετρία επιφανειών $T : S^2_R \to M$, για κάποιο $R > 0$. Να αποδειχθεί οτι οτι η M είναι ευκλείδεια σφαίρα ακτίνας R.

9. Το ελλειπτικό παραβολοειδές είναι η λεία επιφάνεια

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}.$$

Να υπολογιστεί η γεωδαισιακή καμπυλότητα ενός παραλλήλου, δηλαδή μίας C^∞ παραμετρισμένης καμπύλης $\gamma : \mathbb{R} \to M$ της μορφής

$$\gamma(s) = (R\cos\frac{s}{R}, R\sin\frac{s}{R}, R^2)$$

όπου $R > 0$.

10. Έστω M μία λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$. Αν μία ευθεία του $\mathbb{R}^3$ περιέχεται στην M, να αποδειχθεί οτι είναι το ίχνος μίας γεωδαισιακής της M.

11. Έστω M μία συμπαγής και συνεκτική λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ με τις παρακάτω δύο ιδιότητες.
(α) $II_p(X) \neq 0$ για κάθε $p \in M$ και $X \in T_pM$ με $\|X\| = 1$.
(β) Κάθε γεωδαισιακή της M είναι επίπεδη, δηλαδή το ίχνος της περιέχεται στην τομή της M με κάποιο επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$.
Να αποδειχθεί οτι η M είναι σφαίρα.

12. Εστω $M \subset \mathbb{R}^3$ μία λεία επιφάνεια και d_M η εσωτερική της απόσταση. Αν η M είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, να αποδειχθεί οτι ο μετρικός χώρος (M, d_M) είναι πλήρης.

Κεφάλαιο 5

Απαντήσεις επιλεγμένων ασκήσεων

5.1 Απαντήσεις ασκήσεων από το κεφάλαιο 1

9. Η ταχύτητα της γ στο $\gamma(s)$ είναι

$$\dot{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+s)^{\frac{1}{2}} \\ -\frac{1}{2}(1-s)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

και συνεπώς

$$\|\dot{\gamma}(s)\|^2 = \frac{1}{4}(1+s) + \frac{1}{4}(1-s) + \frac{1}{2} = 1,$$

δηλαδή η γ είναι παραμετρισμένη με το μήκος της.

Η επιτάχυνση της γ είναι

$$\ddot{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(1+s)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{4}(1-s)^{-\frac{1}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Αν $[T, N, B]$ είναι το πλαίσιο Frenét της γ, τότε $T(s) = \dot{\gamma}(s)$, η καμπυλότητα της γ είναι

$$\kappa(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\| = \frac{1}{(\sqrt{2})^3}(1-s^2)^{-\frac{1}{2}}$$

και

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\ddot{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(1-s)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+s)^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Τέλος,

$$B(s) = T(s) \times N(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(1+s)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}(1-s)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

και συνεπώς

$$B'(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}(1+s)^{-\frac{1}{2}} \\ -\frac{1}{4}(1-s)^{-\frac{1}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = -\ddot{\gamma}(s) = -\kappa(s)N(s).$$

Άρα, η στρέψη είναι $\tau(s) = \kappa(s)$, $-1 < s < 1$.

11. Η ταχύτητα της γ στο $\gamma(s)$ είναι

$$\dot{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5}\sin s \\ -\cos s \\ \frac{3}{5}\sin s \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς $\|\dot{\gamma}(s)\|^2 = 1$ και η γ είναι παραμετρισμένη με το μήκος της.

Η επιτάχυνση της γ είναι

$$\ddot{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5}\cos s \\ \sin s \\ \frac{3}{5}\cos s \end{pmatrix}.$$

Αν $[T, N, B]$ είναι το πλαίσιο Frenét της γ, τότε $T(s) = \dot{\gamma}(s)$ και η καμπυλότητα της γ είναι $\kappa(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\| = 1$. Άρα $N(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\ddot{\gamma}(s) = \ddot{\gamma}(s)$. Τέλος,

$$B(s) = T(s) \times N(s) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ 0 \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

και συνεπώς $B'(s) = 0$ για κάθε $s \in \mathbb{R}$. Άρα, η στρέψη είναι $\tau = 0$. Από το Πόρισμα 1.5.4 και την απόδειξή του, το ίχνος της γ είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο

$$\gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}N(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και ακτίνα 1 που βρίσκεται πάνω στο επίπεδο με εξίσωση

$$-\frac{3}{5}x + 0y - \frac{4}{5}z = -\frac{3}{5}\cdot 0 + 0 \cdot 1 - \frac{4}{5}\cdot 0$$

δηλαδή $3x + 4z = 0$.

12. (α) Αν $[T, N, B]$ είναι το πλαίσιο Frenét της γ, τότε

$$\gamma(s) - a = \langle \gamma(s) - a, T(s)\rangle T(s) + \langle \gamma(s) - a, N(s)\rangle N(s) + \langle \gamma(s) - a, B(s)\rangle B(s)$$

για κάθε $s \in I$.

