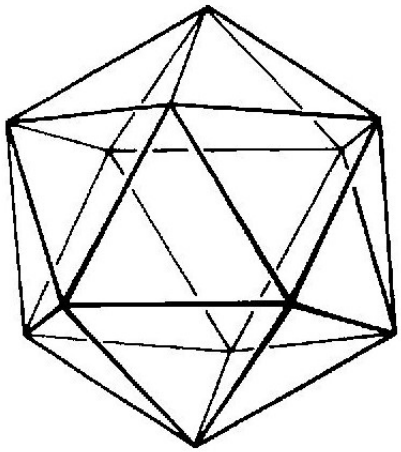
Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

# Ευκλείδεια και Μη-Ευκλείδεια Γεωμετρία

Σημειώσεις

Κωνσταντίνος Αθανασόπουλος



Ηράκλειο, 2021

# Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές γράφτηκαν για τις ανάγκες του μαθήματος Γεωμετρία του προπτυχιακού προγράμματος σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης. Παρουσιάζονται η Ευκλείδεια και οι κλασικές μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες με αναλυτικές μεθόδους στο πνεύμα της κατάταξης των γεωμετριών από τον F. Klein, ανάλογα με την ομάδα των επιτρεπτών μετασχηματισμών. Η παρουσίαση γίνεται με βάση συγκεκριμένα μοντέλα που διευκολύνουν την διεκπεραίωση υπολογισμών και τις αποδείξεις των αντίστοιχων θεωρημάτων. Όπως είναι φυσικό, κεντρικό θέμα σε αυτή την προσέγγιση των Γεωμετριών είναι η μελέτη των αντίστοιχων ομάδων μετασχηματισμών που τις καθορίζουν κατά Klein. Ένας δευτερεύων αλλά όχι λιγότερο σημαντικός στόχος των σημειώσεων αυτών είναι να προετοιμάσουν τον αναγνώστη για την ενδεχόμενη μελλοντική επαφή του με τη σύγχρονη Διαφορική και Μετρική Γεωμετρία. Για το λόγο αυτό δίνεται έμφαση στη μετρική άποψη της Γεωμετρίας.

Για την κατανόηση του περιεχομένου απαιτούνται βασικές γνώσεις Γραμμικής Άλγεβρας και Απειροστικού Λογισμού, που συνήθως διδάσκονται οι φοιτητές των Θετικών Επιστημών κατά τα δύο πρώτα έτη των σπουδών τους.

Κ. Αθανασόπουλος

# Περιεχόμενα


**1 Εισαγωγή** **1**
- 1.1 Σύντομη ιστορική επισκόπιση . . . 1
- 1.2 Το Erlangen Programm του Felix Klein . . . 3
- 1.3 Συσχετισμένη Γεωμετρία . . . 4
- 1.4 Ασκήσεις . . . 11

**2 Ευκλείδεια Γεωμετρία** **13**
- 2.1 Ο $n$-διάστατος ευκλείδειος χώρος . . . 13
- 2.2 Ευκλείδειες ισομετρίες . . . 15
- 2.3 Η ορθογώνια ομάδα . . . 19
- 2.4 Πεπερασμένες ομάδες ισομετριών . . . 25
- 2.5 Γεωδαισιακές . . . 27
- 2.6 Μήκος καμπύλης . . . 30
- 2.7 Ασκήσεις . . . 35

**3 Σφαιρική Γεωμετρία** **39**
- 3.1 Το εξωτερικό γινόμενο στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ . . . 39
- 3.2 Η σφαιρική απόσταση . . . 41
- 3.3 Σφαιρικές γεωδαισιακές . . . 44
- 3.4 Σφαιρικός όγκος . . . 46
- 3.5 Σφαιρική τριγωνομετρία . . . 51
- 3.6 Σφαίρες με μεγάλη ακτίνα . . . 53
- 3.7 Ασκήσεις . . . 54

**4 Προβολική Γεωμετρία** **57**
- 4.1 Ο $n$-διάστατος πραγματικός προβολικός χώρος . . . 57
- 4.2 Προβολικές ισομετρίες . . . 59
- 4.3 Δύο κλασικά θεωρήματα της Προβολικής Γεωμετρίας . . . 62
- 4.4 Προβολικός Δυϊσμός . . . 65
- 4.5 Προβολικοί μετασχηματισμοί . . . 66
- 4.6 Ασκήσεις . . . 69

**5 Επίπεδη Υπερβολική Γεωμετρία** **73**
- 5.1 Η σφαίρα του Riemann . . . 73
- 5.2 Η γεωμετρία των μετασχηματισμών Möbius . . . 77
- 5.3 Το υπερβολικό επίπεδο . . . 81

5.4 Η υπερβολική απόσταση . . . . . 85
5.5 Οι υπερβολικές ισομετρίες . . . . . 88
5.6 Τα αξιώματα του Ευκλείδη στην Υπερβολική Γεωμετρία . . . . . 90
5.7 Υπερβολικό εμβαδόν και τύπος των Gauss-Bonnet . . . . . 92
5.8 Το μοντέλο του δίσκου του Poincaré . . . . . 95
5.9 Υπερβολική τριγωνομετρία . . . . . 99
5.10 Ασκήσεις . . . . . 101

# Κεφάλαιο 1

# Εισαγωγή

## 1.1 Σύντομη ιστορική επισκόπιση

Στην αρχαιότητα η Γεωμετρία ήταν μία συλλογή από τύπους υπολογισμού μηκών, εμβαδών και όγκων που εφαρμόζονταν κατά περίπτωση και οι οποίοι ήταν το αποτέλεσμα μακροχρόνιων εμπειρικών προσεγγίσεων. Οι τύποι αυτοί ήταν γνωστοί στους Αιγύπτιους και τους Βαβυλώνιους. Αργότερα πέρασαν στους αρχαίους Έλληνες οι οποίοι μετέτρεψαν τη Γεωμετρία σε επαγωγική επιστήμη. Γύρω στο 300 π.Χ. ο Ευκλείδης από την Αλεξάνδρεια συγκέντρωσε όλη τη μέχρι τότε γεωμετρική γνώση σε ένα βιβλίο, *τα Στοιχεία*, με τόσο συστηματικό τρόπο που αποτέλεσε το κύριο εργαλείο όλων των γεωμετρών και μηχανικών για τις επόμενες δύο χιλιετίες.

Ο Ευκλείδης όρισε πρώτα τις έννοιες που θα χρησιμοποιούσε στη συνέχεια. Μετά διατύπωσε ένα σύνολο αξιωμάτων που θεωρούσε φυσικά και τα αποδέχθηκε χωρίς απόδειξη. Από αυτά παρήγαγε εκατοντάδες γεωμετρικές προτάσεις και θεωρήματα, πολλά από τα οποία δεν ήταν καθόλου προφανή, η ισχύς των οποίων βασίζοταν αποκλειστικά στους νόμους της Λογικής, με χρήση των οποίων προέκυπταν από τα αρχικά αξιώματα. Αν και αυτό ήταν ένα γιγαντιαίο βήμα στην ανθρώπινη σκέψη, η μέθοδοι του Ευκλείδη ήταν ατελείς με τα σημερινά δεδομένα. Μεταξύ των άλλων, ο Ευκλείδης δεν όρισε το μήκος και την απόσταση, ενώ σε πολλά σημεία χρησιμοποιούσε αξιώματα που δεν είχε διατυπώσει.

Τα αξιώματα του Ευκλείδη με σύγχρονη ορολογία είναι τα ακόλουθα:

1. Δύο διαφορετικά σημεία μπορούν να συνδεθούν με ένα ακριβώς ευθύγραμμο τμήμα.

2. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να επεκταθεί απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις.

3. Για κάθε σημείο υπάρχει ακριβώς ένας κύκλος με κέντρο το σημείο αυτό και δεδομένη ακτίνα.

4. Ολες οι ορθές γωνίες είναι ίσες.

5. Αν μια ευθεία τέμνει δύο άλλες ευθείες έτσι ώστε οι εσωτερικές γωνίες προς την ίδια μεριά να έχουν άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές γωνίες, τότε οι δύο ευθείες τέμνονται από αυτή τη μεριά.

Είναι προφανές οτι το 5ο αξίωμα είναι το πλέον περίπλοκο και «αφύσικο». Αν θεωρήσουμε τα τέσσερα πρώτα δεδομένα, τότε το 5ο είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο:

5. Από κάθε σημείο κείμενο εκτός ευθείας διέρχεται ακριβώς μία παράλληλη ευθεία.

Για σχεδόν δύο χιλιετίες οι μαθηματικοί προσπαθούσαν να αποδείξουν οτι το 5ο αξίωμα προκύπτει από τα προηγούμενα και από αυτά που δεν διατύπωσε ο Ευκλείδης, αλλά χρησιμοποιούσε σιωπηρά. Κάθε φορά όμως έβρισκαν απλώς υποκατάστατα. Ο Πρόκλος (410-485) το αντικατέστησε με το αίτημα οτι τα σημεία με σταθερή απόσταση από την ίδια μεριά μίας ευθείας σχηματίζουν ευθεία. Ο J. Wallis (1616-1703) χρησιμοποίησε την υπόθεση οτι για κάθε τρίγωνο υπάρχουν όμοιά του με οποιοδήποτε μέγεθος. Η πιο σοβαρή προσπάθεια έγινε από τον G. Saccheri (1667-1733) που θεώρησε τετράπλευρα με γωνίες βάσεις ορθές και κάθετες πλευρές ίσου μήκους και απέδειξε προτάσεις υπό την μη-ευκλείδεια υπόθεση οτι οι δύο άλλες γωνίες δεν είναι ορθές. Το 1763 ο Klügel συγκέντρωσε και αξιολόγησε στη διδακτορική διατριβή που συνέγραψε στο Πανεπιστήμιο του Göttingen όλες τις σοβαρές προσπάθειες απόδειξης του 5ου αξιώματος. Από τις 28 «αποδείξεις» που εξέτασε δεν βρήκε καμία ικανοποιητική.

Η αποφασιστική πρόοδος έγινε στην αρχή του 19ου αιώνα, όταν εγκαταλείφθηκε η πρσπάθεια της απόδειξης του 5ου αξιώματος και οι μαθηματικοί επεξεργάστηκαν τις συνέπειες της άρνησής του. Βρέθηκε τότε οτι δημιουργείται μια συνεκτική θεωρία, αν το 5ο αξίωμα του Ευκλείδη αντικατασταθεί με το ακόλουθο:

«Από κάθε σημείο κείμενο εκτός ευθείας διέρχονται περισσότερες της μίας παράλληλες.»

Η θεωρία αυτή πήρε το όνομα Υπερβολική Γεωμετρία. Η αντικατάσταση του 5ου αξιώματος με αυτήν την παραδοχή έχει παράξενες συνέπειες. Χαρακτηριστικότερες είναι οτι τότε το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από δύο ορθές και οτι δύο όμοια τρίγωνα είναι πάντα ίσα.

Θεμελειωτές της Υπερβολικής Γεωμετρίας θεωρούνται οι C. F. Gauss (1777-1855), N.I. Lobachevskii (1793-1850) και J. Bolyai (1802-1860). Και οι τρείς ανέπτυξαν την Υπερβολική Γεωμετρία συνθετικά, δηλαδή βασισμένοι σε αξιώματα, χωρίς να δώσουν αναλυτικό μοντέλο. Ετσι δεν απέδειξαν την μη αντιφατικότητα των αξιωμάτων της. Η βάση για την αναλυτική μελέτη της Υπερβολικής Γεωμετρίας δόθηκε από την διαφορική γεωμετρία των επιφανειών με σταθερή αρνητική καμπυλότητα. Κάτι τέτοιο είχε υποδειχθεί το 1837 από τον Lobachevskii και επιβεβαίωσε ανεξάρτητα ο Minding το 1839. Το τελικό ξεκαθάρισμα έγινε το 1868 από τον E. Beltrami. Η αναλυτική εργασία είχε αποτέλεσμα την κατασκευή συγκεκριμένων μοντέλων της Υπερβολικής Γεωμετρίας, πράγμα που έδειξε οτι είναι το ίδιο συμβατή όπως και η Ευκλείδεια Γεωμετρία. Οι A. Einstein και H. Minkowski βρήκαν στην Υπερβολική Γεωμετρία το γεωμετρικό υπόβαθρο για την κατανόηση του φυσικού χώρου και του χρόνου.

Με τη δημιουργία της Υπερβολικής Γεωμετρίας προέκυψε η διαίρεση της Γεωμετρίας σε Ευκλείδεια και μη-Ευκλείδεια. Προέκυψε ακόμα η Απόλυτη Γεωμετρία που περιλαμβάνει όλες εκείνες τις προτάσεις που είναι δυνατόν να αποδειχθούν χωρίς τη χρήση του αξιώματος των παραλλήλων ή της άρνησής του. Αν το 5ο αξίωμα του Ευκλείδη αντικατασταθεί από την παραδοχή της μη-ύπαρξης παραλλήλων ευθειών, δημιουργείται μία

άλλη γεωμετρία που πήρε το όνομα Προβολική Γεωμετρία. Οι ρίζες της φτάνουν στα προβλήματα προοπτικής που αντιμετώπισαν καλλιτέχνες της δυτικής αγιογραφίας όπως ο Leonardo da Vinci (1452-1509). Μεγάλη ώθηση δόθηκε στην Προβολική Γεωμετρία από τον γάλλο μηχανικό J-V. Poncelet (1788-1867) στη διάρκεια της αιχμαλωσίας του από τους ρώσους το 1813.

Η μεγάλη ανάπτυξη της Γεωμετρίας κατά τους τελευταίους τρείς αιώνες οφείλεται στην εισαγωγή αναλυτικών μεθόδων από τον R. Decartes (1596-1650), που έδωσαν τη δυνατότητα επίλυσης προβλημάτων με απλούς αριθμητικούς υπολογισμούς. Από την άλλη μεριά, ο B. Riemann (1826-1866) διεύρυνε σημαντικά τα όρια της Γεωμετρίας, στα πλαίσια της μελέτης του για τη φύση του φωτός, θεωρώντας πολυδιάστατους χώρους που σήμερα αποκαλούνται πολλαπλότητες (pseudo-)Riemann και αποτελούν κύριο αντικείμενο μελέτης στη σύγχρονη Διαφορική Γεωμετρία. Οι χώροι αυτοί αποτελούν τη βάση της Θεωρίας της Γενικής Σχετικότητας του Einstein.

Στο τέλος του 19ου αιώνα και στις αρχές του 20ου ο D. Hilbert (1862-1943) επαναθεμελίωσε την Ευκλείδεια Γεωμετρία αξιωματικά χωρίς τις ατέλειες του Ευκλείδη και μακριά από κάθε φυσική έννοια βασισμένος μόνο στη Λογική. Ενωρίτερα, το 1872 ο F. Klein παρουσίασε μία κατάταξη των γεωμετριών ανάλογα με την ομάδα των επιτρεπτών μετασχηματισμών κάτω από τους οποίους οι αντίστοιχες προτάσεις παραμένουν σε ισχύ. Μεταξύ των άλλων αυτό έδωσε ώθηση στη Θεωρία Ομάδων. Μεγάλη συμβολή στην κατεύθυνση αυτή είχε ο S. Lie (1842-1899). Οι ομάδες των γεωμετρικών μετασχηματισμών στις κλασικές γεωμετρίες είναι αυτό που σήμερα λέγεται ομάδες του Lie.

## 1.2 Το Erlangen Programm του Felix Klein

Το Erlanger Programm είναι ένα μέσο για την περιγραφή γεωμετριών με ομοιόμορφο τρόπο που διευκολύνει την μεταξύ τους σύγκριση. Με άλλα λόγια, δίνει ένα πλαίσιο για την κατάταξη των γεωμετριών, ενώ παρέχει και τεχνικές αποδεικτικές διαδικασίες που εφαρμόζονται ομοιόμορφα σε όλες τις γεωμετρίες.

Σύμφωνα με το Erlanger Programm μια γεωμετρία δεν βασίζεται σε έναν κατάλογο λογικών και «φυσικών» αξιωμάτων, αλλά αποτελείται από ένα σύνολο και έναν τρόπο που μας επιτρέπει να ορίσουμε πότε δύο σχήματα είναι ισοδύναμα (δηλαδή «ίσα»). Οι διαφορετικές γεωμετρίες διακρίνονται μεταξύ τους από τις διαφορετικές έννοιες ισοδυναμίας σχημάτων. Αριθμητικές έννοιες, όπως π.χ. μήκος ή εμβαδόν, μπορούν να εισαχθούν εκ των υστέρων, αρκεί να είναι συμβατές με την έννοια ισοδυναμίας σχημάτων που έχουμε. Δηλαδή, δύο ισοδύναμα σχήματα οφείλουν π.χ. να έχουν ίσα εμβαδά.

Για να ορίσει ο F. Klein την έννοια της ισοδυναμίας σχημάτων χρησιμοποίησε την ήδη υπάρχουσα στα Στοιχεία του Ευκλείδη έννοια της υπέρθεσης. Σύμφωνα με αυτή, δύο σχήματα είναι ίσα, αν μπορεί το ένα να μετακινηθεί έτσι ώστε να συμπέσει με το άλλο. Η έννοια της μετακίνησης δεν είναι άλλη από την έννοια της απεικόνισης, που όμως δεν ήταν διαθέσιμη στην εποχή του Ευκλείδη. Ετσι η περιγραφή της έννοιας της ισοδυναμίας σχημάτων γίνεται μέσα από την επιλογή ενός συνόλου επιτρεπτών απεικονίσεων, που παίζουν τον ρόλο των κινήσεων. Δηλαδή, δύο σχήματα $A, B$ είναι ισοδύναμα, αν υπάρχει μια επιτρεπτή απεικόνιση-κίνηση $f$ ώστε $f(A) = B$. Σύμφωνα με την κοινή λογική, η έννοια της ισοδυναμίας σχημάτων πρέπει να είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική. Αυτό θέτει περιορισμούς στο σύνολο των επιτρεπτών απεικονίσεων. Η

ανακλαστικότητα εξασφαλίζεται αν η ταυτοτική είναι επιτρεπτή απεικόνιση. Η συμμετρικότητα αν οποτεδήποτε η $f$ είναι επιτρεπτή απεικόνιση, τότε και η $f^{-1}$ είναι. Τέλος, η μεταβατικότητα εξασφαλίζεται αν για κάθε ζεύγος επιτρεπτών απεικονίσεων $f, g$ τότε και η $g \circ f$ είναι επιτρεπτή απεικόνιση. Ετσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

Έστω $X \neq \varnothing$ ένα σύνολο. Μία ομάδα μετασχηματισμών του $X$ είναι μια υποομάδα $G$ των ένα-προς-ένα και επί απεικονίσεων του $X$ στον εαυτό του. Δηλαδή, η $G$ είναι ένα σύνολο απεικονίσεων $f : X \to X$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:
(α) Η ταυτοτική απεικόνιση του $X$ ανήκει στην $G$.
(β) Κάθε $f \in G$ είναι αντιστρέψιμη και $f^{-1} \in G$.
(γ) Αν $f, g \in G$, τότε $g \circ f \in G$.