Αν το ίχνος της γ βρίσκεται επάνω στη σφαίρα κέντρου $a \in \mathbb{R}^3$ και ακτίνας $R > 0$, τότε $\|\gamma(s) - a\|^2 = R^2$ για κάθε $s \in I$. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε $2\langle \gamma(s) - a, T(s)\rangle = 0$ για κάθε $s \in I$. Παραγωγίζοντας δεύτερη φορά βρίσκουμε

$$0 = \langle T(s), T(s)\rangle + \langle \gamma(s) - a, T'(s)\rangle = 1 + \langle \gamma(s) - a, \kappa(s)N(s)\rangle$$

και συνεπώς

$$\langle \gamma(s) - a, N(s) \rangle = -\frac{1}{\kappa(s)}$$

για κάθε $s \in I$. Παραγωγίζοντας τρίτη φορά

$$\frac{\kappa'(s)}{(\kappa(s))^2} = \langle T(s), N(s) \rangle + \langle \gamma(s) - a, N'(s) \rangle = 0 + \langle \gamma(s) - a, -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \rangle$$

και συνεπώς

$$\langle \gamma(s) - a, B(s) \rangle = \frac{\kappa'(s)}{(\kappa(s))^2 \tau(s)}$$

για κάθε $s \in I$.
(β) Αν

$$R = \sqrt{\frac{1}{k^2} + \left(\frac{k'}{k^2 \tau} \right)^2},$$

αρκεί να δείξουμε οτι η συνάρτηση

$$\gamma + \frac{1}{\kappa} N - \frac{k'}{\kappa^2 \tau} B : I \to \mathbb{R}^3$$

είναι σταθερή, γιατί αν $a \in \mathbb{R}^3$ είναι η σταθερή τιμή της, τότε $\|\gamma(s) - a\|^2 = R^2$ για κάθε $s \in I$.

Από τους τύπους του Frenét, παραγωγίζοντας βρίσκουμε

$$\left(\gamma + \frac{1}{\kappa} N - \frac{k'}{\kappa^2 \tau} B \right)' = T - \frac{\kappa'}{\kappa^2} N + \frac{1}{\kappa} N' - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \right)' B - \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} B'$$

$$= T - \frac{\kappa'}{\kappa^2} N + \frac{1}{\kappa}(-\kappa T + \tau B) - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \right)' B - \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau}(-\tau N) = \left(\frac{\tau}{\kappa} - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \right)' \right) B.$$

Όμως, παραγωγίζοντας την

$$R^2 = \frac{1}{k^2} + \left(\frac{k'}{k^2 \tau} \right)^2$$

προκύπτει οτι

$$-\frac{2\kappa\kappa'}{\kappa^4} + 2\frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \right)' = 0$$

και συνεπώς

$$-\frac{\tau}{\kappa} + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \right)' = 0.$$

13. Η ταχύτητα της γ στο σημείο $\gamma(s)$ είναι

$$\dot{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cos \frac{s}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos \frac{s}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς $\|\dot{\gamma}(s)\|^2 = 1$ και η γ είναι παραμετρισμένη με το μήκος της.

Η επιτάχυνση της γ είναι

$$\ddot{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{8}\sin\frac{s}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{4}\cos\frac{s}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{8}\sin\frac{s}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Αν $[T, N, B]$ είναι το πλαίσιο Frenét της γ, τότε η καμπυλότητα της γ είναι $\kappa(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\| = \dfrac{1}{4}$ και

$$N(s) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{s}{2\sqrt{2}} \\ -\cos\frac{s}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}\sin\frac{s}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Τέλος,

$$B(s) = T(s) \times N(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cos\frac{s}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{s}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

και συνεπώς

$$B'(s) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{8}\sin\frac{s}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{4}\cos\frac{s}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{8}\sin\frac{s}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}N(s)$$

για κάθε $s \in \mathbb{R}$. Άρα, η στρέψη είναι $\tau(s) = -\dfrac{1}{4}$ για κάθε $s \in \mathbb{R}$.

Αφού η γ έχει σταθερή καμπυλότητα και σταθερή στρέψη, είναι μία έλικα. Συγκεκριμένα, η γ είναι ισοδύναμη με την ορθή κυκλική έλικα $\gamma_{2,2}$. Αν $[T_{2,2}, N_{2,2}, B_{2,2}]$ είναι το πλαίσιο Frenét της $\gamma_{2,2}$, υπάρχει ένας μοναδικός ορθογώνιος πίνακας A τέτοιος ώστε $A \cdot T_{2,2}(0) = T(0)$, $A \cdot N_{2,2}(0) = N(0)$ και $A \cdot B_{2,2}(0) = -B(0)$. Αν $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι η ευκλείδεια ισομετρία με

$$f(x) = A \cdot x + (\gamma(0) - A \cdot \gamma_{2,2}(0))$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^3$, τότε $f \circ \gamma_{2,2} = \gamma$.

14. Παραγωγίζοντας την $\beta \circ h = \gamma$ βρίσκουμε $h'(\dot{\beta} \circ h) = \dot{\gamma}$, δηλαδή

$$\dot{\beta}(h(t)) = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|}\dot{\gamma}(t)$$

για κάθε $t \in I$. Παραγωγίζοντας δεύτερη φορά έχουμε

$$(h')^2(\ddot{\beta} \circ h) + h''(\dot{\beta} \circ h) = \ddot{\gamma}$$

οπότε

$$\ddot{\beta}(h(t)) = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|^2}\ddot{\gamma}(t) - \frac{\langle \dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)\rangle}{\|\dot{\gamma}(t)\|^4}\dot{\gamma}(t).$$

Συνεπώς, η καμπυλότητα κ της β στο $\beta(h(t))$ είναι

$$(\kappa(h(t)))^2 = \|\ddot{\beta}(h(t))\|^2 = \frac{\|\ddot{\gamma}(t)\|^2}{\|\dot{\gamma}(t)\|^4} - 2\frac{\langle\dot{\gamma}(t),\ddot{\gamma}(t)\rangle}{\|\dot{\gamma}(t)\|^6}\cdot\langle\dot{\gamma}(t),\ddot{\gamma}(t)\rangle + \frac{\langle\dot{\gamma}(t),\ddot{\gamma}(t)\rangle^2}{\|\dot{\gamma}(t)\|^8}\cdot\|\dot{\gamma}(t)\|^2$$

$$= \frac{\|\dot{\gamma}(t)\|^2\cdot\|\ddot{\gamma}(t)\|^2 - \langle\dot{\gamma}(t),\ddot{\gamma}(t)\rangle^2}{\|\dot{\gamma}(t)\|^6} = \frac{\|\dot{\gamma}(t)\times\ddot{\gamma}(t)\|^2}{\|\dot{\gamma}(t)\|^6}.$$

Αν $[T,N,B]$ είναι το πλαίσιο Frenét της β, η στρέψη τ της β στο $\beta(h(t))$ είναι

$$\tau(h(t)) = -\langle B'(h(t)), N(h(t))\rangle = \langle B(h(t)), N'(h(t))\rangle = \frac{1}{\kappa(h(t))}\langle\dot{\beta}(h(t))\times\ddot{\beta}(h(t)), N'(h(t))\rangle$$

και

$$h'(N'\circ h) = (N\circ h)' = \left(\frac{1}{\kappa\circ h}(\ddot{\beta}\circ h)\right)' = \frac{1}{\kappa\circ h}h'(\dddot{\beta}\circ h) - \frac{h'(\kappa'\circ h)}{(\kappa\circ h)^2}(\ddot{\beta}\circ h)$$

Αντικαθιστώντας

$$\tau(h(t)) = \frac{\langle\dot{\beta}(h(t))\times\ddot{\beta}(h(t)),\, \dddot{\beta}(h(t))\rangle}{(\kappa(h(t)))^2} = \frac{1}{(\kappa(h(t)))^2}\langle\frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}(\dot{\gamma}(t)\times\ddot{\gamma}(t)),\, \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}\,\dddot{\gamma}(t)\rangle$$

$$= \frac{\|\dot{\gamma}(t)\|^6}{\|\dot{\gamma}(t)\times\ddot{\gamma}(t)\|^2}\cdot\frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|^6}\cdot\langle\dot{\gamma}(t)\times\ddot{\gamma}(t),\, \dddot{\gamma}(t)\rangle = \frac{\langle\dot{\gamma}(t)\times\ddot{\gamma}(t),\, \dddot{\gamma}(t)\rangle}{\|\dot{\gamma}(t)\times\ddot{\gamma}(t)\|^2}.$$

5.2 Απαντήσεις ασκήσεων από το κεφάλαιο 2

6. (α) Θα δείξουμε οτι η π_+ είναι ένα προς ένα και επί βρίσκοντας την αντίστροφή της. Αν $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, αρκεί να δείξουμε οτι το σύστημα εξισώσεων

$$u = \frac{Rx}{R-z},\quad v = \frac{Ry}{R-z},\quad x^2+y^2+z^2 = R^2$$

έχει μοναδική λύση (x,y,z) με $z\neq R$. Από τις δύο πρώτες εξισώσεις έχουμε

$$x = \frac{u(R-z)}{R},\quad y = \frac{v(R-z)}{R}$$

οπότε αντικαθιστώντας στην τρίτη

$$\frac{u^2(R-z)^2}{R^2} + \frac{v^2(R-z)^2}{R^2} + z^2 = R^2$$

από όπου παίρνουμε

$$z = \frac{R(u^2+v^2-R^2)}{u^2+v^2+R^2}.$$

Συνεπώς,

$$\pi_+^{-1}(u,v) = \left(\frac{2R^2u}{u^2+v^2+R^2}, \frac{2R^2v}{u^2+v^2+R^2}, \frac{R(u^2+v^2-R^2)}{u^2+v^2+R^2}\right).$$