Μία γεωμετρία (κατά Klein) είναι ένα ζεύγος $(G, X)$, όπου το $X$ είναι ένα μη-κενό σύνολο και η $G$ είναι μία ομάδα μετασχηματισμών του $X$. Ο $X$ λέγεται ο υποκείμενος χώρος της γεωμετρίας και η $G$ η ομάδα των μετασχηματισμών της. Αν $(G, X)$ είναι μία γεωμετρία, ένα σχήμα της γεωμετρίας είναι ένα σύνολο $A \subset X$. Δύο σχήματα $A, B$ λέγονται ισοδύναμα (ή «ίσα»), αν υπάρχει $f \in G$ ώστε $f(A) = B$.

Σύμφωνα με το Erlanger Programm του Klein γεωμετρία είναι η μελέτη εκείνων των ιδιοτήτων, που αν τις έχει ένα σχήμα τότε τις έχουν και όλα τα ισοδύναμά του. Για την τεχνική διατύπωση τέτοιων ιδιοτήτων χρειαζόμαστε έννοιες που παραμένουν αναλλοίωτες από τα στοιχεία της ομάδας των μετασχηματισμών της γεωμετρίας. Έστω $(G, X)$ μια γεωμετρία και $\mathcal{C}$ μία κλάση σχημάτων. Η $\mathcal{C}$ λέγεται αναλλοίωτη κλάση σχημάτων, αν $f(A) \in \mathcal{C}$ για κάθε $A \in \mathcal{C}$ και $f \in G$. Μία συνάρτηση $F : \mathcal{C} \to Y$, όπου $Y \neq \varnothing$, λέγεται αναλλοίωτη, αν $F(f(A)) = F(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{C}$ και $f \in G$.

Το Erlanger Programm μας δίνει μεταξύ των άλλων και μία ισχυρή μέθοδο απόδειξης θεωρημάτων, που εφαρμόζεται ομοιόμορφα σε όλες τις γεωμετρίες. Μία σύντομη περιγραφή αυτής της μεθόδου είναι η ακόλουθη. Εστω $(G, X)$ μία γεωμετρία και $\Pi$ μία πρόταση που θέλουμε ν' αποδείξουμε για ένα σχήμα $A$. Η $\Pi$ πρέπει να έχει έννοια στα πλαίσια της γεωμετρίας, δηλαδή πρέπει όλες οι έννοιες που αναφέρονται στην διατύπωσή της να είναι αναλλοίωτες. Ετσι αν αποδείξουμε την $\Pi$ για κάποιο $g(A)$, $g \in G$, τότε η $\Pi$ ισχύει και για το $A$. Αρκεί λοιπόν να επιλέξουμε το $g \in G$ έτσι ώστε η απόδειξη της πρότασης για το $g(A)$ να γίνεται η απλούστερη δυνατή.

Δύο γεωμετρίες $(G, X)$ και $(H, Y)$ λέγονται ισόμορφες (ή μοντέλα της ίδιας γεωμετρίας) αν υπάρχει μία ένα-προς-ένα και επί απεικόνιση $h : X \to Y$, ώστε $h \circ g \circ h^{-1} \in H$ και $h^{-1} \circ f \circ h \in G$ για κάθε $g \in G$, $f \in H$.

Μία γεωμετρία μπορεί να έχει πολλά μοντέλα. Για την αναλυτική μελέτη της ο μοναδικός δρόμος είναι να μελετηθεί ένα συγκεκριμένο μοντέλο. Η επιλογή του μοντέλου, αν υπάρχουν πολλά, εξαρτάται από το πόσο βολικό είναι στους υπολογισμούς ή ακόμα μπορεί να οφείλεται και σε ιστορικούς λόγους.

## 1.3 Συσχετισμένη Γεωμετρία

Η πλέον στοιχειώδης γεωμετρική δομή του φυσικού χώρου είναι η συσχετισμένη. Ο πραγματικός $n$-διάστατος συσχετισμένος χώρος είναι ο $\mathbb{R}^n$ όταν αγνοηθούν οι ειδικές ιδιότητες του σημείου $0 \in \mathbb{R}^n$. Υπενθυμίζουμε οτι ο πραγματικός $n$-διάστατος διανυσματικός χώρος, $n \geq 1$, είναι το σύνολο

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \quad (n \quad \text{φορές})$$

εφοδιασμένο με τη δομή $n$-διάστατου διανυσματικού χώρου. Δηλαδή, στοιχεία του συνόλου $\mathbb{R}^n$ είναι όλες οι διατεταγμένες $n$-άδες $x = (x_1, ..., x_n)$, όπου $x_1$,..., $x_n \in \mathbb{R}$, που συνήθως αποκαλούνται διανύσματα, όταν αναφερόμαστε στη δομή διανυσματικού χώρου, η οποία ορίζεται από την πρόσθεση διανυσμάτων

$$x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

και τον αριθμητικό πολλαπλασιασμό πραγματικού αριθμού επί διάνυσμα

$$ax = (ax_1, ..., ax_n)$$

όταν $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ και $a \in \mathbb{R}$. Το μηδενικό διάνυσμα $0 = (0, ..., 0)$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης.

Αν $e_k = (0, ..., 0, 1, 0, ...0)$, (το 1 βρίσκεται στην $k$-στή θέση) $1 \leq k \leq n$, το σύνολο $\{e_1, ..., e_n\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^n$, που λέγεται κανονική βάση. Αν $x = (x_1, ..., x_n)$, τότε $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ και οι $x_1$,..., $x_n$ λέγονται συντεταγμένες του διανύσματος $x$. Συμβατικά θέτουμε $\mathbb{R}^0 = \{0\}$.

Η εισαγωγή συντεταγμένων από τον R. Descartes για την περιγραφή του χώρου οδήγησε στην ανάπτυξη της Αναλυτικής Γεωμετρίας στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$. Όμως στον φυσικό χώρο δεν υπάρχει κανένα σημείο με ειδικές ιδιότητες, όπως το $0 \in \mathbb{R}^3$. Αν θέλουμε μία αξιόπιστη μαθηματική περιγραφή του φυσικού χώρου πρέπει να απομονώσουμε εκείνες τις δομές του $\mathbb{R}^3$ ή γενικότερα του $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, που έχουν φυσικό περιεχόμενο. Για παράδειγμα, για κάθε $x$, $y \in \mathbb{R}^3$, $x \neq y$, κατασκευάζεται ένα βέλος με σημείο εφαρμογής το $x$ και αιχμή το $y$, που μπορεί να είναι μία δύναμη που εφαρμόζεται για οποιοδήποτε $x$ χωρίς η περίπτωση $x = 0$ να είναι διαφορετική από τις υπόλοιπες. Αυτό το βέλος ορίζει μία απεικόνιση του $\mathbb{R}^3$ επί του εαυτού του, η οποία είναι η μεταφορά $T_{y-x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ κατά το διάνυσμα $y - x$. Δηλαδή, η $T_{y-x}$ δίνεται από τον τύπο $T_{y-x}(z) = z + y - x$.

Έστω $n \geq 1$ ένας ακέραιος. Ένας αφηρημένος, πραγματικός *$n$-διάστατος συσχετισμένος χώρος* αποτελείται από ένα μη-κενό σύνολο $\mathbb{A}^n$ και μία οικογένεια ένα-προς-ένα και επί απεικονίσεων

$$\{T_v | T_v : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n, \quad v \in \mathbb{R}^n\}$$

με τις παρακάτω ιδιότητες:
(α) $T_{u+v} = T_u \circ T_v$ για κάθε $u$, $v \in \mathbb{R}^n$.
(β) Για κάθε $x$, $y \in \mathbb{A}^n$ υπάρχει ένα μοναδικό διάνυσμα $v(x, y) \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T_{v(x,y)}(x) = y$. Το διάνυσμα $v(x, y)$ παραδοσιακά συμβολίζεται με $\overrightarrow{xy}$.

Το σύνολο $\mathbb{A}^n$ μπορεί να γίνει διανυσματικός χώρος ως εξής. Επιλέγουμε οποιοδήποτε $a \in \mathbb{A}^n$ και θεωρούμε την απεικόνιση $\phi_a : \mathbb{A}^n \to \mathbb{R}^n$ με $\phi_a(x) = v(a, x)$. Από την ιδιότητα (β), η $\phi_a$ είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον, είναι ένα-προς-ένα, γιατί αν $\phi_a(x) = \phi_a(y)$, τότε $x = T_{\phi_a(x)}(a) = T_{\phi_a(y)}(a) = y$. Τέλος, η $\phi_a$ είναι επί γιατί για κάθε $v \in \mathbb{R}^n$ έχουμε $\phi_a(T_v(a)) = v$, από τη μοναδικότητα στην ιδιότητα (β). Στο σύνολο $\mathbb{A}^n$ ορίζεται τώρα η δομή διανυσματικού χώρου που κάνει την $\phi_a$ γραμμικό ισομορφισμό. Για κάθε $v \in \mathbb{R}^n$ και $x \in \mathbb{A}^n$ από την ιδιότητα (α) έχουμε

$$T_{\phi_a(x)+v}(a) = T_v(T_{\phi_a(x)}(a)) = T_v(x)$$

οπότε $\phi_a(T_v(x)) = \phi_a(x) + v$, από τη μοναδικότητα στην ιδιότητα (β), ή ισοδύναμα

$$(\phi_a \circ T_v \circ \phi_a^{-1})(w) = w + v$$

για κάθε $w \in \mathbb{R}^n$. Δηλαδή, η απεικόνιση $\phi_a \circ T_v \circ \phi_a^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι η μεταφορά κατά το διάνυσμα $v$.

Αντίστροφα, ο $\mathbb{R}^n$ με την οικογένεια των συνηθισμένων μεταφορών γίνεται συσχετισμένος χώρος στον οποίο $v(x, y) = y - x$ για κάθε $x$, $y \in \mathbb{R}^n$. Αυτό είναι το καθιερωμένο μοντέλο του πραγματικού $n$-διάστατου συσχετισμένου χώρου. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, για κάθε αφηρημένο, πραγματικό $n$-διάστατο συσχετισμένο χώρο $\mathbb{A}^n$ και κάθε επιλογή $a \in \mathbb{A}^n$ η απεικόνιση $\phi_a$ ταυτίζει τον $\mathbb{A}^n$ με το καθιερωμένο μοντέλο. Αν $b \in \mathbb{R}^n$ είναι μία άλλη επιλογή, για κάθε $v \in \mathbb{R}^n$ έχουμε $(\phi_b \circ \phi_a^{-1})(v) = \phi_b(T_v(a))$, οπότε $T_{(\phi_b \circ \phi_a^{-1})(v)}(b) = T_v(a)$ ή ισοδύναμα

$$T_{(\phi_b \circ \phi_a^{-1})(v)-v}(b) = a = T_{\phi_b(a)}(b).$$

Συνεπώς, $(\phi_b \circ \phi_a^{-1})(v) = v + \phi_b(a)$, δηλαδή η $\phi_b \circ \phi_a^{-1}$ είναι η μεταφορά του $\mathbb{R}^n$ κατά το διάνυσμα $\phi_b(a)$.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε το καθιερωμένο μοντέλο του πραγματικού $n$-διάστατου συσχετισμένου χώρου.

**Ορισμός 1.3.1.** Μία ένα-προς-ένα και επί απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ λέγεται *συγγραμμικότητα* αν απεικονίζει κάθε τριάδα (διαφορετικών μεταξύ τους) συνευθειακών σημείων σε μία τριάδα συνευθειακών σημείων του $\mathbb{R}^n$.

Υπενθυμίζουμε οτι τρία σημεία $x$, $y$, $z \in \mathbb{R}^n$ (διαφορετικά μεταξύ τους) είναι συνευθειακά ακριβώς τότε όταν υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ ώστε $z = y + t(x - y)$.

Έστω $a \in \mathbb{R}^n$. Για κάθε γραμμικό ισομορφισμό $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ και $b \in \mathbb{R}^n$ η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με

$$f(x) = A(x - a) + b$$

λέγεται *συσχετισμένη* και είναι συγγραμμικότητα γιατί αν $z = y + t(x - y)$ τότε

$$f(z) = A(y) + t(A(x) - A(y)) - A(a) + b = f(y) + t(f(x) - f(y)).$$

Στην πραγματικότητα ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή κάθε συγγραμμικότητα είναι μία συσχετισμένη απεικόνιση. Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως το Θεμελιώδες Θεώρημα της Συσχετισμένης Γεωμετρίας. Η απόδειξη είναι στοιχειώδης, αλλά μακροσκελής και βασίζεται στο επόμενο λήμμα.

**Λήμμα 1.3.2.** *Έστω $m \geq 1$ ένας ακέραιος, $a$, $x_1$,..., $x_m \in \mathbb{R}^n$ (διαφορετικά μεταξύ τους) και $t_1$,..., $t_m \in \mathbb{R}$. Αν*

$$x = a + \sum_{i=1}^{m} t_i(x_i - a),$$

*τότε για κάθε συγγραμμικότητα $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ υπάρχουν $s_1$,..., $s_m \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε*

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{m} s_i(f(x_i) - f(a)).$$

*Απόδειξη.* Προχωρούμε επαγωγικά. Για $m = 1$ το συμπέρασμα είναι τετριμένο, γιατί τα $a$, $x_1$ και $x = a + t_1(x_1 - a)$ είναι συνευθειακά, οπότε τα $f(a)$, $f(x_1)$ και $f(x)$ είναι συνευθειακά. Έστω οτι $m > 1$ και το συμπέρασμα ισχύει για το $m - 1$. Θέτουμε

$$x' = a + \sum_{i=1}^{m-1} t_i(x_i - a),$$

οπότε $x = x' + t_m(x_m - a)$. Από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχουν $s_1$,..., $s_{m-1} \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(x') = f(a) + \sum_{i=1}^{m-1} s_i(f(x_i) - f(a)).$$

Αν $y = a + t_m(x_m - a)$ και

$$z = \frac{1}{2}(y + x') = \frac{1}{2}(a + x),$$

τα σύνολα $\{z, x', y\}$, $\{y, a, x_m\}$ και $\{z, a, x\}$ αποτελούνται από τριάδες συνευθειακών σημείων. Συνεπώς, υπάρχουν $r$, $s$, $t \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(x) = f(z) + t(f(a) - f(z))$$

$$f(y) = f(a) + r(f(x_m) - f(a))$$

$$f(z) = f(y) + s(f(x') - f(y)).$$

Αφού

$$f(x') - f(y) = \sum_{i=1}^{m-1} s_i(f(x_i) - f(a)) - r(f(x_m) - f(a)),$$

αντικαθιστώντας υπολογίζουμε οτι

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{m-1} s(1-t)s_i(f(x_i) - f(a)) + (r - rs - rt + rst)(f(x_m) - f(a)). \quad \square$$

**Λήμμα 1.3.3.** *Αν $a$, $x_1$,..., $x_n \in \mathbb{R}^n$ ώστε το σύνολο $\{x_1 - a, x_2 - a, ..., x_n - a\}$ είναι βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$, τότε για κάθε συγγραμμικότητα $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ το σύνολο $\{f(x_1) - f(a), f(x_2) - f(a), ..., f(x_n) - f(a)\}$ είναι επίσης βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$.*

*Απόδειξη.* Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Υπάρχουν (μοναδικά) $t_1$,..., $t_m \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f^{-1}(x) - a = \sum_{i=1}^{n} t_i(x_i - a),$$

οπότε από το προηγούμενο Λήμμα 1.3.2 υπάρχουν $s_1$,..., $s_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$x - f(a) = \sum_{i=1}^{n} s_i(f(x_i) - f(a)).$$

Αυτό δείχνει οτι το σύνολο $\{f(x_1)-f(a), f(x_2)-f(a), ..., f(x_n)-f(a)\}$ παράγει τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ και συνεπώς είναι βάση. $\square$

Γενικότερα, έστω $1 \leq m \leq n$ ένας ακέραιος και $a$, $x_1$,..., $x_m \in \mathbb{R}^n$ ώστε το σύνολο $\{x_1-a, x_2-a, ..., x_m-a\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Υπάρχουν $x_{m+1}$,..., $x_n \in \mathbb{R}^n$, ώστε το σύνολο $\{x_1-a, ..., x_m-a, x_{m+1}-a, ..., x_n-a\}$ να είναι βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$. Αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι μία συγγραμμικότητα, σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα 1.3.3, το σύνολο $\{f(x_1)-f(a), f(x_2)-f(a), ..., f(x_m)-f(a), ..., f(x_n)-f(a)\}$ είναι βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$ και ειδικά το $\{f(x_1)-f(a), f(x_2)-f(a), ..., f(x_m)-f(a)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Από αυτό προκύπτει το επιπλέον συμπέρασμα οτι αν $W$ είναι ο διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ με βάση το σύνολο $\{x_1-a, x_2-a, ..., x_m-a\}$, τότε $f(a+W) = f(a)+V$, όπου $V$ είναι ο διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ με βάση το σύνολο $\{f(x_1)-f(a), f(x_2)-f(a), ..., f(x_m)-f(a)\}$. Πράγματι, από το Λήμμα 1.3.2 προκύπτει αμέσως οτι $f(a+W) \subset f(a)+V$. Αντίστροφα, αν $y \in f(a)+V$ αλλά $z = f^{-1}(y) \notin a+W$, τότε $z-a \notin W$ και το σύνολο $\{x_1-a, x_2-a, ..., x_m-a, z-a\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Συνεπώς, το $\{f(x_1)-f(a), f(x_2)-f(a), ..., f(x_m)-f(a), y-f(a)\}$ είναι γραμμικά ανρξάρτητο, οπότε $y \notin f(a)+V$, αντίφαση.

Ειδικά, κάθε συγγραμμικότητα του $\mathbb{R}^n$ απεικονίζει ευθείες σε ευθείες. Μάλιστα, απεικονίζει παράλληλες ευθείες σε παράλληλες ευθείες. Πράγματι, δύο παράλληλες ευθείες $\ell_1$, $\ell_2 \subset \mathbb{R}^n$ περιέχονται σε ένα μοναδικό επίπεδο $P \subset \mathbb{R}^n$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι μία συγγραμμικότητα, το $f(P)$ είναι επίσης επίπεδο. Δύο ευθείες πάνω σε ένα επίπεδο όμως είναι παράλληλες τότε και μόνο τότε όταν είναι ξένα σύνολα. Επειδή η $f$ είναι ένα-προς-ένα και επί και $\ell_1 \cap \ell_2 = \varnothing$, έχουμε $f(\ell_1) \cap f(\ell_2) = \varnothing$ και συνεπώς οι ευθείες $f(\ell_1)$, $f(\ell_2)$ είναι παράλληλες.

Θα χρειαστούμε επίσης το γεγονός ότι η ομάδα των αυτομορφισμών του σώματος $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι τετριμένη. Αυτό είναι το περιεχόμενο της παρακάτω πρότασης.

**Πρόταση 1.3.4.** *Έστω $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία απεικόνιση τέτοια ώστε*

$$\phi(t+s) = \phi(t)+\phi(s), \quad \phi(ts) = \phi(t)\phi(s)$$

*για κάθε $t$, $s \in \mathbb{R}$. Αν η $\phi$ δεν είναι η σταθερή μηδενική απεικόνιση, τότε $\phi(t) = t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.*

*Απόδειξη.* Προφανώς $\phi(0) = 0$. Αν υπάρχει $t \neq 0$ τέτοιο ώστε $\phi(t) = 0$, τότε

$$\phi(s) = \phi(t)\phi(\frac{s}{t}) = 0$$

για κάθε $s \in \mathbb{R}$. Αν λοιπόν η $\phi$ δεν είναι η σταθερή μηδενική απεικόνιση, τότε $\phi(t) \neq 0$ για κάθε $t \neq 0$. Σε αυτή τη περίπτωση έχουμε $\phi(1) = 1$, αφού $\phi(1) = \phi(1)\phi(1)$ και επαγωγικά $\phi(p) = p$ για κάθε $p \in \mathbb{Z}$. Αν $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, τότε

$$p = \phi(p) = \phi(q)\phi(\frac{p}{q}) = q\phi(\frac{p}{q}).$$

Δηλαδή, $\phi(r) = r$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$.

Από την άλλη μεριά, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ με $t > 0$ έχουμε

$$\phi(t) = (\phi(\sqrt{t}))^2 > 0$$

και η $\phi$ είναι γνήσια αύξουσα, γιατί αν $s < t$, τότε $\phi(t) - \phi(s) = \phi(t - s) > 0$.

Έστω τώρα $t \in \mathbb{R}$. Αν $\phi(t) < t$, υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ με $\phi(t) < r < t$, οπότε $r = \phi(r) < \phi(t)$, αντίφαση. Αν $\phi(t) > t$, υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ με $\phi(t) > r > t$, οπότε $r = \phi(r) > \phi(t)$, πάλι αντίφαση. Κατά συνέπεια, $\phi(t) = t$. □

**Λήμμα 1.3.5.** *Έστω $n \geq 2$ και $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ μία ένα-προς-ένα και επί απεικόνιση με τις παρακάτω ιδιότητες:*
*(α) $A(x + y) = A(x) + A(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$.*
*(β) Η $A$ απεικονίζει 1-διάστατους διανυσματικούς υπόχωρους του $\mathbb{R}^n$ σε 1-διάστατους διανυσματικούς υπόχωρους.*
*(γ) Αν δύο διανύσματα $x, y \in \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οι εικόνες τους $A(x)$, $A(y)$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.*

*Τότε η $A$ είναι γραμμικός ισομορφισμός.*

*Απόδειξη.* Από την ιδιότητα (α) προκύπτει οτι $A(0) = 0$ και συνεπώς $A(x) \neq 0$ για κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$. Από την ιδιότητα (β) προκύπτει οτι για κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει μία καλά ορισμένη συνάρτηση $\phi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$A(tx) = \phi_x(t)A(x)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Θα δείξουμε οτι η $\phi_x$ είναι ανεξάρτητη του $x$. Πράγματι, αν τα μη-μηδενικά διανύσματα $x, y \in \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε ειδικά $x + y \neq 0$ και από την μία μεριά έχουμε

$$A(t(x + y)) = \phi_{x+y}(t)A(x + y) = \phi_{x+y}(t)(A(x) + A(y)),$$

ενώ από την άλλη

$$A(t(x + y)) = A(tx + ty) = \phi_x(t)A(x) + \phi_y(t)A(y).$$

Όμως, από την ιδιότητα (γ), τα διανύσματα $A(x)$, $A(y)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και συνεπώς $\phi_x = \phi_{x+y} = \phi_y$. Στην περίπτωση που τα μη-μηδενικά διανύσματα $x$, $y$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $z \in \mathbb{R}^n$ που είναι γραμμικά ανεξάρτητο προς αυτά, γιατί υποθέτουμε οτι $n \geq 2$. Έτσι έχουμε $\phi_x = \phi_z = \phi_y$, από την προηγούμενη περίπτωση.

Υπάρχει λοιπόν μία μοναδική συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$A(tx) = \phi(t)A(x)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και κάθε μη-μηδενικό $x \in \mathbb{R}^n$. Προφανώς $\phi(1) = 1$.

Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ οποιοδήποτε μη-μηδενικό διάνυσμα. Για κάθε $t$, $s \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\phi(t + s)A(x) = A((t + s)x) = A(tx + sx) = \phi(t)A(x) + \phi(s)A(x)$$

και

$$\phi(ts)A(x) = A((ts)x) = A(t(sx)) = \phi(t)A(sx) = \phi(t)\phi(s)A(x).$$

Δηλαδή, ικανοποιούνται οι υποθέσεις της Πρότασης 1.3.4 και συνεπώς $\phi(t) = t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. □

**Θεώρημα 1.3.6.** *Έστω $n \geq 2$ και $o \in \mathbb{R}^n$ οποιοδήποτε σημείο. Αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι μία συγγραμμικότητα, υπάρχουν ένας μοναδικός γραμμικός ισομορφισμός $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ και ένα μοναδικό διάνυσμα $b \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε*

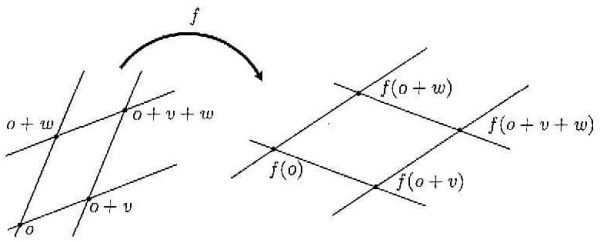
$$f(x) = A(x - o) + b$$

*για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την απεικόνιση $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με

$$A(x) = f(x + o) - f(o)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Αρκεί να δείξουμε οτι η $A$ είναι γραμμικός ισομορφισμός. Επειδή η $f$ είναι ένα-προς-ένα και επί, το ίδιο είναι και η $A$. Προφανώς $A(0) = 0$. Αν $x$, $y \in \mathbb{R}^n$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα και $W_x$, $W_y$ είναι οι αντίστοιχοι 1-διάστατοι διανυσματικοί υπόχωροι που αυτά παράγουν, τότε $(o + W_x) \cap (o + W_y) = \{o\}$. Επειδή η $f$ είναι ένα-προς-ένα και επί, έχουμε $f(o + W_x) \cap f(o + W_y) = \{f(o)\}$. Από τα παραπάνω όμως, $f(o + W_x) = f(o) + V_x$ και $f(o + W_y) = f(o) + V_y$, όπου $V_x$ είναι ο 1-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος που παράγει το διάνυσμα $A(x) = f(x+o) - f(o)$ και αντίστοιχα ο $V_y$. Συνεπώς, τα διανύσματα $A(x)$ και $A(y)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.




Τέλος, επειδή η $f$ απεικονίζει ευθείες σε ευθείες, η $A$ απεικονίζει 1-διάστατους διανυσματικούς υπόχωρους του $\mathbb{R}^n$ σε 1-διάστατους διανυσματικούς υπόχωρους. Επιπλέον, η $f$ απεικονίζει παράλληλες ευθείες σε παράλληλες ευθείες, από όπου προκύπτει οτι

$$A(v + w) = f(o + v + w) - f(o) = f(v + o) - f(o) + f(o + v + w) - f(v + o)$$

$$= A(v) + f(w + o) - f(o) = A(v) + A(w).$$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι υποθέσεις του προηγούμενου Λήμματος 1.3.5 και συνεπώς η $A$ είναι γραμμικός ισομορφισμός. □

Για κάθε ακέραιο $n \geq 2$ το σύνολο $Aff(\mathbb{R}^n)$ όλων των συγγραμμικοτήτων του $\mathbb{R}^n$ είναι ακριβώς το σύνολο όλων των συσχετισμένων μετασχηματισμών $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που ορίζονται από τύπο της μορφής

$$f(x) = A(x) + b$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, όπου η $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικός ισομορφισμός και $b \in \mathbb{R}^n$. Το σύνολο $Aff(\mathbb{R}^n)$ είναι ομάδα με τη σύνθεση απεικονίσεων, αφού προφανώς περιέχει την ταυτοτική απεικόνιση και $f^{-1}(x) = A^{-1}(x) - A^{-1}(b)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Επίσης, αν η $g \in Aff(\mathbb{R}^n)$ δίνεται από τον τύπο $g(x) = B(x) + c$, όπου η $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικός ισομορφισμός και $c \in \mathbb{R}^n$, έχουμε

$$(g \circ f)(x) = (B \circ A)(x) + B(b) + c$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και συνεπώς $g \circ f \in Aff(\mathbb{R}^n)$. Η γεωμετρία του Klein $(Aff(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$ είναι η πραγματική $n$-διάστατη Συσχετισμένη Γεωμετρία.

## 1.4 Ασκήσεις

1. Αν τα $n + 1$ διανύσματα $v_0$, $v_1$,..., $v_n$ του $\mathbb{R}^n$ είναι τέτοια ώστε το σύνολο

$$\{v_1 - v_0, ..., v_n - v_0\}$$

να αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^n$, να αποδειχθεί οτι για κάθε $1 \leq k \leq n$ το σύνολο

$$\{v_0 - v_k, ..., v_{k-1} - v_k, v_{k+1} - v_k, ..., v_n - v_k\}$$

είναι επίσης βάση του $\mathbb{R}^n$.

2. Να δειχθεί με ένα παράδειγμα οτι η Πρόταση 1.3.4 δεν ισχύει αν το σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ αντικατασταθεί με το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.

3. Έστω $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με τις παρακάτω ιδιότητες:
(α) $\phi(t + s) = \phi(t) + \phi(s)$ για κάθε $t$, $s \in \mathbb{R}$.
(β) $\phi(1) = 1$.
(γ) $\phi(t) > 0$ για κάθε $t > 0$.
Να αποδειχθεί οτι $\phi(t) = t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

4. Έστω $f \in Aff(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, που δίνεται από τον τύπο $f(x) = A(x) + b$, όπου η $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικός ισομορφισμός και $b \in \mathbb{R}^n$. Έστω $a \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ και $\ell$ η ευθεία που περιέχει το $a$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $v$. Να αποδειχθεί οτι $f(\ell) = \ell$ ακριβώς τότε όταν το $v$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $A$ και τα διανύσματα $v$, $A(a) - a + b$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

5. Έστω $f \in Aff(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, και $x, y \in \mathbb{R}^n$ με $x \neq y$. Να αποδειχθεί οτι $f((1-t)x + ty) = (1-t)f(x) + tf(y)$ για κάθε $0 \leq t \leq 1$.

6. Να αποδειχθεί οτι το σύνολο των μεταφορών του $\mathbb{R}^n$ είναι κανονική υποομάδα της $Aff(\mathbb{R}^n)$ ισόμορφη με την $(\mathbb{R}^n, +)$.

7. Να αποδειχθεί οτι το κέντρο της ομάδας $Aff(\mathbb{R}^n)$ είναι τετριμένο.

8. Έστω $\{u_0, ..., u_n\}$ και $\{v_0, ..., v_n\}$ δύο σύνολα $n+1$ σημείων του $\mathbb{R}^n$ τέτοια τα σύνολα $\{u_1 - u_0, ..., u_n - u_0\}$ και $\{v_1 - v_0, ..., v_n - v_0\}$ να είναι βάσεις του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$. Να αποδειχθεί οτι υπάρχει μοναδική $f \in Aff(\mathbb{R}^n)$ ώστε $f(u_i) = v_i$ για κάθε $0 \leq i \leq n$.

# Κεφάλαιο 2

# Ευκλείδεια Γεωμετρία

## 2.1 Ο $n$-διάστατος ευκλείδειος χώρος

Στον $\mathbb{R}^n$ ορίζεται η συμμετρική, διγραμμική, μη-εκφυλισμένη και θετικά ορισμένη μορφή $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

όταν $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$, που λέγεται ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο. Δηλαδή, το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο έχει τις παρακάτω προφανείς ιδιότητες:
(α) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (συμμετρικότητα).
(β) $\langle x, ay + bz \rangle = a\langle x, y \rangle + b\langle x, z \rangle$ (γραμμικότητα ως προς τη δεύτερη μεταβλητή).
(γ) Για κάθε $x \neq 0$ υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ ώστε $\langle x, y \rangle \neq 0$ (μη-εκφυλισμένο). Μάλιστα, $\langle x, x \rangle > 0$ για κάθε $x \neq 0$ (θετικά ορισμένο).

Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο είναι ο $n$-διάστατος ευκλείδειος χώρος.

Τα διανύσματα $x$, $y \in \mathbb{R}^n$ λέγονται κάθετα αν $\langle x, y \rangle = 0$. Προφανώς,

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{όταν } i \neq j, \\ 1, & \text{όταν } i = j. \end{cases}$$

Με άλλα λόγια, η κανονική βάση $\{e_1, ..., e_n\}$ είναι ορθοκανονική.

Για κάθε διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ ο μη-αρνητικός πραγματικός αριθμός $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ λέγεται μήκος του $x$.

**Λήμμα 2.1.1.** (Ανισότητα Cauchy-Schwarz) *Αν $x$, $y \in \mathbb{R}^n$, τότε*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

*Η ισότητα ισχύει τότε και μόνο τότε όταν τα $x$, $y$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.*

*Απόδειξη.* Αν ένα από τα δύο διανύσματα $x$, $y$ είναι το μηδενικό, τότε ισχύει η ισότητα τετριμένα. Υποθέτουμε λοιπόν οτι και τα δύο είναι μη μηδενικά. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε τώρα

$$\|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle t + \|y\|^2 t^2 = \|x + ty\|^2 \geq 0.$$

Αυτό όμως συμβαίνει ακριβώς τότε όταν $4\langle x,y\rangle^2-4\|x\|^2\cdot\|y\|^2\leq 0$. Επιπλέον, υπάρχει $t\in\mathbb{R}$ ώστε $x+ty=0$ τότε και μόνο τότε όταν $4\langle x,y\rangle^2-4\|x\|^2\cdot\|y\|^2=0$. □

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz προκύπτει ότι αν $x,\ y\in\mathbb{R}^n$ είναι δύο μη-μηδενικά διανύσματα, υπάρχει ένας μοναδικός πραγματικός αριθμός $0\leq\theta(x,y)\leq\pi$ ώστε $\langle x,y\rangle=\|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\theta(x,y)$. Ο $\theta(x,y)$ λέγεται γωνία των διανυσμάτων $x,\ y$. Προφανώς, τα $x,\ y$ είναι κάθετα ακριβώς τότε όταν $\theta(x,y)=\pi/2$.

**Πρόταση 2.1.2.** *Η συνάρτηση του μήκους $\|.\|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*
*(α) $\|x\|\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$ και $\|x\|=0$ τότε και μόνο τότε όταν $x=0$.*
*(β) $\|ax\|=|a|\cdot\|x\|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$ και $a\in\mathbb{R}$.*
*(γ) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ για κάθε $x,\ y\in\mathbb{R}^n$ (τριγωνική ανισότητα).*

*Απόδειξη.* Οι ιδιότητες (α) και (β) είναι προφανείς. Η τριγωνική ανισότητα (γ) προκύπτει από το Λήμμα 2.1.1, αφού

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+2\langle x,y\rangle+\|y\|^2\leq\|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2.\quad\square$$

Όπως δείχνει η προηγούμενη απόδειξη, η ισότητα στην τριγωνική ανισότητα ισχύει τότε και μόνο τότε όταν $\langle x,y\rangle=\|x\|\cdot\|y\|$. Από το Λήμμα 2.1.1 υπάρχει $a\in\mathbb{R}$ ώστε $x=ay$. Αντικαθιστώντας,

$$a\|y\|^2=\langle x,y\rangle=\|x\|\cdot\|y\|=|a|\cdot\|y\|^2.$$

Συνεπώς, $a=|a|\geq 0$. Συμπερασματικά, η τριγωνική ανισότητα ισχύει ως ισότητα τότε μαι μόνο τότε τα $x,\ y$ είναι συγγραμμικά με έναν μη-αρνητικό παράγοντα.

Για κάθε $x,\ y\in\mathbb{R}^n$ ο μη-αρνητικός πραγματικός αριθμός

$$d(x,y)=\|x-y\|$$

λέγεται ευκλείδεια απόσταση των $x,\ y$. Από την Πρόταση 2.1.2 προκύπτουν αμέσως οι παρακάτω ιδιότητες της ευκλείδειας απόστασης:
(α) $d(x,y)\geq 0$ για κάθε $x,\ y\in\mathbb{R}^n$ και $d(x,y)=0$ τότε και μόνο τότε όταν $x=y$.
(β) $d(x,y)=d(y,x)$ για κάθε $x,\ y\in\mathbb{R}^n$.
(γ) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ για κάθε $x,\ y,\ z\in\mathbb{R}^n$.