(β) Ο ιακωβιανός πίνακας της π_+^{-1} στο $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ είναι

$$D\pi_+^{-1}(u,v) = \frac{2R^2}{(u^2+v^2+R^2)^2} \cdot \begin{pmatrix} -u^2+v^2+R^2 & -2uv \\ -2uv & u^2-v^2+R^2 \\ 2uR & 2vR \end{pmatrix}.$$

Αν ο $D\pi_+^{-1}(u,v)$ δεν έχει τάξη 2, τότε

$$R^4 - (u^2-v^2)^2 - 4u^2v^2 = 0,$$

$$2Rv(-u^2+v^2+R^2) + 4Ru^2v = 0,$$

$$-4Ruv^2 - 2Ru(u^2-v^2+R^2) = 0$$

ή ισοδύναμα

$$R^2 = u^2+v^2, \quad v(u^2+v^2+R^2) = 0, \quad u(u^2+v^2+R^2) = 0,$$

δηλαδή $u = v = 0$ και $R = 0$, αντίφαση.
(β) Ο μετασχηματισμός αλλαγής τοπικών συντεταγμένων

$$\pi_- \circ \pi_+^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

δίνεται από τον τύπο

$$(\pi_- \circ \pi_+^{-1})(u,v) = \frac{R^2}{u^2+v^2} \cdot (u,v)$$

και είναι η αντιστροφή ως προς τον κύκλο με κέντρο το σημείο $(0,0)$ και ακτίνα R.

10. Η ϕ είναι ένα προς ένα γιατί αν $\phi(u_1,v_1) = \phi(u_2,v_2)$, τότε

$$v_1\cos u_1 = v_2 \cos u_2, \quad v_1 \sin u_1 = v_2 \sin u_2, \quad au_1 = au_2$$

οπότε $u_1 = u_2$ και συνακόλουθα $v_1 = v_2$, αφού τα $\cos u_1$, $\sin u_1$ δεν είναι ταυτόχρονα και τα δύο ίσα με το μηδέν. Η $\phi^{-1} : M \to \mathbb{R}^2$ δίνεται από τον τύπο

$$\phi^{-1}(x,y,z) = \begin{cases} (\dfrac{z}{a}, \dfrac{y}{\sin\frac{z}{a}}), & \text{όταν } \frac{z}{a} \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ (\dfrac{z}{a}, x,) & \text{όταν } \frac{z}{a} = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ (\dfrac{z}{a}, -x), & \text{όταν } \frac{z}{a} = 2k\pi + \pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

και είναι συνεχής γιατί για κάθε $(x,y,z) \in M$ με $\dfrac{z}{a} \neq \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, έχουμε

$$\frac{x}{\cos\frac{z}{a}} = \frac{y}{\sin\frac{z}{a}}.$$

Ο ιακωβιανός πίνακας της ϕ στο $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ είναι

$$D\phi(u,v) = \begin{pmatrix} -v\sin u & \cos u \\ v\cos u & \sin u \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

Οι ορίζουσες των τριών 2×2 υπομπλόκ είναι

$$\begin{vmatrix} -v\sin u & \cos u \\ v\cos u & \sin u \end{vmatrix} = -v, \quad \begin{vmatrix} -v\sin u & \cos u \\ a & 0 \end{vmatrix} = -a\cos u, \quad \begin{vmatrix} v\cos u & \sin u \\ a & 0 \end{vmatrix} = -a\sin u.$$

Αφού $a > 0$, οι δύο τελευταίες ορίζουσες δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα ίσες με μηδέν. Συνεπώς, ο $D\phi(u, v)$ έχει τάξη 2.