Γενικότερα, μία συνάρτηση απόστασης σε ένα σύνολο $X$ είναι μία συνάρτηση

$$d:X\times X\to\mathbb{R}$$

που έχει τις παραπάνω ιδιότητες (α), (β) και (γ). Το ζεύγος $(X,d)$ λέγεται τότε μετρικός χώρος.

Τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ λέγονται σημεία όταν αναφερόμαστε στη δομή του ως μετρικός χώρος.

Αν $(X,d)$ και $(Y,\rho)$ είναι δύο μετρικοί χώροι, μία απεικόνιση $f:X\to Y$ λέγεται ισομετρία αν είναι ένα-προς-ένα και επί και διατηρεί τις αποστάσεις, δηλαδή $\rho(f(x),f(y))=d(x,y)$ για κάθε $x,\ y\in X$. Πρέπει να σημειωθεί οτι μία απεικόνιση μετρικών χώρων που διατηρεί τις αποστάσεις είναι πάντα ένα-προς-ένα, αλλά ενδέχεται

να μην είναι επί. Για παράδειγμα, αν $X = Y = [0, +\infty)$ και $d(x, y) = |x - y|$, τότε η απεικόνιση $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ με $f(x) = x + 1$ διατηρεί τις αποστάσεις αλλά δεν είναι επί.

Οι ισομετρίες μετρικών χώρων είναι οι ισομορφισμοί της κατηγορίας που έχει αντικείμενα τους μετρικούς χώρους και μορφισμούς της απεικονίσεις που διατηρούν τις αποστάσεις. Δύο μετρικοί χώροι λέγονται ισομετρικοί αν υπάρχει μία ισομετρία από τον έναν επί του άλλου και τότε ταυτίζονται ως προς τη μετρική δομή τους.

## 2.2 Ευκλείδειες ισομετρίες

Σύμφωνα με τον ορισμό του Ευκλείδη δύο σχήματα, π.χ. τρίγωνα, στο επίπεδο λέγονται ισοδύναμα, δηλαδή «ίσα», αν είναι δυνατόν να μεταφερθεί το ένα στο άλλο με μία κίνηση που διατηρεί τα μήκη. Η κίνηση αυτή είναι μία απεικόνιση του επιπέδου επί του εαυτού του που διατηρεί τις ευκλείδειες αποστάσεις των σημείων.

Αν $(X, d)$ είναι ένας μετρικός χώρος, το σύνολο $I_d(X)$ όλων των ισομετριών επί του εαυτού του είναι προφανώς ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων. Ο $(X, d)$ λέγεται ομογενής, αν για κάθε $x$, $y \in Y$ υπάρχει $f \in I_d(X)$ ώστε $y = f(x)$.

Ειδικά θα συμβολίζουμε με $I(\mathbb{R}^n)$ την ομάδα των ευκλείδειων ισομετριών του $\mathbb{R}^n$.

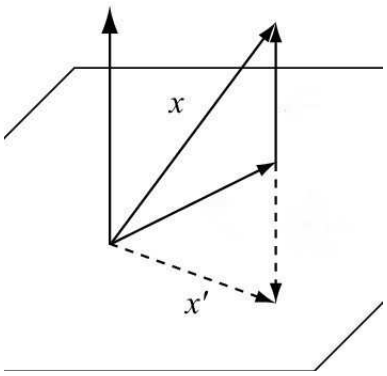
**Παραδείγματα 2.2.1.** (α) Για κάθε $a \in \mathbb{R}^n$, η μεταφορά κατά το διάνυσμα $a$ είναι ο μη-γραμμικός μετασχηματισμός $T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $T_a(x) = x + a$, που είναι προφανώς ισομετρία. Το σύνολο όλων των μεταφορών είναι υποομάδα της $I(\mathbb{R}^n)$, μάλιστα ισόμορφη με την $(\mathbb{R}^n, +)$. Προκύπτει οτι ο $n$-διάστατος ευκλείδειος χώρος είναι ομογενής.
(β) Το υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$ που περιέχει το σημείο $p \in \mathbb{R}^n$ και είναι κάθετο στο μη-μηδενικό διάνυσμα $N \in \mathbb{R}^n$ με μήκος $\|N\| = 1$ είναι το σύνολο

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x - p, N\rangle = 0\}.$$

Η απεικόνιση $a_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με

$$a_E(x) = x - 2\langle x - p, N\rangle N$$

λέγεται *ανάκλαση* ως προς το $E$ και είναι ευκλείδεια ισομετρία. Παρατηρούμε οτι $a_E(x) = x$ για κάθε $x \in E$.



(γ) Μία άλλη κατηγορία ισομετριών είναι οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί. Μία επί απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ λέγεται *ορθογώνιος μετασχηματισμός* αν διατηρεί τα ευκλείδεια εσωτερικά γινόμενα, δηλαδή

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

για κάθε $x$, $y \in \mathbb{R}^n$. Μια τέτοια απεικόνιση είναι πάντα γραμμικός ισομορφισμός γιατί

$$\langle af(x) + bf(y) - f(ax + by), f(z)\rangle = 0$$

για κάθε $x$, $y$, $z \in \mathbb{R}^n$ και $a$, $b \in \mathbb{R}$. Αν η $f$ είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός, τότε $\|f(x)\| = \|x\|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Το σύνολο $O(n, \mathbb{R})$ όλων των ορθογώνιων μετασχηματισμών του $\mathbb{R}^n$ είναι υποομάδα της $I(\mathbb{R}^n)$ και λέγεται *ορθογώνια ομάδα*.

Οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί έχουν κεντρικό ρόλο στην Ευκλείδεια Γεωμετρία όπως θα δούμε παρακάτω. Ανάμεσα στις γραμμικές απεικονίσεις χαρακτηρίζονται ως εξής.

**Πρόταση 2.2.2.** *Για μία γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*
*(α) Η $f$ είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός.*
*(β) Η $f$ απεικονίζει κάποια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ σε ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.*
*(γ) Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ο πίνακας της $f$ (ως προς την κανονική βάση), τότε $A^tA = I_n$, δηλαδή ο $A$ είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = A^t$.*

*Απόδειξη.* Είναι προφανές οτι ο ισχυρισμός (α) συνεπάγεται τον (β). Θα δείξουμε οτι ο (β) συνεπάγεται τον (α). Εστω λοιπόν οτι υπάρχει κάποια ορθοκανονική βάση $\{v_1, ..., v_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε το $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ να είναι επίσης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ γράφεται $x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, v_k\rangle v_k$, οπότε $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, v_k\rangle f(v_k)$, επειδή η $f$ υποτίθεται γραμμική. Από την άλλη μεριά όμως, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle f(x), f(v_k)\rangle f(v_k)$. Συνεπώς, $\langle x, v_k\rangle = \langle f(x), f(v_k)\rangle$ για κάθε $k = 1, 2, ..., n$. Αν τώρα $y \in \mathbb{R}^n$ τότε $y = \sum_{k=1}^{n} \langle y, v_k\rangle v_k$ και

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle f(x), \sum_{k=1}^{n} \langle y, v_k\rangle f(v_k)\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle y, v_k\rangle \cdot \langle f(x), f(v_k)\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle y, v_k\rangle \cdot \langle x, v_k\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Αυτό δείχνει οτι η $f$ είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός.

Τέλος, αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ο πίνακας της $f$ ως προς την κανονική βάση $\{e_1, ..., e_n\}$, τότε

$$A^tA = \big(\langle f(e_i), f(e_j)\rangle\big)_{1\le i,j\le n}.$$

Συνεπώς, $A^tA = I_n$ τότε και μόνον τότε όταν το $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Αυτό δείχνει την ισοδυναμία του ισχυρισμού (γ) με τον (α) και τον (β). □

Ένας χρήσιμος χαρακτηρισμός των ορθογώνιων μετασχηματισμών μέσα στην ομάδα των ευκλείδειων ισομετριών $I(\mathbb{R}^n)$ είναι ο ακόλουθος.

**Λήμμα 2.2.3.** *Αν η $f \in I(\mathbb{R}^n)$ και $f(0) = 0$, τότε $f \in O(n, \mathbb{R})$.*

*Απόδειξη.* Από τις υποθέσεις για την $f$ προκύπτει αμέσως οτι

$$\|f(x)\| = \|f(x) - 0\| = \|f(x) - f(0)\| = \|x - 0\| = \|x\|$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Από την άλλη μεριά, για κάθε $x$, $y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\|f(x)\|^2 - 2\langle f(x), f(y)\rangle + \|f(y)\|^2 = \|f(x) - f(y)\|^2 = \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

και συνεπώς $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. Αφού η $f$ διατηρεί τα εσωτερικά γινόμενα και είναι επί, είναι γραμμική. □

Οι μεταφορές και οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί παράγουν όλες τις ευκλείδειες ισομετρίες του $\mathbb{R}^n$ με τον παρακάτω απλό τρόπο.

**Θεώρημα 2.2.4.** *Για κάθε $F \in I(\mathbb{R}^n)$ υπάρχουν μοναδικά $a \in \mathbb{R}^n$ και $f \in O(n, \mathbb{R})$ ώστε $F = T_a \circ f$.*

*Απόδειξη.* Αν $a = F(0)$, τότε για την ισομετρία $f = T_a^{-1} \circ F$ ισχύει $f(0) = 0$. Από το Λήμμα 2.2.3, η $f$ είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός. Για την μοναδικότητα, αν υπάρχουν $b \in \mathbb{R}^n$ και $g \in O(n, \mathbb{R})$ ώστε $F = T_a \circ f = T_b \circ g$, τότε $f = T_{b-a} \circ g$ και ειδικά

$$0 = f(0) = T_{b-a}(g(0)) = T_{b-a}(0).$$

Αυτό όμως σημαίνει οτι $b - a = 0$ και κατά συνέπεια επίσης $f = g$. □

Με άλλα λόγια για κάθε $F \in I(\mathbb{R}^n)$ υπάρχουν μοναδικά $A \in O(n, \mathbb{R})$ και $a \in \mathbb{R}^n$ ώστε η $F$ να δίνεται από τον τύπο $F(x) = Ax + a$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Ειδικά, η $F$ είναι $C^\infty$ αμφιδιαφόριση του $\mathbb{R}^n$ με παράγωγο $DF(x) = A$ σε κάθε σημείο $x \in \mathbb{R}^n$. Όταν $\det A = 1$, λέμε οτι η ισομετρία $F$ διατηρεί τον προσανατολισμό του $\mathbb{R}^n$, ενώ όταν $\det A = -1$ λέμε οτι τον αντιστρέφει.

Προφανώς, κάθε ευκλείδεια ισομετρία είναι συσχετισμένος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$ και η $I(\mathbb{R}^n)$ είναι υποομάδα της $Aff(\mathbb{R}^n)$.

Μία άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.2.4 είναι το γεγονός οτι η ομάδα των μεταφορών είναι κανονική υποομάδα της $I(\mathbb{R}^n)$, ενώ η ορθογώνια ομάδα $O(n, \mathbb{R})$ δεν είναι κανονική στην $I(\mathbb{R}^n)$. Το συμπέρασμα λοιπόν του Θεωρήματος 2.2.4 δεν λέει οτι αλγεβρικά η ομάδα των ευκλείδειων ισομετριών $I(\mathbb{R}^n)$ είναι το ευθύ γινόμενο της ομάδας των μεταφορών και της ορθογώνιας ομάδας. Αυτό δεν ισχύει!

Ένα σύνολο $\{u_0, ..., u_n\}$ $n + 1$ σημείων του $\mathbb{R}^n$ λέμε οτι είναι σε γενική θέση αν το σύνολο $\{u_1 - u_0, ..., u_n - u_0\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και συνεπώς βάση του $\mathbb{R}^n$.

**Πόρισμα 2.2.5.** *Μία ευκλείδεια ισομετρία του $\mathbb{R}^n$ καθορίζεται πλήρως από τις εικόνες $n+1$ σημείων του $\mathbb{R}^n$ σε γενική θέση.* □

**Πρόταση 2.2.6.** *Έστω $\{u_0, ..., u_n\}$ και $\{v_0, ..., v_n\}$ δύο σύνολα $n+1$ σημείων του $\mathbb{R}^n$ σε γενική θέση. Αν $d(u_i, u_j) = d(v_i, v_j)$ για κάθε $0 \leq i, j \leq n$, τότε υπάρχει $f \in I(\mathbb{R}^n)$ ώστε $f(u_i) = v_i$ για κάθε $0 \leq i \leq n$.*

*Απόδειξη.* Επειδή τα σύνολα $\{u_1 - u_0, ..., u_n - u_0\}$ και $\{v_1 - v_0, ..., v_n - v_0\}$ είναι βάσεις του $\mathbb{R}^n$, υπάρχει μία μοναδική γραμμική απεικόνιση $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $A(u_i - u_0) = v_i - v_0$, $1 \leq i \leq n$. Αν τώρα $x$, $y \in \mathbb{R}^n$, υπάρχουν μοναδικοί $a_1$,..., $a_n \in \mathbb{R}$ ώστε

$$x - y = \sum_{k=1}^{n} a_k(u_k - u_0)$$

οπότε

$$A(x) - A(y) = \sum_{k=1}^{n} a_k A(u_k - u_0) = \sum_{k=1}^{n} a_k(v_k - v_0).$$

Συνεπώς,

$$d(A(x), A(y))^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \langle v_i - v_0, v_j - v_0 \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j (d(v_i, v_0)^2 + d(v_j, v_0)^2 - d(v_i, v_j)^2) = d(x, y)^2.$$

Από την υπόθεσή μας λοιπόν προκύπτει οτι η $A$ είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός. Αφού $v_i = A(u_i) - (A(u_0) - v_0)$, $1 \leq i \leq n$, αρκεί να θεωρήσουμε την ευκλείδεια ισομετρία $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με τύπο $f(x) = A(x) - (A(u_0) - v_0)$. □

**Ορισμός 2.2.7.** Έστω $(X, d)$ ένας μετρικός χώρος. Δύο σύνολα $K$, $S \subset X$ λέγονται *ισοδύναμα* αν υπάρχει $f \in I_d(X)$ ώστε $f(K) = S$.

Η ισοδυναμία υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου είναι η σύγχρονη εκδοχή της ισότητας σχημάτων μέσω της έννοιας της υπέρθεσης κατά τον Ευκλείδη.

**Παράδειγμα 2.2.8.** Έστω $V$, $W$ δύο διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$ ίδιας διάστασης $1 \leq m \leq n$. Από τον αλγόριθμο Gramm-Schmidt, υπάρχουν δύο ορθοκανονικές βάσεις $\{u_1, ..., u_n\}$, $\{v_1, ..., v_n\}$ του $\mathbb{R}^n$, ώστε το $\{u_1, ..., u_m\}$ να είναι ορθοκανονική βάση του $V$ και το $\{v_1, ..., v_m\}$ να είναι ορθοκανονική βάση του $W$. Υπάρχει μία μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $f(u_i) = v_i$, $1 \leq i \leq n$, η οποία είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός, από την Πρόταση 2.2.2 και φυσικά $f(V) = W$. Συνεπώς, δύο οποιοιδήποτε διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$ με την ίδια διάσταση είναι ισοδύναμα σύνολα στα πλαίσια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Επιπλέον, για κάθε $u$, $y \in \mathbb{R}^n$, η απεικόνιση $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με

$$F(x) = f(x) + (y - f(u))$$

είναι ευκλείδεια ισομετρία και $F(u + V) = y + W$. Κατά συνέπεια δύο οποιαδήποτε σύμπλοκα διανυσματικών υποχώρων του $\mathbb{R}^n$ με την ίδια διάσταση είναι ισοδύναμα σύνολα.

## 2.3 Η ορθογώνια ομάδα

Από την Πρόταση 2.2.2, προκύπτει οτι κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός έχει ορίζουσα $\pm 1$. Η γραμμική απεικόνιση $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με

$$a(x) = x - 2\langle x, e_n\rangle e_n$$

ή με συντεταγμένες

$$a(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) = (x_1, ..., x_{n-1}, -x_n)$$

είναι η ανάκλαση ως προς το οριζόντιο υπερεπίπεδο, είναι γραμμική, αφού το οριζόντιο υπερεπίπεδο περιέχει το 0 και έχει διαγώνιο πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, $\det a = -1$. Η απεικόνιση ορίζουσα $\det : O(n, \mathbb{R}) \to \{1, -1\}$ είναι λοιπόν επιμορφισμός ομάδων, όταν στο $\{1, -1\}$ θεωρήσουμε τον συνηθισμένο πολλαπλασιασμό, οπότε γίνεται η κυκλική ομάδα με δύο στοιχεία. Ο πυρήνας είναι η κανονική υποομάδα

$$SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^t A = I_n \quad \text{και} \quad \det A = 1\}$$

που λέγεται *ειδική ορθογώνια ομάδα*. Η $SO(n, \mathbb{R})$ έχει δείκτη 2 στην $O(n, \mathbb{R})$ και $O(n, \mathbb{R}) = SO(n, \mathbb{R}) \cup aSO(n, \mathbb{R})$.

**Παράδειγμα 2.3.1.** Θα περιγράψουμε πλήρως την ορθογώνια ομάδα $O(2, \mathbb{R})$. Αν ο

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

είναι αντιστρέψιμος, έχει αντίστροφο τον

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Αν λοιπόν $A \in O(2, \mathbb{R})$, τότε $A^{-1} = A^t$ και $\det A = \pm 1$.

Υποθέτουμε πρώτα οτι $A \in SO(2, \mathbb{R})$. Από τη σύγκριση των στοιχείων των $A^{-1}$ και $A^t$ προκύπτει οτι $a = d$ και $b = -c$. Συνεπώς,

$$SO(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a^2 + b^2 = 1, \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Υπενθυμίζουμε οτι ο μοναδιαίος κύκλος $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ γίνεται αβελιανή ομάδα αν εφοδιαστεί με τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών. Εύκολα βλέπουμε τώρα οτι η απεικόνιση $h : S^1 \to SO(2, \mathbb{R})$ με

$$h(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

είναι ισομορφισμός ομάδων. Για κάθε $A \in SO(2,\mathbb{R})$ υπάρχει μοναδικός $0 \leq \theta < 2\pi$ ώστε

$$A = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

δηλαδή ο $A$ είναι η στροφή κατά γωνία $\theta$. Αυτά περιγράφουν πλήρως την ειδική ορθογώνια ομάδα $SO(2,\mathbb{R})$.

Στη συνέχεια υποθέτουμε $A \in O(2,\mathbb{R})$ με $\det A = -1$. Πάλι συγκρίνοντας τα στοιχεία των $A^{-1}$ και $A^t$ προκύπτει οτι $a = -d$ και $b = c$. Συνεπώς,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

όπου $a^2 + b^2 = 1$. Αυτό σημαίνει οτι ο $A$ είναι η σύνθεση της ανάκλασης ως προς τον οριζόντιο άξονα που παράγεται από το διάνυσμα $e_1$ και μίας στροφής. Ο $A$ έχει ιδιοτιμές 1 και $-1$. Υπάρχουν λοιπόν δύο μη-μηδενικά ιδιοδιανύσματα $u$, $v$ του $A$, με μήκη $\|u\| = \|v\| = 1$ ώστε $A(u) = u$ και $A(v) = -v$. Παρατηρούμε οτι τα $u$, $v$ είναι κάθετα γιατί

$$\langle u, v\rangle = \langle A(u), A(v)\rangle = -\langle u, v\rangle.$$

Κατά συνέπεια το $\{u, v\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$ υπάρχουν μοναδικοί $x_1$, $x_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $x = x_1 u + x_2 v$. Έχουμε τώρα

$$A(x) = x_1 u - x_2 v = x - 2\langle x, v\rangle v.$$

Με άλλα λόγια, ο $A$ είναι η ανάκλαση ως προς την ευθεία, που είναι ο ιδιόχωρος, που παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $u$. Αυτά δείχνουν οτι κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός στο σύμπλοκο $aSO(2,\mathbb{R})$ είναι ανάκλαση ως προς κάποιο 1-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^2$.

Μία πρόσθετη συνέπεια των προηγουμένων είναι οτι έχουμε και

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Αυτό δείχνει οτι κάθε στροφή είναι η σύνθεση δύο ανακλάσεων. Συμπερασματικά, κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^2$ είναι σύνθεση το πολύ δύο ανακλάσεων, ως προς κάποιους 1-διάστατους διανυσματικούς υπόχωρους του $\mathbb{R}^2$. Αργότερα θα γενικεύσουμε αυτό το συμπέρασμα σε οποιαδήποτε διάσταση.

**Παράδειγμα 2.3.2.** Η περιστροφή του $\mathbb{R}^3$ κατά γωνία $0 \leq \theta < 2\pi$ με άξονα περιστροφής την ευθεία που παράγει το διάνυσμα $e_1 = (1,0,0)$ είναι η γραμμική απεικόνιση που έχει πίνακα (ως προς τη διατεταγμένη κανονική βάση)

$$P_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

και είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός, μάλιστα $P_\theta \in SO(3,\mathbb{R})$.

Θα δείξουμε οτι κάθε στοιχείο της $SO(3,\mathbb{R})$ είναι συζυγές στην $O(3,\mathbb{R})$ με κάποια περιστροφή $P_\theta$. Με άλλα λόγια κάθε στοιχείο της $SO(3,\mathbb{R})$ είναι περιστροφή περί κάποιον άξονα περιστροφής και ως προς κάποια γωνία. Αυτό θα προκύψει από τη γενική περιγραφή των ορθογώνιων μετασχηματισμών σε οποιαδήποτε διάσταση. Γιαυτό θα χρειαστούν κάποιες αρχικές παρατηρήσεις.

Έστω $A \in O(n,\mathbb{R})$. Αν ο $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι ιδιοτιμή του $A$, υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^n$ ώστε $A(u) = \lambda u$ και συνεπώς

$$\|u\| = \|A(u)\| = \|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$$

οπότε $\lambda = \pm 1$. Με άλλα λόγια, μοναδικές πραγματικές ιδιοτιμές που μπορεί να έχει ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός είναι οι $1$, $-1$. Ενδέχεται ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός να μην έχει καμία πραγματική ιδιοτιμή ή ισοδύναμα να μην έχει κανέναν αναλλοίωτο 1-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$, όπως δείχνει το παράδειγμα μίας οποιασδήποτε στροφής $R_\theta \in SO(2,\mathbb{R})$ κατά γωνία $\theta \neq 0, \pi$.

Μία δεύτερη σημαντική παρατήρηση είναι η εξής. Αν ο διανυσματικός υπόχωρος $V$ του $\mathbb{R}^n$ είναι αναλλοίωτος από τον $A \in O(n,\mathbb{R})$, δηλαδή $A(V) = V$, τότε και το ορθογώνιο συμπλήρωμα

$$V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v\rangle = 0 \quad \text{για κάθε} \quad v \in V\}$$

του $V$ είναι αναλλοίωτος από τον $A$ διανυσματικός υπόχωρος. Πράγματι, για κάθε $x \in V^\perp$ και κάθε $v \in V$ έχουμε

$$\langle A(x), v\rangle = \langle A(x), A(A^{-1}(v))\rangle = \langle x, A^{-1}(v)\rangle = 0.$$

**Λήμμα 2.3.3.** *Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός γραμμικού μετασχηματισμού $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ δεν έχει καμία πραγματική ρίζα, τότε υπάρχει ένα διανυσματικός υπόχωρος $V$ του $\mathbb{R}^n$ με διάσταση 2, που είναι αναλλοίωτος από την $A$ και $\det(A|_V) > 0$.*

*Απόδειξη.* Από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας, υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, όπου $a$, $b \in \mathbb{R}$ με $b \neq 0$, του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του $A$ και υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $z \in \mathbb{C}^n$ ώστε $A(z) = \lambda z$, επεκτείνοντας τον $A$ στον $\mathbb{C}^n$. Υπάρχουν μοναδικά $x$, $y \in \mathbb{R}^n$ ώστε $z = x + iy$ και αυτό σημαίνει οτι

$$A(x) + iA(y) = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay),$$

δηλαδή $A(x) = ax - by$ και $A(y) = bx + ay$. Επιπλέον, $x$, $y \neq 0$, αφού ο $A$ δεν έχει ιδιοδιανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ και τα διανύσματα $x$, $y$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, γιατί αλλιώς υπάρχει μη-μηδενικός $c \in \mathbb{R}$ ώστε $x = cy$, οπότε αντικαθιστώντας $A(y) = (bc + a)y$, δηλαδή πάλι ο $A$ έχει ιδιοδιάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Το $\{x, y\}$ είναι βάση λοιπόν ενός 2-διάστατου υπόχωρου $V$ του $\mathbb{R}^n$, που είναι προφανώς αναλλοίωτος από τον $A$ και ο πίνακας του $A|_V$ ως προς τη διατεταγμένη βάση $[x, y]$ είναι ο

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

που έχει ορίζουσα $a^2 + b^2 > 0$. □

Δύο διανυσματικοί υπόχωροι $V$, $W$ του $\mathbb{R}^n$ λέμε οτι είναι κάθετοι (ή ορθογώνιοι) αν $\langle v, w\rangle = 0$ για κάθε $v \in V$, $w \in W$.

**Θεώρημα 2.3.4.** *Για κάθε $A \in O(n,\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq m \leq n$ και διανυσματικοί υπόχωροι $V_1$,..., $V_m$ του $\mathbb{R}^n$ τέτοιοι ώστε*
*(α)* $\dim V_k = 1$ *ή* $2$ *για κάθε* $1 \leq k \leq m$.
*(β)* $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$.
*(γ) Ο $V_k$ είναι αναλλοίωτος από τον $A$ για κάθε $1 \leq k \leq m$.*
*(δ) Οι $V_j$, $V_k$ είναι κάθετοι όταν $j \neq k$.*

*Απόδειξη.* Προχωρούμε με επαγωγή. Για $n = 1$ το συμπέρασμα είναι τετριμένο. Έστω οτι το συμπέρασμα ισχύει για ευκλείδειους χώρους διάστασης $< n$. Από το Λήμμα 2.3.3, υπάρχει ένας διανυσματικός υπόχωρος $V_1$ του $\mathbb{R}^n$ με διάσταση 1 ή 2 που είναι αναλλοίωτος από τον $A$. Τότε το ορθογώνιο συμπλήρωμα $V_1^{\perp}$ είναι επίσης αναλλοίωτο από τον $A$, $\dim V_1^{\perp} < n$ και $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_1^{\perp}$. Εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση για τον ευκλείδειο χώρο $V_1^{\perp}$ παίρνουμε αμέσως το συμπέρασμα. □

Στο προηγούμενο Θεώρημα 2.3.4, αν $\dim V_k = 1$, τότε $A(x) = x$ για κάθε $x \in V_k$ ή $A(x) = -x$ για κάθε $x \in V_k$, αφού οι μοναδικές πραγματικές ιδιοτιμές που μπορεί να έχει ο $A$ είναι οι $1, -1$. Αν $\dim V_k = 2$, τότε ο $A|_{V_k}$ είναι μία στροφή από το Παράδειγμα 2.3.1 και το Λήμμα 2.3.3. Παίρνοντας σε κάθε έναν υπόχωρο $V_k$ μία κατάλληλη ορθοκανονική βάση και διατάσσοντας έτσι ώστε πρώτα να εμφανίζονται οι 1-διάστατοι αναλλοίωτοι υπόχωροι και μετά οι 2-διάστατοι, παίρνουμε μία διατεταγμένη ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, ως προς την οποία ο πίνακας του $A$ είναι

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{\theta_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{\theta_s} \end{pmatrix}.$$

όπου $0 \leq \theta_1, ..., \theta_s < 2\pi$, αν ο $n = 2s + 1$ είναι περιττός. Αν ο $n = 2s$ είναι άρτιος, ο πίνακας του $A$ ως προς αυτή τη βάση είναι

$$\begin{pmatrix} R_{\theta_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & R_{\theta_s} \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & R_{\theta_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & R_{\theta_s} \end{pmatrix}.$$

όπου $0 \leq \theta_1, ..., \theta_s < 2\pi$. Ο πίνακας αλλαγής βάσης από αυτή την ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ στην κανονική βάση είναι ορθογώνιος, από την Πρόταση 2.2.2. Έτσι φτάνουμε στο παρακάτω αποτέλεσμα.

**Πόρισμα 2.3.5.** *Για κάθε $A \in O(n,\mathbb{R})$ υπάρχει $R \in O(n,\mathbb{R})$ ώστε ο $RAR^{-1}$ να έχει μία από τις παραπάνω τέσσερεις μορφές.* □

**Παράδειγμα 2.3.6.** Αν $A \in SO(3,\mathbb{R})$, τότε ο $A$ είναι ορθογώνια όμοιος, δηλαδή συζυγής στην $O(3,\mathbb{R})$, με την περιστροφή

$$P_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

για κάποιο $0 \leq \theta < 2\pi$, αφού έχει οπωσδήποτε την ιδιοτιμή 1, επειδή το 3 είναι περιττός ακέραιος και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $A$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ιδιοτιμή.

Θα ολοκληρώσουμε την περιγραφή της ορθογώνιας ομάδας και της ομάδας των ευκλείδειων ισομετριών με το περίφημο θεώρημα των E. Cartan και J. Dieudonné σύμφωνα με το οποίο κάθε ευκλείδεια ισομετρία του $\mathbb{R}^n$ αναλύεται σε σύνθεση το πολύ $n+1$ ανακλάσεων. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε δύο προκαταρκτικές παρατηρήσεις.

Έστω $V$ ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Οποιοσδήποτε γραμμικός ισομορφισμός $f : V^\perp \to V^\perp$ που διατηρεί το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στον $V^\perp$ επεκτείνεται σε έναν ορθογώνιο μετασχηματισμό $\hat{f} \in O(n,\mathbb{R})$ ως εξής. Αφού $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ υπάρχουν μοναδικά $v \in V$ και $y \in V^\perp$ ώστε $x = v + y$. Η $\hat{f}$ ορίζεται τώρα από τον τύπο

$$\hat{f}(x) = v + f(y).$$

Ένας απλός υπολογισμός δείχνει οτι πράγματι $\hat{f} \in O(n,\mathbb{R})$, ενώ είναι προφανές οτι $\hat{f}(v) = v$ για κάθε $v \in V$. Επίσης, αν $g : V^\perp \to V^\perp$ είναι ένας δεύτερος γραμμικός ισομορφισμός που διατηρεί το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στον $V^\perp$, τότε $\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}$.

Έστω $N \in V^\perp$ ένα μη-μηδενικό διάνυσμα με $\|N\| = 1$ και $C$ το ορθογώνιο συμπλήρωμα στον $V^\perp$ της ευθείας που παράγεται από το $N$. Η ανάκλαση $a_C : V^\perp \to V^\perp$ του $V^\perp$ ως προς το υπερεπίπεδο $C$ του $V^\perp$ δίνεται από τον τύπο

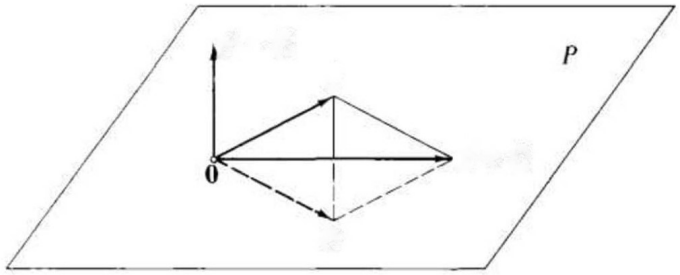
$$a_C(y) = y - 2\langle y, N\rangle N$$

και επεκτείνεται με τον παραπάνω τρόπο στην ανάκλαση ως προς το ορθογώνιο συμπλήρωμα $E$ στον $\mathbb{R}^n$ της ευθείας που παράγεται από το $N$, δηλαδή $\hat{a}_C = a_E$.

Έστω τώρα $u,\ v \in \mathbb{R}^n$ δύο μη-μηδενικά διανύσματα με $\|u\| = \|v\|$, οπότε τα διανύσματα $u+v$, $u-v$ είναι κάθετα. Έστω

$$N = (u - v) \cdot \frac{1}{\|u - v\|}$$

και $P$ το ορθογώνιο συμπλήρωμα στον $\mathbb{R}^n$ του 1-διάστατου διανυσματικού υπόχωρου που παράγεται από το $N$. Τότε, $a_P(v) = v - 2\langle v, N\rangle N = u$. Ο διανυσματικός υπόχωρος $P$ του $\mathbb{R}^n$ λέγεται μεσοκάθετος των διανυσμάτων $u$, $v$.




**Θεώρημα 2.3.7.** *Κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός του ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, είναι σύνθεση το πολύ $n$ ανακλάσεων ως προς κατάλληλους $(n-1)$-διάστατους διανυσματικούς υπόχωρους του $\mathbb{R}^n$.*

*Απόδειξη.* Προχωρούμε με επαγωγή στη διάσταση. Για $n = 1$ το συμπέρασμα είναι τετριμένο, αφού $O(1, \mathbb{R}) = \{id_{\mathbb{R}}, -id_{\mathbb{R}}\}$. Υποθέτουμε οτι το συμπέρασμα ισχύει για διαστάσεις $< n$ και $A \in O(n, \mathbb{R})$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Έστω πρώτα οτι υπάρχει κάποιο μη-μηδενικό διάνυσμα $N \in \mathbb{R}^n$ ώστε $A(N) = N$. Μπορούμε να υποθέσουμε επιπλέον οτι $\|N\| = 1$. Αν $V$ είναι ο 1-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος που παράγεται από το $N$, τότε $A(V^\perp) = V^\perp$. Από την επαγωγική υπόθεση, η $A|_{V^\perp}$ είναι σύνθεση το πολύ $n-1$ ανακλάσεων $a_1$,..., $a_{n-1}$ του $V^\perp$, δηλαδή

$$A|_{V^\perp} = a_1 \circ \cdots \circ a_{n-1}$$

Από την πρώτη παρατήρηση που προηγήθηκε,

$$A = \widehat{A|_{V^\perp}} = \hat{a}_1 \circ \cdots \circ \hat{a}_{n-1}$$

και οι επεκτάσεις $\hat{a}_1$,..., $\hat{a}_{n-1}$ είναι ανακλάσεις του $\mathbb{R}^n$ ως προς κατάλληλους $(n-1)$-διάστατους διανυσματικούς υποχώρους του $\mathbb{R}^n$.

Έστω τώρα οτι $A(x) \neq x$ για κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$. Για οποιαδήποτε επιλογή μη-μηδενικού $x \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει η μεσοκάθετος $P$ των $A(x)$ και $x$, από τη δεύτερη παραπάνω παρατήρηση και $a_P(A(x)) = x$. Με άλλα λόγια, η $a_P \circ A \in O(n, \mathbb{R})$ εμπίπτει στην πρώτη περίπτωση και συνεπώς ο $A$ είναι σύνθεση το πολύ $n$ ανακλάσεων ως προς κατάλληλους $(n-1)$-διάστατους διανυσματικούς υπόχωρους του $\mathbb{R}^n$. □

Αξίζει να σημειωθεί οτι οι δύο περιπτώσεις που θεωρήσαμε στην απόδειξη του προηγούμενου Θεωρήματος 2.3.7 δεν είναι ξένες μεταξύ τους.

**Πόρισμα 2.3.8.** *Κάθε ευκλείδεια ισομετρία $f \in I(\mathbb{R}^n)$ είναι σύνθεση το πολύ $n+1$ ανακλάσεων.*

*Απόδειξη.* Υπάρχουν μοναδικά $A \in O(n,\mathbb{R})$ και $b \in \mathbb{R}^n$ ώστε $f = T_b \circ A$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.7, υπάρχουν ανακλάσεις $a_1$,..., $a_m$, ως προς κατάλληλους $(n-1)$-διάστατους διανυσματικούς υπόχωρους του $\mathbb{R}^n$, ώστε

$$A = a_1 \circ \cdots \circ a_m$$

για κάποιο $1 \leq m \leq n$. Αν $b = 0$, έχουμε τελειώσει. Αν $b \neq 0$ και $E$ είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του 1-διάστατου διανυσματικού υπόχωρου που παράγεται από το $b$, εύκολα βλέπουμε οτι

$$T_b = a_{c+E} \circ a_E$$

όπου $c = \dfrac{1}{2}b$. Συνεπώς,

$$f = a_{c+E} \circ a_E \circ a_1 \circ \cdots \circ a_m.$$

Αφού $a_E \circ a_1 \circ \cdots \circ a_m \in O(n,\mathbb{R})$, εφαρμόζοντας ακόμα μία φορά το Θεώρημα 2.3.7 υπάρχουν ανακλάσεις $a'_1$,..., $a'_k$, ως προς κατάλληλους $(n-1)$-διάστατους διανυσματικούς υπόχωρους του $\mathbb{R}^n$, όπου $1 \leq k \leq n$, ώστε

$$a_E \circ a_1 \circ \cdots \circ a_m = a'_1 \circ \cdots \circ a'_k$$

και αντικαθιστώντας,

$$f = a_{c+E} \circ a'_1 \circ \cdots \circ a'_k. \quad \square$$

Όπως δείχνει η προηγούμενη απόδειξη, τα υπερεπίπεδα ως προς τα οποία γίνονται οι ανακλάσεις που εμφανίζονται στην ανάλυση της ισομετρίας $f \in I(\mathbb{R}^n)$ διέρχονται όλα από το ίδιο σημείο, το $0 \in \mathbb{R}^n$, εκτός από ένα.