Το εφαπτόμενο επίπεδο της M στο σημείο $\phi(u, v)$ είναι ο 2-διάστατος γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα

$$\frac{\partial\phi}{\partial u} = \begin{pmatrix} -v\sin u \\ v\cos u \\ a \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial v} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

11. (α) Η ϕ είναι προφανώς ένα προς ένα και επί και έχει αντίστροφη $\phi^{-1} : M \to \mathbb{R}^2$ που δίνεται από τον τύπο $\phi^{-1}(x, y, z) = (x, x - z)$. Ο ιακωβιανός πίνακας της ϕ στο $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ είναι

$$D\phi(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3v^2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

που έχει τάξη 2. Στη πραγματικότητα η M είναι το γράφημα συνάρτησης, αφού

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = (x - z)^3\}.$$

(β) Έχουμε $(\phi^{-1} \circ \gamma)(t) = (3t, t^2)$ γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$.
(γ) Συνεπώς

$$\dot\gamma(0) = 3\frac{\partial\phi}{\partial u}(0, 0) + 0\frac{\partial\phi}{\partial v}(0, 0).$$

12. (γ) Για $(u, v) \in W_1$ έχουμε

$$D(\psi^{-1} \circ \phi)(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και για $(u, v) \in W_2$ έχουμε

$$D(\psi^{-1} \circ \phi)(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Αν η M είναι προσανατολίσιμη, υπάρχει μία απεικόνιση Gauss $N : M \to S^2$, ώστε

$$N(\phi(u, v)) = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v}\right\|} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v}$$

για κάθε $(u, v) \in U$, επειδή το U είναι συνεκτικό. Για τον ίδιο λόγο θα έχουμε όμως

$$N(\psi(u, v)) = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\psi}{\partial u} \times \frac{\partial\psi}{\partial v}\right\|} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial u} \times \frac{\partial\psi}{\partial v}$$

για κάθε $(u,v) \in U$ ή

$$N(\psi(u,v)) = -\frac{1}{\left\|\frac{\partial\psi}{\partial u} \times \frac{\partial\psi}{\partial v}\right\|} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial u} \times \frac{\partial\psi}{\partial v}$$

για κάθε $(u,v) \in U$. Στη πρώτη περίπτωση προκύπτει οτι $\det D(\psi^{-1} \circ \phi)(u,v) > 0$ για κάθε $(u,v) \in W_1 \cup W_2$, ενώ στη δεύτερη $\det D(\psi^{-1} \circ \phi)(u,v) < 0$ για κάθε $(u,v) \in W_1 \cup W_2$, που είναι αντίφαση, αφού $\det D(\psi^{-1} \circ \phi)(u,v) = 1$ όταν $(u,v) \in W_1$ και $\det D(\psi^{-1} \circ \phi)(u,v) = -1$ όταν $(u,v) \in W_2$.

5.3 Απαντήσεις ασκήσεων από το κεφάλαιο 3

3. Αφού

$$\frac{\partial\phi}{\partial u} = \begin{pmatrix} -v\sin u \\ v\cos u \\ a \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial v} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix},$$

οι συντελεστές της πρώτης θεμελιώδους μορφής είναι $E(u,v) = v^2 + a^2$, $F(u,v) = 0$ και $G(u,v) = 1$, οπότε

$$EG - F^2 = \left\|\frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v}\right\|^2 = v^2 + a^2.$$

Παραγωγίζοντας δεύτερη φορά

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} -v\cos u \\ -v\sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial u\partial v} = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial v^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και οι συντελεστές της δεύτερης θεμελιώδους μορφής είναι

$$e(u,v) = \frac{1}{\sqrt{v^2+a^2}} \begin{vmatrix} -v\sin u & \cos u & -v\cos u \\ v\cos u & \sin u & -v\sin u \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$f(u,v) = \frac{1}{\sqrt{v^2+a^2}} \begin{vmatrix} -v\sin u & \cos u & -v\sin u \\ v\cos u & \sin u & \cos u \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{a}{\sqrt{v^2+a^2}},$$

$$g(u,v) = \frac{1}{\sqrt{v^2+a^2}} \begin{vmatrix} -v\sin u & \cos u & 0 \\ v\cos u & \sin u & 0 \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Συνεπώς, η καμπυλότητα Gauss είναι

$$K(\phi(u,v)) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{a^2}{(v^2+a^2)^2}.$$

Ο πίνακας του τελεστή σχήματος στο σημείο $\phi(u,v)$ ως προς τη διατεταγμένη βάση $\left[\dfrac{\partial\phi}{\partial u}, \dfrac{\partial\phi}{\partial v}\right]$ του εφαπτομένου επιπέδου $T_{\phi(u,v)}M$ είναι

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{v^2+a^2}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{v^2+a^2} \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

Άρα η μέση καμπυλότητα είναι $H = 0$. Οι κύριες καμπυλότητες είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του τελεστή σχήματος που είναι

$$\begin{vmatrix} X & -\frac{a}{(v^2+a^2)^{3/2}} \\ -\frac{a}{(v^2+a^2)^{1/2}} & X \end{vmatrix} = X^2 - \frac{a^2}{(v^2+a^2)^2}.$$

Συνεπώς οι κύριες καμπυλότητες είναι $\pm\dfrac{a}{v^2+a^2}$.