## 2.4 Πεπερασμένες ομάδες ισομετριών

Έστω $F \subset \mathbb{R}^n$ ένα πεπερασμένο σύνολο. Το σημείο

$$b_F = \frac{1}{|F|}\sum_{y \in F} y$$

λέγεται βαρύκεντρο του $F$ και μπορεί να χαρακτηριστεί ως εξής. Είναι το σημείο στο οποίο η συνάρτηση $\phi_F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τον τύπο

$$\phi_F(x) = \sum_{y \in F} \|x - y\|^2 = |F|\Big(\|x - b_F\|^2 - \|b_F\|^2 + \frac{1}{|F|}\sum_{y \in F}\|y\|^2\Big)$$

παίρνει ελάχιστη τιμή.

**Λήμμα 2.4.1.** *Αν $F \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, τότε για κάθε $f \in I(\mathbb{R}^n)$ το βαρύκεντρο του πεπερασμένου συνόλου $f(F)$ είναι το σημείο $f(b_F)$.*

*Απόδειξη.* Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\phi_{f(F)}(x) = \sum_{y \in F} d(x, f(y))^2 = \sum_{y \in F} d(f^{-1}(x), y)^2 = \phi_F(f^{-1}(x))$$

από όπου το συμπέρασμα είναι άμεσο. □

**Πρόταση 2.4.2.** *Κάθε πεπερασμένη υποομάδα $G$ της $I(\mathbb{R}^n)$ έχει σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει $b \in \mathbb{R}^n$ ώστε $g(b) = b$ για κάθε $g \in G$.*

*Απόδειξη.* Επιλέγουμε ένα οποιοδήποτε σημείο $x \in \mathbb{R}^n$. Επειδή η $G$ υποτίθεται πεπερασμένη, η τροχιά $G(x)$ του $x$, που αποτελείται από τα σημεία $g(x)$, $g \in G$, είναι πεπερασμένο σύνολο και $g(G(x)) = G(x)$ για κάθε $g \in G$. Από το προηγούμενο Λήμμα 2.4.2, προκύπτει αμέσως οτι το βαρύκεντρο $b$ του $G(x)$ είναι σταθερό σημείο της $G$. □

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε πλήρως τις πεπερασμένες υποομάδες της ομάδας των ισομετριών $I(\mathbb{R}^2)$ του ευκλείδειου επιπέδου. Για κάθε ακέραιο $n > 2$ η στροφή $R$ κατά γωνία $2\pi/n$ παράγει μία πεπερασμένη κύκλική υποομάδα τάξης $n$ της $SO(2,\mathbb{R})$, την οποία θα συμβολίζουμε με $C_n$. Αν $a \in O(2,\mathbb{R})$ είναι η ανάκλαση ως προς τον οριζόντιο άξονα, δηλαδή τον 1-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο που παράγεται από το διάνυσμα $e_1$, έχουμε

$$a \circ R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ -\sin(2\pi/n) & -\cos(2\pi/n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & \sin(2\pi/n) \\ -\sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = R^{-1} \circ a.$$

Αν $D_n$ είναι η υποομάδα της $O(2,\mathbb{R})$ που παράγεται από τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς $R$ και $a$, τότε η $C_n$ είναι υποομάδα της $D_n$ και $D_n = C_n \cup aC_n$. Δηλαδή, η $C_n$ έχει δείκτη 2 και συνεπώς είναι κανονική υποομάδα της $D_n$. Αυτό προκύπτει από την ισότητα $a \circ R^j \circ a \circ R^k = R^{k-j}$, που σημαίνει οτι κάθε στοιχείο της $D_n$ είναι της μορφής $R^m$ ή $a \circ R^m$ για κάποιο ακέραιο $0 \leq m < n$. Συμβολικά

$$D_n = \langle R, a | R^n = id, a^2 = id, a \circ R = R^{-1} \circ a \rangle.$$

Η $D_n$ λέγεται *διεδρική ομάδα* με $2n$ στοιχεία.

**Θεώρημα 2.4.3.** *Κάθε πεπερασμένη υποομάδα της ομάδας των ευκλείδειων ισομετριών $I(\mathbb{R}^2)$ είναι κυκλική ή διεδρική.*

*Απόδειξη.* Έστω $G$ μία πεπερασμένη υποομάδα της $I(\mathbb{R}^2)$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.4.2, η $G$ έχει κάποιο σταθερό σημείο $b \in \mathbb{R}^2$. Τότε

$$(T_{-b} \circ g \circ T_b)(0) = T_{-b}(g(b)) = T_{-b}(b) = 0$$

για κάθε $g \in G$. Δηλαδή, το $0 \in \mathbb{R}^2$ είναι σταθερό σημείο της συζυγούς υποομάδας $T_b^{-1} G T_b$. Αρκεί λοιπόν να θεωρήσουμε από την αρχή οτι $b = 0$, οπότε η $G$ είναι υποομάδα της ορθογώνιας ομάδας $O(2,\mathbb{R})$.

Αν $G \cap SO(2,\mathbb{R}) = \{id_{\mathbb{R}^2}\}$, τότε $G = \{id_{\mathbb{R}^2}\}$ ή $G = \{id_{\mathbb{R}^2}, \beta\}$ για κάποια ανάκλαση $\beta$.

Έστω οτι $G \cap SO(2,\mathbb{R}) \neq \{id_{\mathbb{R}^2}\}$, που σημαίνει οτι η $G$ περιέχει τουλάχιστον μία μη-ταυτοτική στροφή. Θέτουμε

$$\theta_0 = \min\{0 < \theta < 2\pi : R_\theta \in G\}.$$

Για κάθε $0 < \theta < 2\pi$ με $R_\theta \in G$ διαιρώντας με το $\theta_0$ υπάρχει μη-αρνητικός ακέραιος $k$ και $0 \leq r < \theta_0$ ώστε $\theta = k\theta_0 + r$. Τότε όμως

$$R_r = R_{\theta - k\theta_0} = R_\theta \circ (R_{\theta_0})^{-k} \in G$$

οπότε αναγκαστικά $r = 0$. Αυτό σημαίνει οτι το $G \cap SO(2,\mathbb{R})$ είναι πεπερασμένη κυκλική υποομάδα της $SO(2,\mathbb{R}) \cong S^1$.

Αν τέλος η $G$ περιέχει και κάποια ανάκλαση $\beta$, επιπλέον της στροφής $R_{\theta_0}$, τότε για κάθε ανάκλαση $\gamma \in G$ έχουμε $\beta \circ \gamma \in G \cap SO(2,\mathbb{R})$ και συνεπώς είναι δύναμη της $R_{\theta_0}$, ενώ προφανώς $\beta \circ R_{\theta_0} = R_{\theta_0}^{-1} \circ \beta$. Σε αυτή την περίπτωση λοιπόν η $G$ είναι διεδρική. □

## 2.5 Γεωδαισιακές

Έστω $(X,d)$ ένας μετρικός χώρος. Η ανοιχτή $d$-μπάλλα με κέντρο το σημείο $x \in X$ και ακτίνα $r > 0$ είναι το σύνολο $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$. Ένα σύνολο $U \subset X$ λέγεται $d$-ανοιχτό αν για κάθε $x \in U$ υπάρχει κάποιο $r > 0$ ώστε $B(x,r) \subset U$. Ένα σύνολο $F \subset X$ λέγεται κλειστό αν το $X \setminus F$ είναι ανοιχτό. Το σύνολο όλων των $d$-ανοιχτών υποσυνόλων του $X$ συνιστούν μία τοπολογία, που λέγεται η μετρική τοπολογία στο $X$ που ορίζεται από τη συνάρτηση απόστασης $d$. Ειδικά, η μετρική τοπολογία στον $\mathbb{R}^n$ που ορίζεται από την ευκλείδεια απόσταση λέγεται ευκλείδεια τοπολογία του $\mathbb{R}^n$.

Αν $(X,d)$ και $(Y,\rho)$ είναι δύο μετρικοί χώροι, μία απεικόνιση $f : X \to Y$ λέγεται συνεχής στο σημείο $x \in X$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ έτσι ώστε $f(B(x,\delta) \subset B(f(x),\epsilon)$. Η $f$ λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $X$ ή ισοδύναμα για κάθε ανοιχτό σύνολο $V \subset Y$ το $f^{-1}(V)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $X$.

Μία *παραμετρισμένη καμπύλη* στον μετρικό χώρο $(X,d)$ είναι μία συνεχής απεικόνιση $\gamma : I \to X$, όπου το $I \subset \mathbb{R}$ είναι ένα διάστημα. Το υποσύνολο $\gamma(I)$ του $X$ λέγεται *ίχνος* της $\gamma$. Ένα *γεωδαισιακό τόξο* στον $(X,d)$ είναι μία απεικόνιση $\gamma : [a,b] \to X$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, η οποία διατηρεί τις αποστάσεις, δηλαδή $d(\gamma(t),\gamma(s)) = |t-s|$ για κάθε $t$, $s \in [a,b]$. Ειδικά, $d(\gamma(a),\gamma(b)) = b-a$. Το ίχνος $\gamma([a,b])$ λέγεται *γεωδαισιακό τμήμα* από το σημείο $\gamma(a)$ στο σημείο $\gamma(b)$. Ας σημειωθεί οτι αν η $\gamma : [a,b] \to X$ είναι γεωδαισιακό τόξο, τότε για κάθε $c \in \mathbb{R}$ η $\beta : [c, c+b-a] \to X$ με $\beta(s) = \gamma(s+a-c)$ είναι επίσης γεωδαισιακό τόξο με εικόνα το ίδιο γεωδαισιακό τμήμα.

Είναι προφανές οτι αν $\gamma$ είναι ένα γεωδαισιακό τόξο στον μετρικό χώρο $(X,d)$, τότε για κάθε ισομετρία $f \in I_d(X)$ η παραμετρισμένη καμπύλη $f \circ \gamma$ είναι επίσης γεωδαισιακό τόξο στον $(X,d)$.

Τα γεωδαισιακά τμήματα στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ είναι ακριβώς τα ευθύγραμμα τμήματα, όπως δείχνει ο χαρακτηρισμός που ακολουθεί.

**Πρόταση 2.5.1.** *Έστω $a$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ και $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, μία παραμετρισμένη καμπύλη με $\gamma(a) \neq \gamma(b)$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

*(α) Η $\gamma$ είναι γεωδαισιακό τόξο.*
*(β) Η $\gamma$ δίνεται από τον τύπο*

$$\gamma(t) = \gamma(a) + (t-a)\frac{\gamma(b)-\gamma(a)}{\|\gamma(b)-\gamma(a)\|}.$$

*(γ) Η $\gamma$ είναι $C^\infty$ και η παράγωγός της $\gamma'$ είναι σταθερή με $\|\gamma'\| = 1$.*

*Απόδειξη.* Έστω οτι η $\gamma$ είναι γεωδαισιακό τόξο. Θέτουμε $\ell = b - a$ και θεωρούμε την παραμετρισμένη καμπύλη $\beta : [0, \ell] \to \mathbb{R}^n$ με

$$\beta(s) = \gamma(s + a) - \gamma(a).$$

Η $\beta$ είναι γεωδαισιακό τόξο με σημείο εκκίνησης το $\beta(0) = 0$, ενώ $\|\beta(s)\| = s$ για κάθε $s \in [0, \ell]$. Επειδή για κάθε $t$, $s \in [0, \ell]$ έχουμε

$$\|\beta(t) - \beta(s)\|^2 = |t - s|^2$$

προκύπτει οτι

$$\langle \beta(t), \beta(s)\rangle = ts = \|\beta(t)\| \cdot \|\beta(s)\|.$$

Συνεπώς, τα $\beta(t)$, $\beta(s)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, από το Λήμμα 2.1.1. Με άλλα λόγια υπάρχει $\lambda \geq 0$ (που εξαρτάται από τα $t$, $s$) ώστε $\beta(s) = \lambda\beta(t)$. Ειδικά, για κάθε $s \in [0, \ell]$ υπάρχει $\lambda \geq 0$ ώστε $\beta(s) = \lambda\beta(\ell)$. Έχουμε τώρα οτι $s = \|\beta(s)\| = \|\lambda\beta(\ell)\| = \lambda\ell$, από όπου προκύπτει οτι

$$\beta(s) = \frac{s}{\ell}\beta(\ell)$$

ή αντικαθιστώντας ισοδύναμα

$$\gamma(t) - \gamma(a) = \beta(t - a) = \frac{t-a}{\|\gamma(b)-\gamma(a)\|}(\gamma(b) - \gamma(a)).$$

Αυτό αποδεικνύει οτι το (α) συνεπάγεται το (β), ενώ είναι προφανές οτι το (β) συνεπάγεται το (γ).

Τέλος, αν ισχύει το (γ), ολοκληρώνοντας την $\gamma' = \gamma'(a)$ βρίσκουμε

$$\gamma(t) - \gamma(s) = (t - s)\gamma'(a)$$

για κάθε $t$, $s \in [a, b]$ και συνεπώς η $\gamma$ είναι γεωδαισιακό τόξο. □

Τα γεωδαισιακά τμήματα σε μετρικούς χώρους μπορούν να χαρακτηριστούν ως εξής.

**Θεώρημα 2.5.2.** *Έστω $(X, d)$ ένας μετρικός χώρος και $x$, $y$, $z \in X$. Έστω $S(x, y)$ ένα γεωδαισιακό τμήμα από το $x$ στο $y$ και $S(y, z)$ ένα γεωδαισιακό τμήμα από το $y$ στο $z$. Το $S(x, y) \cup S(y, z)$ είναι γεωδιασιακό τμήμα από το $x$ στο $z$ τότε και μόνο τότε όταν*

$$d(x, z) = d(x, y) + d(y, z).$$

*Απόδειξη.* Αν το σύνολο $S(x, y) \cup S(y, z)$ είναι γεωδαισιακό τμήμα, είναι προφανές οτι $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$.

Αντίστροφα, έστω οτι $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$. Υπάρχουν ένα γεωδαισιακό τόξο $\beta : [0, d(x,y)] \to S(x,y)$ με $\beta(0) = x$, $\beta(d(x,y)) = y$ και ένα γεωδαισιακό τόξο $\gamma : [d(x,y), d(x,z)] \to S(y,z)$ με $\gamma(d(x,y)) = y$, $\gamma(d(x,z)) = z$. Ορίζεται η αλληλοδιαδοχή $\sigma : [0, d(x,z)] \to S(x,y) \cup S(y,z)$ των $\beta$ και $\gamma$ με

$$\sigma(t) = \begin{cases} \beta(t), & \text{όταν } 0 \le t \le d(x,y), \\ \gamma(t), & \text{όταν } d(x,y) \le t \le d(x,z). \end{cases}$$

Έστω τώρα $0 \le s < t \le d(x,z)$. Αν $t \le d(x,y)$, έχουμε

$$d(\sigma(s), \sigma(t)) = d(\beta(s), \beta(t)) = t - s$$

και όμοια αν $d(x,y) \le s$, έχουμε

$$d(\sigma(s), \sigma(t)) = d(\gamma(s), \gamma(t)) = t - s.$$

Έστω οτι $s < d(x,y) < t$. Τότε

$$d(\sigma(s), \sigma(t)) \le d(\sigma(s), y) + d(y, \sigma(t))$$

$$= d(x,y) - s + t - d(x,y) = t - s,$$

ενώ από την άλλη μεριά

$$d(\sigma(s), \sigma(t)) \ge d(x,z) - d(x, \sigma(s)) - d(\sigma(t), z)$$

$$= d(x,z) - s - (d(x,z) - t) = t - s.$$

Αυτό δείχνει οτι $d(\sigma(s), \sigma(t)) = |s - t|$ για κάθε $s$, $t \in [0, d(x,z)]$ και συνεπώς το $S(x,y) \cup S(y,z)$ είναι γεωδαισιακό τμήμα. □

**Πόρισμα 2.5.3.** *Τρία διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $x$, $y$, $z \in \mathbb{R}^n$ είναι συνευθειακά, με το $y$ μεταξύ των $x$, $z$, τότε και μόνο τότε όταν*

$$\|x - z\| = \|x - y\| + \|y - z\|. \quad \square$$

**Ορισμός 2.5.4.** Εστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $\gamma : I \to X$ μία παραμετρισμένη καμπύλη στον μετρικό χώρο $(X, d)$. Η $\gamma$ λέγεται *γεωδαισιακή* αν τοπικά διατηρεί τις αποστάσεις ή με άλλα λόγια είναι τοπικά γεωδαισιακό τόξο, δηλαδή για κάθε $t_0 \in I$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ με $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset I$ ώστε $d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s - t|$ για κάθε $s$, $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Κάθε ισομετρία του $(X, d)$ μετασχηματίζει γεωδαισιακές σε γεωδαισιακές. Με άλλα λόγια οι γεωδαισιακές του $(X, d)$ είναι αναλλοίωτη κλάση παραμετρισμένων καμπύλων της γεωμετρίας (κατά Klein) $(I_d(X), X)$.

**Πρόταση 2.5.5.** *Μία παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ είναι γεωδαισιακή τότε και μόνο τότε όταν $\|\gamma(1) - \gamma(0)\| = 1$ και η $\gamma$ δίνεται από τον τύπο $\gamma(t) = t(\gamma(1) - \gamma(0)) + \gamma(0)$.*

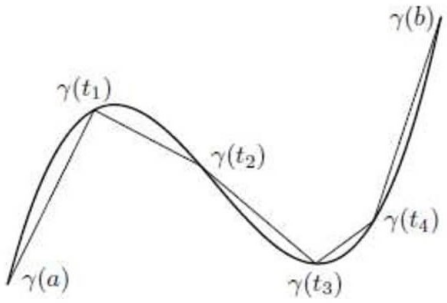
*Απόδειξη.* Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 2.5.1. □

Ένας μετρικός χώρος $(X, d)$ λέγεται *γεωδαισιακά πλήρης* αν κάθε γεωδαισιακό τόξο στον $X$ επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε μία γεωδαισιακή που ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Από τα προηγούμενα προκύπτει οτι ο ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι γεωδαισιακά πλήρης μετρικός χώρος. Ο $\mathbb{R}^n$ έχει και την επιπλέον ιδιότητα οτι από δύο οποιαδήποτε σημεία του διαφορετικά μεταξύ τους διέρχεται μία (μοναδική μάλιστα) γεωδαισιακή. Αυτό δεν ισχύει σε γενικούς μετρικούς χώρους, όπως για παράδειγμα στο $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ εφοδιασμένο με τον περιορισμό της ευκλείδειας απόστασης.

## 2.6 Μήκος καμπύλης

Έστω $(X, d)$ ένας μετρικός χώρος και $\gamma : [a, b] \to X$ μία παραμετρισμένη καμπύλη στον $X$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Για κάθε διαμέριση $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b\}$ του διαστήματος $[a, b]$ θέτουμε

$$L(P, \gamma) = \sum_{i=1}^{k} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})).$$




Αν $Q$ είναι μία δεύτερη διαμέριση του $[a, b]$ λεπτότερη της $P$, δηλαδή $P \subset Q$, τότε $L(P, \gamma) \leq L(Q, \gamma)$, από την τριγωνική ανισότητα.

Η παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : [a, b] \to X$ λέγεται *ευθυγραμμίσιμη* αν υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $L(P, \gamma) \leq c$ για κάθε διαμέριση $P$ του διαστήματος $[a, b]$. Σε αυτή την περίπτωση, ο μη-αρνητικός πραγματικός αριθμός

$$L(\gamma) = \sup\{L(P, \gamma) : P \quad \text{διαμέριση του} \quad [a, b]\}$$

λέγεται *μήκος* της $\gamma$. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε $d(x, y) \leq L(\gamma)$ για κάθε ευθυγραμμίσιμη παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : [a, b] \to X$ με $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$.

**Παραδείγματα 2.6.1.** (α) Αν η $\gamma : [a, b] \to X$ είναι γεωδαισιακό τόξο, τότε

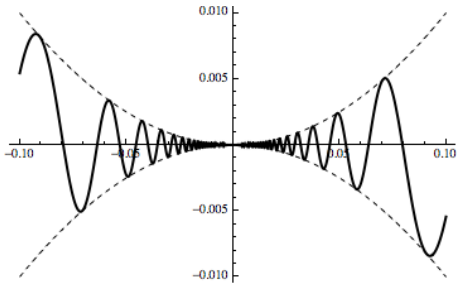
$$L(P, \gamma) = \sum_{i=1}^{k} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) = b - a$$

για κάθε διαμέριση $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b\}$ του $[a, b]$. Συνεπώς, ένα γεωδαισιακό τόξο είναι πάντα ευθυγραμμίσιμη καμπύλη.
(β) Έστω $\gamma : [a, b] \to X$ μία παραμετρισμένη καμπύλη, όπου $a$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ και $a < c < b$. Η $\gamma$ είναι ευθυγραμμίσιμη τότε και μόνο τότε όταν οι $\gamma|_{[a,c]}$, $\gamma|_{[c,b]}$ είναι ευθυγραμμίσιμες. Σε αυτή την περίπτωση $L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\gamma|_{[c,b]})$.

Μία παραμετρισμένη καμπύλη ενδέχεται να μην ευθυγραμμίσιμη.

**Παραδείγματα 2.6.2.** (α) Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$f(t) = \begin{cases} t^2 \sin \dfrac{1}{t}, & \text{όταν } t \neq 0, \\ 0, & \text{όταν } t = 0. \end{cases}$$




Η $f$ είναι προφανώς συνεχής και παντού διαφορίσιμη. Μάλιστα,

$$f'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0} t \sin \frac{1}{t} = 0,$$

ενώ για $t \neq 0$ έχουμε

$$f'(t) = 2t \sin \frac{1}{t} - \cos \frac{1}{t}.$$

Συνεπώς, η $f'$ δεν είναι συνεχής στο 0, δηλαδή η $f$ δεν είναι $C^1$, αφού το $\lim_{t \to 0} f'(t)$ δεν υπάρχει. Απ΄ την άλλη μεριά όμως,

$$|f'(t)| \leq 2|t| + 1$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και συνεπώς $|f'(t)| \leq 3$ για $0 \leq t \leq 1$.

Εστω $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ η παραμετρισμένη καμπύλη με $\gamma(t) = (t, f(t))$ που έχει ίχνος το γράφημα του περιορισμού της $f$ στο διάστημα $[0, 1]$. Για κάθε διαμέριση

$$P = \{0 = t_t < t_1 < \cdots < t_k = 1\}$$

του διαστήματος $[0, 1]$ έχουμε

$$L(P, \gamma) = \sum_{i=1}^{k} \left[ (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 + (t_i - t_{i-1})^2 \right]^{1/2}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} \left[9(t_i - t_{i-1})^2 + (t_i - t_{i-1})^2\right]^{1/2} = \sqrt{10},$$

από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής. Συνεπώς, η $\gamma$ είναι ευθυγραμμίσιμη και $L(\gamma) \leq \sqrt{10}$.

(β) Εστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$f(t) = \begin{cases} t\cos\dfrac{\pi}{2t}, & \text{όταν } 0 < t \leq 1, \\ 0, & \text{όταν } t = 0. \end{cases}$$

Η $f$ είναι προφανώς συνεχής. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη διαμέριση

$$P_n = \{0 < \frac{1}{4n} < \frac{1}{4n-1} < \frac{1}{4n-2} < \frac{1}{4n-3} < \frac{1}{4(n-1)} < \cdots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1\}.$$

Για κάθε ακέραιο $1 \leq k \leq n$ έχουμε

$$f(\frac{1}{4k}) = \frac{1}{4k}, \quad f(\frac{1}{4k-1}) = 0, \quad f(\frac{1}{4k-2}) = -\frac{1}{4k-2}, \quad f(\frac{1}{4k-3}) = 0.$$

Αν $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ είναι η παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma(t) = (t, f(t))$, τότε

$$L(P_n, \gamma) \geq \left|\frac{1}{4n} - 0\right| + \left|0 - \frac{1}{4n}\right| + \left|-\frac{1}{4n-2} - 0\right| + \left|0 + \frac{1}{4n-2}\right| + \cdots + \left|0 + \frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{1}{2} - 0\right|$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Από αυτό προκύπτει οτι $\lim_{n\to+\infty} L(P_n, \gamma) = +\infty$ και συνεπώς η $\gamma$ δεν είναι ευθυγραμμίσιμη.

**Θεώρημα 2.6.3.** *Εστω $a$, $b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Κάθε $C^1$ παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ είναι ευθυγραμμίσιμη και το μήκος της είναι*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστούμε ένα λήμμα. Θα χρησιμοποιήσουμε τον προσωρινό συμβολισμό

$$\int_a^b \phi(t)dt = \left(\int_a^b \phi_1(t)dt, ..., \int_a^b \phi_n(t)dt\right),$$

όταν $\phi = (\phi_1, ..., \phi_n)$.

**Λήμμα 2.6.4.** *Αν $a$, $b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ είναι μία συνεχής απεικόνιση, τότε*

$$\left\|\int_a^b \phi(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|\phi(t)\| dt.$$

*Απόδειξη.* Εστω οτι $\phi = (\phi_1, ..., \phi_n)$. Θέτουμε $x = (x_1, ..., x_n)$, όπου

$$x_i = \int_a^b \phi_i(t)dt, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Αν $x = 0$, το συμπέρασμα είναι τετριμένο. Έστω λοιπόν οτι $x \neq 0$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\|x\|^2 = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n x_i\phi_i(t)\right)dt \leq \int_a^b \|x\| \cdot \|\phi(t)\|dt,$$

από όπου το συμπέρασμα προκύπτει αμέσως. □

*Απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.3.* Για κάθε διαμέριση $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b\}$ του διαστήματος $[a, b]$ έχουμε

$$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t)dt\right\| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\|dt,$$

από το Λήμμα 2.6.4. Συνεπώς,

$$L(P, \gamma) \leq \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\|dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt.$$

Αυτό δείχνει οτι η $\gamma$ είναι ευθυγραμμίσιμη και

$$L(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt.$$

Για την απόδειξη της ισότητας θεωρούμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Επειδή η $\gamma$ υποτίθεται $C^1$, η $\gamma'$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\|\gamma'(t) - \gamma'(s)\| < \epsilon$, για κάθε $t$, $s \in [a, b]$ με $|t - s| < \delta$. Υπάρχει μία διαμέριση $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b\}$ του διαστήματος $[a, b]$ τέτοια ώστε $t_i - t_{i-1} < \delta$ για όλα τα $i = 1, 2, ..., k$. Αν τώρα $t_{i-1} \leq t \leq t_i$, έχουμε $\|\gamma'(t)\| < \|\gamma'(t_i)\| + \epsilon$ και συνεπώς

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma(t)\|dt < (\|\gamma'(t_i)\|+\epsilon)(t_i-t_{i-1}) = \left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i} [\gamma'(t) + \gamma'(t_i) - \gamma'(t)]dt\right\|+\epsilon(t_i-t_{i-1})$$

$$\leq \left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t)dt\right\| + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t_i) - \gamma'(t)\|dt + \epsilon(t_i - t_{i-1})$$

$$\leq \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + 2\epsilon(t_i - t_{i-1}).$$

Προσθέτοντας, προκύπτει οτι

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\|dt < L(P, \gamma) + 2\epsilon(b - a) \leq L(\gamma) + 2\epsilon(b - a)$$

για κάθε $\epsilon > 0$. Αυτό δείχνει οτι

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\|dt \leq L(\gamma)$$

και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

**Πόρισμα 2.6.5.** *Εστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Κάθε κατά τμήματα $C^1$ παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ είναι ευθυγραμμίσιμη και το μήκος της είναι*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt. \quad \square$$

**Παραδείγματα 2.6.6.** (α) Εστω $a$, $b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μία $C^1$ συνάρτηση. Αν $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ είναι η παραμέτριση του γραφήματος της $f$ με $\gamma(t) = (t, f(t))$, τότε η $\gamma$ είναι ευθυγραμμίσιμη με μήκος

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}dt.$$

(β) Η έλλειψη στο ευκλείδειο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ με κέντρο το $(0, 0)$ και ημιάξονες $0 < b < a$ είναι το ίχνος της $C^\infty$ παραμετρισμένης καμπύλης $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ με

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t).$$

Αν $\epsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ (η ποσότητα αυτή είναι γνωστή ως εκκεντρότητα της έλλειψης), τότε το μήκος της $\gamma$ δίνεται από τον τύπο

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t}dt.$$

Επειδή, $0 < \epsilon < 1$, το ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται και λέγεται ελλειπτικό.

Έστω $x$, $y \in \mathbb{R}^n$, με $x \neq y$. Το ευθύγραμμο τμήμα από το $x$ στο $y$ είναι το ίχνος της παραμετρισμένης καμπύλης $\sigma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ με $\sigma(t) = (1 - t)x + ty$ που είναι ευκλείδειο γεωδαισιακό τόξο και έχει μήκος $L(\sigma) = \|x - y\|$. Δηλαδή η $\sigma$ είναι η ευθυγραμμίσιμη παραμετρισμένη καμπύλη από το $x$ στο $y$ με το ελάχιστο μήκος. Θα δείξουμε με ένα δεύτερο τρόπο χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.6.3 οτι αυτή είναι καμπύλη με το ελάχιστο μήκος ανάμεσα σε όλες τις (κατά τμήματα) $C^1$ παραμετρισμένες καμπύλες που συνδέουν το σημείο $x$ με το σημείο $y$. Εστω $a$, $b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ μία ποιαδήποτε $C^1$ παραμετρισμένη καμπύλη με $\gamma(a) = x$ και $\gamma(b) = y$. Επειδή $x \neq y$, υπάρχει $a \leq T < b$ τέτοιο ώστε $\gamma(T) = x$ και $\gamma(t) \neq x$ για κάθε $T < t \leq b$, λόγω της συνέχειας. Αφού $L(\gamma) \geq L(\gamma|_{[T,b]})$, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε από την αρχή οτι $\gamma(t) \neq x$ για κάθε $a < t \leq b$. Για $a < t \leq b$ θέτουμε $f(t) = \|\gamma(t) - x\|$ και

$$u(t) = \frac{1}{\|\gamma(t) - x\|} \cdot (\gamma(t) - x),$$

οπότε $\|u(t)\|^2 = 1$ και $\gamma(t) = x + f(t)u(t)$. Παραγωγίζοντας έχουμε

$$\gamma'(t) = f'(t)u(t) + f(t)u'(t)$$

και τα $u(t)$, $u'(t)$ είναι κάθετα για κάθε $a < t < b$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα,

$$\|\gamma'(t)\|^2 = (f'(t))^2 + (f(t))^2\|u'(t)\|^2 \geq (f'(t))^2$$

για κάθε $a < t < b$. Συνεπώς,

$$L(\gamma) \geq \int_a^b |f'(t)|dt \geq \left|\int_a^b f'(t)dt\right| = |f(b) = f(a)| = \|y - x\|.$$

Τα προηγούμενα οδηγούν στην έννοια της εσωτερικής απόστασης. Συγκεκριμένα, έστω $(X, d)$ ένας μετρικός χώρος. Η συνάρτηση απόστασης $d$ λέγεται *εσωτερική*, όταν

$$d(x, y) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ ευθυγραμμίσιμη καμπύλη από το } x \text{ στο } y\}$$

για κάθε $x$, $y \in X$. Με αυτή την ορολογία λοιπόν η ευκλείδεια απόσταση στον $\mathbb{R}^n$ είναι εσωτερική.

## 2.7 Ασκήσεις

1. Αν $E$ είναι το υπερεπίπεδο στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ που περιέχει το σημείο $p \in \mathbb{R}^n$ και είναι κάθετο στο μη-μηδενικό διάνυσμα $N \in \mathbb{R}^n$, όπου $\|N\| = 1$, να αποδειχθεί οτι

$$a_E \circ a_{-\frac{1}{2}N+E} = a_{\frac{1}{2}N+E} \circ a_E = T_N.$$

2. Έστω $N_j \in \mathbb{R}^n$ με $\|N_j\| = 1$, $p_j \in \mathbb{R}^n$ και $E_j$ το υπερεπίπεδο στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ που περιέχει το σημείο $p_j \in \mathbb{R}^n$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $N_j$, $j = 1, 2$. Αν τα $N_1$, $N_2$ είναι κάθετα, να αποδειχθεί οτι οι ανακλάσεις $a_{E_1}$, $a_{E_2}$ μετατίθενται.

3. Για κάθε $f \in I(\mathbb{R}^n)$ υπάρχουν μοναδικά $A \in O(n, \mathbb{R})$ και $b \in \mathbb{R}^n$ ώστε $f = T_b \circ A$. Να αποδειχθεί οτι η απεικόνιση $h : I(\mathbb{R}^n) \to O(n, \mathbb{R})$ με $h(f) = A$ είναι ομομορφισμός ομάδων.

4. Να αποδειχθεί οτι η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

είναι ανάκλαση ως προς μία ευθεία. Ποιά είναι αυτή η ευθεία;

5. Αν $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ και $0 < \theta < 2\pi$, να δειχθεί οτι η ευκλείδεια ισομετρία $T_b \circ R_\theta$ είναι η γεωμετρική στροφή του ευκλείδειου επιπέδου κατα γωνία $\theta$ με κέντρο στροφής το σημείο $(a_1, a_2)$, όπου

$$a_1 = \frac{1}{2}b_1 - \frac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}b_2, \quad a_2 = \frac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}b_1 + \frac{1}{2}b_2.$$

6. Έστω $G$ μία μη-τετριμένη ομάδα ισομετριών του ευκλείδειου επιπέδου $\mathbb{R}^2$ που διατηρούν τον προσανατολισμό. Αν η $G$ δεν περιέχει καμία μη-τεριμένη μεταφορά, να αποδειχθεί η $G$ είναι αβελιανή, υπάρχει $a \in \mathbb{R}^2$ ώστε $g(a) = a$ για κάθε $g \in G$ και τα στοιχεία της $G$ είναι γεωμετρικές στροφές με κοινό κέντρο στροφής το σημείο $a$.

7. Αν ο $n \geq 3$ είναι περιττός ακέραιος, να αποδειχθεί οτι για κάθε $A \in SO(n, \mathbb{R})$ υπάρχει τουλάχιστον ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $A(v) = v$.

8. Έστω $f \in I(\mathbb{R}^n)$ για την οποία υπάρχει $c > 0$ ώστε $d(f(x), x) \leq c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Να αποδειχθεί οτι η $f$ είναι μεταφορά.

9. Να αποδειχθεί οτι δύο οποιεσδήποτε ανακλάσεις του $\mathbb{R}^n$ είναι συζυγή στοιχεία της $I(\mathbb{R}^n)$.

10. Αν οι $f$, $g \in I(\mathbb{R}^2)$ διατηρούν τον προσανατολισμό, να αποδειχθεί οτι η $f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1}$ είναι μεταφορά.

11. Να αποδειχθεί οτι η ομάδα $I^+(\mathbb{R}^2)$ των ευκλείδειων ισομετριών του $\mathbb{R}^2$ που διατηρούν τον προσανατολισμό είναι ισόμορφη με την ομάδα μιγαδικών πινάκων

$$\left\{ \begin{pmatrix} w & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} : w, z \in \mathbb{C}, \quad |w| = 1 \right\}.$$

12. Να αποδειχθεί οτι η ομάδα των ευκλείδειων ισομετριών $I(\mathbb{R}^n)$ του $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, είναι ισόμορφη με μία υποομάδα της $GL(n+1, \mathbb{R})$.