8. Το σύνολο M είναι επιφάνεια εκ περιστροφής περί τον κάθετο άξονα γιατί

$$M = \{(v\cos u, v\sin u, f(v)) : 0 \le u < 2\pi, v > 0\}.$$

Η γενέτειρα της M είναι η C^∞ παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : (0,+\infty) \to \mathbb{R}^3$ με τύπο $\gamma(t) = (t, 0, f(t))$. Η γ δεν είναι παραμετρισμένη με το μήκος της, αλλά είναι κανονική με μήκος ταχύτητας $\|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{1+(f'(t))^2}$. Αν $h : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση μήκους της γ, η αναπαραμέτριση της γ με το μήκος της $\beta : h(I) \to \mathbb{R}^3$ έχει τύπο $\beta(s) = (h^{-1}(s), 0, f(h^{-1}(s)))$ και

$$M = \{(h^{-1}(s)\cos u, h^{-1}(s)\sin u, f(h^{-1}(s))) : 0 \le u < 2\pi, h^{-1}(s) > 0\}.$$

Κατά συνέπεια

$$K(h^{-1}(s)\cos u, h^{-1}(s)\sin u, f(h^{-1}(s))) = -\frac{(h^{-1})''(s)}{h^{-1}(s)} = \frac{1}{h^{-1}(s)} \cdot \frac{h''(h^{-1}(s))}{(h'(h^{-1}(s)))^3}.$$

Αφού $h'(t) = \sqrt{1+(f'(t))^2}$ και

$$h''(t) = \frac{f'(t)f''(t)}{\sqrt{1+(f'(t))^2}},$$

αντικαθιστώντας προκύπτει

$$K(v\cos u, v\sin u, f(v)) = \frac{f'(v)f''(v)}{v[1+(f'(v))^2]^2}.$$

9. (α) Έχουμε $L_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t)) = -(N\circ\gamma)'(t)$ και συνεπώς τα διανύσματα $\dot\gamma(t)$ και $(N\circ\gamma)'(t)$ είναι συγγραμμικά ακριβώς τότε όταν το $\dot\gamma(t)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του τελεστή σχήματος $L_{\gamma(t)}$.
(β) Αφού $\langle\ddot\gamma(t), N(\gamma(t))\rangle = -\langle\dot\gamma(t), (N\circ\gamma)'(t)\rangle = L_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))$, έχουμε

$$II_{\gamma(t)}\Big(\frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|}\Big) = \langle L_{\gamma(t)}(\frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|}), \frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|}\rangle = \frac{\langle\ddot\gamma(t), N(\gamma(t))\rangle}{\|\dot\gamma(t)\|^2}.$$

(γ) Ο πίνακας του τελεστή σχήματος $L_{\phi(u,v)}$ ως προς τη διατεταγμένη βάση $\left[\dfrac{\partial\phi}{\partial u}, \dfrac{\partial\phi}{\partial v}\right]$ του εφαπτόμενου επιπέδου $T_{\phi(u,v)}M$ είναι διαγώνιος,

$$L_{\phi(u,v)} = \begin{pmatrix} e(u,v)/E(u,v) & 0 \\ 0 & g(u,v)/G(u,v) \end{pmatrix}$$

οπότε τα $\dfrac{\partial\phi}{\partial u}$, $\dfrac{\partial\phi}{\partial v}$ είναι ιδιοδιανύσματα του $L_{\phi(u,v)}$ για κάθε $(u,v) \in \mathbb{R} \times I$.

10. Αν $H(p) = 0$ για κάθε $p \in M$, τότε $K(p) \leq 0$ για κάθε $p \in M$. Όταν η M είναι συμπαγής, αυτό αποκλείεται από το Θεώρημα 3.5.1.

11. Αν $K(p) > 0$ για κάθε $p \in M$, τότε $|H(p)| \neq 0$ για κάθε $p \in M$ και σύμφωνα με την Πρόταση 3.5.3 η M είναι προσανατολίσιμη.

12. Η M είναι προσανατολίσιμη και συνεπώς υπάρχει ολικά ορισμένη απεικόνιση Gauss $N : M \to S^2$, με βάση την οποία ορίζεται καλά η συνάρτηση μέσης καμπυλότητας $H : M \to \mathbb{R}$ καθώς και οι συναρτήσεις των κυρίων καμπυλοτήτων

$$k_1 = H - \sqrt{H^2 - K}, \quad k_2 = H + \sqrt{H^2 - K}.$$

(α) Επιχειρηματολογούμε όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.4. Μπορούμε να υποθέσουμε οτι $k_1 > 0$ και $k_2 > 0$, οπότε $H > 0$ και $k_1 \leq k_2$. Λόγω της συνέχειας, η k_2 παίρνει μέγιστη τιμή στην M σε κάποιο σημείο $p \in M$. Στο ίδιο σημείο p παίρνει η k_1 την ελάχιστη τιμή της στην M, επειδή υποθέτουμε οτι το άθροισμα $k_1 + k_2 = 2H$ είναι σταθερό. Επειδή το p είναι ελλειπτικό σημείο, είναι ομφαλικό, από το Θεώρημα 3.5.2. Κατά συνέπεια,

$$k_1(p) \leq k_1(q) \leq k_2(q) \leq k_2(p) = k_1(p),$$

για κάθε $q \in M$, δηλαδή όλα τα σημεία της M είναι ομφαλικά. Από το Θεώρημα 3.2.4, η M είναι σφαίρα.
(β) Αφού

$$\frac{2H}{K} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

μπορούμε να μιμηθούμε την απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.4, όπως στο (α).

13. Όπως δείχνει η απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.1, υπάρχει $p \in M$ τέτοιο ώστε

$$II_p(X) \leq -\frac{1}{R}$$

για κάθε $X \in T_pM$ με $\|X\| = 1$. Ειδικά οι κύριες καμπυλότητας στο σημείο p ικανοποιούν $k_1 \leq -\dfrac{1}{R}$ και $k_2 \leq -\dfrac{1}{R}$. Οπότε

$$|H(p)| \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right).$$

5.4 Απαντήσεις ασκήσεων από το κεφάλαιο 4

2. Οι συντελεστές της πρώτης θεμελιώδους μορφής της ελικοειδούς επιφάνειας M_2 ως προς την παραμέτριση ψ είναι $E_2(u,v) = 1+v^2$, $F_2 = 0$ και $G_2(u,v) = 1$. Η καμπυλότητα Gauss της M_2 είναι

$$K(\psi(u,v)) = -\frac{1}{(1+v^2)^2}.$$

Οι συντελεστές της πρώτης θεμελιώδους μορφής της επιφάνειας εκ περιστροφής M_1 ως προς την παραμέτριση ϕ είναι $E_1(u,v) = v^2$, $F_1 = 0$ και $G_1(u,v) = 1 + \dfrac{1}{v^2}$, ενώ της δεύτερης θεμελιώδους μορφής είναι

$$e_1(u,v) = -\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}, \quad f_1(u,v) = 0, \quad g_1(u,v) = \frac{1}{v\sqrt{1+v^2}}.$$

Συνεπώς, η καμπυλότητα Gauss της M_1 είναι

$$K(\phi(u,v)) = -\frac{1}{(1+v^2)^2} = K(\psi(u,v)).$$

Όμως

$$\left\| (\phi\circ\psi^{-1})_{*\psi(u,v)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)\right\|^2 = v^2 \neq 1+v^2 = \left\|\frac{\partial\psi}{\partial u}\right\|^2$$

και συνεπώς η $\phi\circ\psi^{-1}$ δεν είναι ισομετρία επιφανειών.

3. Επειδή $F=0$, τα σύμβολα του Christoffel δίνονται από τους τύπους

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2E}\cdot\frac{\partial E}{\partial u}, \quad \Gamma^2_{11} = -\frac{1}{2G}\cdot\frac{\partial E}{\partial v}, \quad \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2E}\cdot\frac{\partial E}{\partial v},$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2G}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}, \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2E}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}, \quad \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2G}\cdot\frac{\partial G}{\partial v}.$$

Όπως δείχνει η απόδειξη του Theorema Egregium του Gauss, η καμπυλότητα Gauss δίνεται από τον τύπο

$$K(\phi(u,v)) = \frac{1}{E}\left[\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} + \frac{\partial\Gamma^2_{11}}{\partial v} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - \frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial u}\right]$$

οπότε αντικαθιστώντας έχουμε

$$K(\phi(u,v)) = \frac{1}{E}\Bigg[-\frac{2G\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - 2\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v}}{4G^2} - \frac{2G\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - 2\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2}{4G^2}$$

$$+\frac{\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u}}{4EG} - \frac{\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v}}{4G^2} + \frac{\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2}{4EG} - \frac{\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2}{4G^2}\Bigg]$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\frac{\partial^2 E}{\partial v^2}}{\sqrt{EG}} + \frac{\partial E}{\partial v}\left(-\frac{E\frac{\partial G}{\partial v} + G\frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG)^{3/2}}\right) + \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}}{\sqrt{EG}} + \frac{\partial G}{\partial u}\left(-\frac{E\frac{\partial G}{\partial u} + G\frac{\partial E}{\partial u}}{2(EG)^{3/2}}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\cdot\frac{\partial E}{\partial v}\right)\right].$$

4. Εφαρμόζουμε τον τύπο της άσκησης 3.

7. Αν υπάρχει τέτοια τοπική παραμέτριση, τότε τα σύμβολα του Christoffel ως προς αυτή είναι όλα ίσα με το 0. Συνεπώς, η καμπυλότητα Gauss πρέπει να είναι ίση με το μηδέν, από τον τύπο που αποδείχθηκε στην απόδειξη του Theorema Egregium. Όμως, αυτό αντιφάσκει με το γεγονός ότι από την άλλη μεριά η καμπυλότητα Gauss είναι

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -1.$$

9. Η M είναι προσανατολίσιμη, αφού είναι γράφημα συνάρτησης, με ολική απεικόνιση Gauss $N : M \to S^2$ που δίνεται από τον τύπο

$$N(u, v, u^2 + v^2) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}\begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ειδικά, έχουμε

$$N(\gamma(s)) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4R^2}}\begin{pmatrix} 2R\cos\frac{s}{R} \\ 2R\sin\frac{s}{R} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Η ταχύτητα και η επιτάχυνση της γ είναι αντίστοιχα

$$\dot\gamma(s) = \begin{pmatrix} -\sin\frac{s}{R} \\ \cos\frac{s}{R} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ddot\gamma(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R} \\ -\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R} \\ 0 \end{pmatrix}$$

και

$$N_\gamma(s) = N(\gamma(s)) \times \dot\gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4R^2}}\begin{pmatrix} \cos\frac{s}{R} \\ \sin\frac{s}{R} \\ 2R \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς η γεωδαισιακή καμπυλότητα της γ είναι

$$k_g(s) = \langle N_\gamma(s), \ddot\gamma(s)\rangle = -\frac{1}{R\sqrt{1 + 4R^2}}.$$

11. Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε σημείο $p \in M$. Από την υπόθεση (α), τη συνέχεια και τη συνεκτικότητα το μοναδιαίου κύκλου στο εφαπτόμενο επίπεδο T_pM προκύπτει ότι $II_p(X) > 0$ για κάθε $X \in T_pM$ με $\|X\| = 1$ ή $II_p(X) < 0$ για κάθε $X \in T_pM$ με $\|X\| = 1$. Είδικά, οι κύριες καμπυλότητες στο p είναι μη μηδενικές και ομόσημες. Συνεπώς η M έχει παντού καμπυλότητα Gauss $K > 0$. Επιπλέον, η μέση καμπυλότητα δεν μηδενίζεται πουθενά στην M και η M είναι προσανατολίσιμη. Λόγω της συνέχειας και της συνεκτικότητας της M, υπάρχει μία ολικά καλά ορισμένη απεικόνιση Gauss $N : M \to S^2$, ως προς την οποία ορίζεται καλά η συνάρτηση της μέσης καμπυλότητας $H : M \to \mathbb{R}$ και $H > 0$.

Σύμφωνα το θεώρημα ύπαρξης και μονοσήμαντου των λύσεων για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, για κάθε $p \in$ και $X \in T_pM$ με $\|X\| = 1$ υπάρχει μία μοναδική γεωδαισιακή γ που εκκινεί από το σημείο $\gamma(0) = p$ με αρχική ταχύτητα $\dot{\gamma}(0) = X$. Αφού η γ είναι γεωδαισιακή, έχουμε

$$N(\gamma(s)) = \pm\frac{1}{\ddot{\gamma}(s)}\ddot{\gamma}(s)$$

και η στρέψη της γ, ως παραμετρισμένη καμπύλη στον περιβάλλοντα χώρο $\mathbb{R}^3$ είναι

$$\tau(s) = \pm\langle N(\gamma(s)), (\dot{\gamma}(s) \times (N \circ \gamma))'(s)\rangle = \mp\langle (N \circ \gamma)'(s), \dot{\gamma}(s) \times N(\gamma(s))\rangle$$

$$= \pm\langle L_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s)), \dot{\gamma}(s) \times N(\gamma(s))\rangle$$

για κάθε s στο ανοιχτό διάστημα ορισμού της γ (που μπορεί να αποδειχθεί οτι είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}$, επειδή η M υποτίθεται συμπαγής, αλλά αυτό δεν θα μας χρειαστεί). Από την υπόθεση (β) προκύπτει λοιπόν οτι $\tau = 0$. Με άλλα λόγια, για κάθε $p \in M$ κάθε $X \in T_pM$ με $\|X\| = 1$ είναι συγγραμμικό του $L_p(X)$. Αυτό σημαίνει οτι κάθε σημείο της M είναι ομφαλικό και κατά συνέπεια η M είναι σφαίρα, αφού έχει θετική καμπυλότητα Gauss.

Βιβλιογραφία

[1] M. Abate, F. Tovena, Curves and Surfaces, Springer 2012.

[2] M.P. do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, 1976.

[3] J. Mc Cleary, Geometry from a differentiable viewpoint, Cambridge University Press, 1994.

[4] Δ. Κουτρουφιώτης, Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία, Εκδόσεις Leader Books.

[5] S. Montiel, A. Ros, Curves and Surfaces, Graduate Studies in Math. Vol. 69, Amer. Math. Soc., 2005.

[6] B. O'Neil, Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

[7] A. Pressley, Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.