13. Να αποδειχθεί οτι η ομάδα $SO(3, \mathbb{R})$ των περιστροφών του $\mathbb{R}^3$ έχει τετριμένο κέντρο.

14. Να αποδειχθεί οτι η αντιποδική απεικόνιση $-id_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, δεν είναι η σύνθεση $k$ ανακλάσεων για $1 \leq k \leq n-1$.

15. Αν η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ διατηρεί τις αποστάσεις, δηλαδή έχει την ιδιότητα $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ για κάθε $x$, $y \in \mathbb{R}^n$, να αποδειχθεί οτι η $f$ είναι επί και συνεπώς είναι ευκλείδεια ισομετρία.

16. Έστω $(X, d)$ ένας μετρικός χώρος και $x$, $y \in X$, με $x \neq y$. Έστω $\gamma : [a, b] \to X$ μία ευθυγραμμίσιμη παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma(a) = x$ και $\gamma(b) = y$. Υποθέτουμε οτι $d(x, y) = L(\gamma)$.
(α) Να αποδειχθεί οτι $d(x, \gamma(t)) = L(\gamma|_{[a,t]})$ για κάθε $a \leq t \leq b$.
(β) Να αποδειχθεί οτι $d(\gamma(t), \gamma(s)) = d(x, \gamma(t)) - d(x, \gamma(s))$ για κάθε $0 \leq s < t \leq b$.
(γ) Να αποδειχθεί οτι η συνάρτηση $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $h(t) = d(x, \gamma(t))$ είναι συνεχής, αύξουσα και υπάρχει ένα καλά ορισμένο γεωδαισιακό τόξο $\beta : [0, d(x, y)] \to X$ ώστε $\beta \circ h = \gamma$.
(δ) Να αποδειχθεί οτι το ίχνος της $\gamma$ είναι γεωδαισιακό τμήμα.

17. Να αποδειχθεί οτι η παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ με $\gamma(t) = (t, f(t))$, όπου η συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ορίζεται από τον τύπο

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } t = 0, \\ t \sin \dfrac{1}{t}, & \text{όταν } t \neq 0, \end{cases}$$

δεν είναι ευθυγραμμίσιμη.

18. Έστω $f : [0,1] \to [0,1]$ μία συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 0$ για την οποία υπάρχει μία γνήσια αύξουσα ακολουθία $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο διάστημα $(0,1]$ τέτοια ώστε $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 1$ και

$$f(t_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί οτι η παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ με $\gamma(t) = (t, f(t))$ δεν είναι ευθυγραμμίσιμη.

19. Μία ένα-προς-ένα και επί απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ λέγεται ομοιότητα με λόγο $k > 0$ όταν

$$\|f(x) - f(y)\| = k\|x - y\|$$

για κάθε $x,\ y \in \mathbb{R}^n$. Να αποδειχθεί οτι τότε υπάρχουν μοναδικός $A \in O(n, \mathbb{R})$ και $b \in \mathbb{R}^n$ ώστε $f(x) = kAx + kb$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

20. Έστω $f \in Aff(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, και $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ με $x \neq y$. Αν $0 < t < 1$ και $z = (1-t)x + ty$ να αποδειχθεί οτι

$$\frac{d(x,z)}{d(x,y)} = \frac{d(f(x), f(z))}{d(f(y), f(z))}.$$

21. (α) Έστω $(X,d)$ ένας μετρικός χώρος, $a,\ b \in \mathbb{R}$, $a < b$ και $\gamma_n : [a,b] \to X$, $n \in \mathbb{N}$, μία ακολουθία ευθυγραμμίσιμων παραμετρισμένων καμπύλων. Αν $\gamma : [a,b] \to X$ είναι μία ευθυγραμμίσιμη παραμετρισμένη καμπύλη ώστε $\gamma(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n(t)$ για κάθε $a \leq t \leq b$, να αποδειχθεί οτι $L(\gamma) \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} L(\gamma_n)$.

(β) Αν η $\gamma_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ ορίζεται από τον τύπο $\gamma_n(t) = (t, \dfrac{1}{n}\cos(n^2 t))$, τότε $\gamma(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n(t)$ για κάθε $0 \leq t \leq \pi$, όπου $\gamma(t) = (t, 0)$ και $L(\gamma) = \pi$, αλλά $\lim\limits_{n\to+\infty} L(\gamma_n) = +\infty$.

# Κεφάλαιο 3

# Σφαιρική Γεωμετρία

## 3.1 Το εξωτερικό γινόμενο στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$

Για κάθε ακέραιο $n \geq 0$ η $n$-σφαίρα με ακτίνα $R > 0$ και κέντρο $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ είναι το υποσύνολο

$$S_R^n(a) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x - a\| = R\}$$

ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^{n+1}$. Είναι προφανές οτι δύο οποιεσδήποτε $n$-σφαίρες είναι ισοδύναμα σχήματα στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^{n+1}$ τότε και μόνο τότε όταν έχουν την ίδια ακτίνα. Επίσης $S_R^n(0) = g_R(S_1^n(0))$, όπου $g_R : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ είναι η ομοιότητα $g_R(x) = Rx$, $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Η μοναδιαία $n$-σφαίρα $S_1^n(0)$ συμβολίζεται για απλότητα με $S^n$, δηλαδή

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

και θα είναι το μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουμε για την $n$-διάστατη Σφαιρική Γεωμετρία. Ας σημειωθεί οτι $S^0 = \{-1, 1\}$, ενώ $S^1$ είναι ο συνήθης μοναδιαίος κύκλος στο ευκλείδειο επίπεδο.

Η $n$-σφαίρα $S^n$, κληρονομεί ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$ την περιορισμένη ευκλείδεια απόσταση $d(x, y) = \|x - y\|$, η οποία λέγεται χορδική απόσταση στην $S^n$. Όπως θα δούμε αργότερα, η χορδική απόσταση δεν είναι εσωτερική. Στην επόμενη παράγραφο του παρόντος κεφαλαίου θα ορίσουμε μία εσωτερική απόσταση στην $S^n$, που είναι τοπολογικά ισοδύναμη με την χορδική.

Για την περιγραφή της Σφαιρικής Γεωμετρίας θα χρειαστούμε βασικές ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$, που θα υπενθυμίσουμε στην παρούσα παράγραφο.

Δύο διατεταγμένες βάσεις του $\mathbb{R}^n$ λέμε οτι ορίζουν τον ίδιο προσανατολισμό αν ο πίνακας αλλαγής βάσης από την μία στην άλλη έχει θετική ορίζουσα. Αυτή είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο όλων των διατεταγμένων βάσεων του $\mathbb{R}^n$ με ακριβώς δύο κλάσεις ισοδυναμίας. Κάθε μία από αυτές τις δύο κλάσεις ισοδυναμίας λέγεται ένας *προσανατολισμός* του $\mathbb{R}^n$. Συμβατικά, ο προσανατολισμός με αντιπρόσωπο την διατεταγμένη κανονική βάση $[e_1, e_2, ..., e_n]$ λέγεται ο *θετικός προσανατολισμός* του $\mathbb{R}^n$.

Εστω $u$, $v \in \mathbb{R}^3$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^3$ συμβολίζουμε με $(u, v, x)$ τον πίνακα με στήλες τα διανύσματα $u$, $v$ και $x$, με αυτή τη διάταξη. Η απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με

$$\phi(x) = \det(u, v, x)$$

είναι γραμμική. Συνεπώς, υπάρχει ένα μοναδικό διάνυσμα, που συμβολίζουμε με $u \times v$, τέτοιο ώστε

$$\det(u, v, x) = \langle u \times v, x \rangle$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^3$. Το διάνυσμα $u \times v$ λέγεται *εξωτερικό γινόμενο* του $u$ με το $v$.

Αν $u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$ και $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$, τότε

$$\langle u \times v, e_1 \rangle = \det(u, v, e_1) = u_2v_3 - u_3v_2,$$

$$\langle u \times v, e_2 \rangle = \det(u, v, e_2) = u_3v_1 - u_1v_3,$$

$$\langle u \times v, e_3 \rangle = \det(u, v, e_3) = u_1v_2 - u_2v_1,$$

δηλαδή

$$u \times v = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}.$$

Από τις ιδιότητες των οριζουσών και την τελευταία παράσταση του εξωτερικού γινομένου με συντετεγμένες, προκύπτουν αμέσως οι παρακάτω ιδιότητες:
(α) Το εξωτερικό γινόμενο είναι αντισυμμετρικό, δηλαδή $u \times v = -v \times u$.
(β) Το εξωτερικό γινόμενο είναι διγραμμικό, δηλαδή το $u \times v$ εξαρτάται γραμμικά από το $u$ και από το $v$ ξεχωριστά.
(γ) $u \times v = 0$ τότε και μόνον τότε όταν τα $u$, $v$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.
(δ) Το $u \times v$ είναι κάθετο στα $u$ και $v$.
(ε) Αν τα $u$ και $v$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε

$$\det(u, v, u \times v) = \|u \times v\|^2 > 0$$

και συνεπώς η διατεταγμένη βάση $[u, v, u \times v]$ του $\mathbb{R}^3$ είναι θετικά προσανατολισμένη.
(στ) $(u \times v) \times w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u$ για κάθε $u$, $v$, $w \in \mathbb{R}^3$.
(ζ)

$$\langle u \times v, w \times z \rangle = \begin{vmatrix} \langle u, w \rangle & \langle v, w \rangle \\ \langle u, z \rangle & \langle v, z \rangle \end{vmatrix}$$

για κάθε $u$, $v$, $w$, $z \in \mathbb{R}^3$. Ειδικά,

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2.$$

Με άλλα λόγια το μήκος $\|u \times v\|$ είναι ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα $u$, $v$.
(η) Από την ιδιότητα (στ) και τη συμμετρικότητα του εσωτερικού γινομένου προκύπτει αμέσως οτι το εξωτερικό γινόμενο ικανοποιεί τη ταυτότητα του Jacobi, δηλαδή

$$(u \times v) \times w + (v \times w) \times u + (w \times u) \times v = 0$$

για κάθε $u$, $v$, $w \in \mathbb{R}^3$. Ετσι το εξωτερικό γινόμενο στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ είναι μία αντισυμμετρική διγραμμική απεικόνιση, που ικανοποιεί τη ταυτότητα του Jacobi. Το ζεύγος $(\mathbb{R}^3, \times)$ είναι ένα από τα σημαντικότερα παραδείγματα άλγεβρας Lie, γιατί είναι ισόμορφη με την άλγεβρα Lie της ομάδας Lie $SO(3, \mathbb{R})$.

**Πρόταση 3.1.1.** *Αν $A \in O(3,\mathbb{R})$, τότε*

$$A(u) \times A(v) = (\det A) \cdot A(u \times v)$$

*για κάθε $u$, $v \in \mathbb{R}^3$.*

*Απόδειξη.* Για κάθε $x \in \mathbb{R}^3$ έχουμε

$$\langle A(u) \times A(v), A(x)\rangle = \det(A(u), A(v), A(x)) = (\det A) \cdot \det(u, v, x)$$

$$= (\det A) \cdot \langle u \times v, x\rangle = (\det A) \cdot \langle A(u \times v), A(x)\rangle,$$

αφού η $A$ είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός. Επειδή η $A$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, ειδικά λοιπόν επιμορφισμός, προκύπτει από αυτό οτι το διάνυσμα

$$A(u) \times A(v) - (\det A) \cdot A(u \times v)$$

είναι κάθετο σε όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$, από όπου το συμπέρασμα. □

## 3.2 Η σφαιρική απόσταση

Αν $x$, $y \in S^n$ και $0 \leq \theta(x,y) \leq \pi$ είναι η γωνία των διανυσμάτων $x$, $y$ του $\mathbb{R}^{n+1}$, ο μη-αρνητικός πραγματικός αριθμός

$$d_S(x,y) = \theta(x,y) = \arccos\langle x, y\rangle$$

λέγεται *σφαιρική απόσταση* των $x$, $y$.

Είναι φανερό από τον ορισμό οτι αν $A \in O(n+1,\mathbb{R})$, τότε $A(S^n) = S^n$ και $d_S(A(x), A(y)) = d_S(x,y)$ για κάθε $x$, $y \in S^n$. Είναι προφανές επίσης οτι $d_S(x,y) = 0$ τότε και μόνο τότε όταν $x = y$ και $d_S(x,y) = d_S(y,x)$.

**Λήμμα 3.2.1.** *Η $d_S : S^n \times S^n \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση απόστασης.*

*Απόδειξη.* Η μόνη ιδιότητα που χρειάζεται απόδειξη είναι η τριγωνική ανισότητα $d_S(x,z) \leq d_S(x,y) + d_S(y,z)$ για κάθε $x$, $y$, $z \in S^n$. Τρία σημεία $x$, $y$, $z \in S^n$ παράγουν έναν διανυσματικό υπόχωρο $V$ του $\mathbb{R}^{n+1}$ με διάσταση το πολύ 3. Από το Παράδειγμα 2.2.8, υπάρχει $A \in O(n+1,\mathbb{R})$ ώστε ο $A(V)$ να περιέχεται στον διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^{n+1}$ που παράγεται από το $\{e_1, e_2, e_3\}$. Αφού η $d_S$ είναι αναλλοίωτη από την $A$, αυτό σημαίνει οτι αρκεί να αποδείξουμε την τριγωνική ανισότητα στην περίπτωση που $x$, $y$, $z \in S^n \cap (\mathbb{R}^3 \times \{0\}) = S^2$, δηλαδή για $n = 2$.

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{vmatrix} \langle x,y\rangle & \langle z,y\rangle \\ \langle x,z\rangle & \langle z,z\rangle \end{vmatrix}^2 = \langle x \times z, y \times z\rangle^2 \leq \|x \times z\|^2 \cdot \|y \times z\|^2$$

ή ισοδύναμα

$$|\cos d_S(x,y) - \cos d_S(x,z) \cdot \cos d_S(y,z)| \leq \sin d_S(x,z) \cdot \sin d_S(y,z),$$

οπότε

$$\cos d_S(x,y) \leq \cos\Big(d_S(x,z) - d_S(y,z)\Big).$$

Επειδή το συνημίτονο είναι γνήσια φθίνουσα συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[0,\pi]$, αν $0 \leq d_S(x,z) - d_S(y,z) \leq \pi$, θα προκύψει οτι $d_S(x,y) \geq d_S(x,z) - d_S(y,z)$. Όμως, ασφαλώς $d_S(x,z) \leq \pi \leq \pi + d_S(y,z)$, ενώ αν $d_S(x,z) - d_S(y,z) < 0$, τότε η τριγωνική ανισότητα $d_S(x,z) < d_S(y,z) \leq d_S(x,y) + d_S(y,z)$ ισχύει έτσι και αλλιώς. □

Ας σημειωθεί ιδιαίτερα οτι $0 \leq d_S(x,y) \leq \pi$ για κάθε $x,\ y \in S^n$ και $d_S(x,y) = \pi$ ακριβώς τότε όταν $y = -x$, ενώ $d_S(x,y) = \dfrac{\pi}{2}$ τότε και μόνο τότε όταν τα διανύσματα $x,\ y$ στον $\mathbb{R}^{n+1}$ είναι κάθετα. Η $a : S^n \to S^n$ με $a(x) = -x$ λέγεται αντιποδική απεικόνιση.

Η σφαιρική και η χορδική απόσταση στην $S^n$ ικανοποιούν την ισότητα

$$\cos d_S(x,y) = \langle x,y\rangle = 1 - \frac{1}{2}\|x-y\|^2 = 1 - \frac{1}{2}d(x,y)^2$$

από την οποία συμπεραίνουμε οτι μία ένα-προς-ένα και επί απεικόνιση $f : S^n \to S^n$ είναι $d_S$-ισομετρία τότε και μόνο τότε όταν είναι $d$-ισομετρία. Θα συμβολίζουμε με $I(S^n)$ την ομάδα των $d_S$-ισομετριών της $n$-σφαίρας $S^n$. Προφανώς η $I(S^n)$ περιέχει την ορθογώνια ομάδα $O(n+1,\mathbb{R})$. Στην πραγματικότητα ισχύει το ακόλουθο.

**Θεώρημα 3.2.2.** *Η ομάδα ισομετριών $I(S^n)$ της $n$-σφαίρας $S^n$ είναι η ορθογώνια ομάδα $O(n+1,\mathbb{R})$.*

*Απόδειξη.* Έστω $f \in I(S^n)$. Τότε

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \cos d_S(f(x),f(y)) = \cos d_S(x,y) = \langle x,y\rangle$$

για κάθε $x,\ y \in S^n$. Συνεπώς το σύνολο $\{f(e_1),...,f(e_{n+1})\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{n+1}$. Υπάρχει τώρα μία μοναδική $A \in O(n+1,\mathbb{R})$ ώστε $A(e_i) = f(e_i)$ για κάθε $1 \leq i \leq n+1$. Αρκεί να δείξουμε τώρα οτι $A|_{S^n} = f$. Πράγματι, για κάθε $x \in S^n$ έχουμε

$$x = \sum_{k=1}^{n+1} \langle x, e_k\rangle e_k$$

οπότε

$$A(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \langle x,e_k\rangle A(e_k) = \sum_{k=1}^{n+1} \langle f(x), f(e_k)\rangle f(e_k) = f(x). \quad \square$$

Για κάθε $N \in S^n$ η ανάκλαση $a_E$ ως προς τον $n$-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο $E$ του $\mathbb{R}^{n+1}$ που είναι κάθετος στο διάνυσμα $N$ δίνεται από τον τύπο

$$a_E(x) = x - 2\langle x, N\rangle N$$

και συνεπώς $a_E(S^n) = S^n$, οπότε $a|_{S^n} \in I(S^n)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.7 των E. Cartan και J. Dieudonné κάθε ισομετρία της $n$-σφαίρας $S^n$ είναι η σύνθεση το πολύ $n+1$ τέτοιων ανακλάσεων.

**Λήμμα 3.2.3.** *Υπάρχει $c > 0$ ώστε $d(x, y) \leq d_S(x, y) \leq cd(x, y)$ για κάθε $x, y \in S^n$.*

*Απόδειξη.* Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}$$

ή ισοδύναμα

$$t^2 - \frac{t^4}{12} \leq 2(1 - \cos t) \leq t^2.$$

Αντικαθιστώντας την τιμή $t = d_S(x, y)$, οπότε $2(1-\cos d_S(x, y)) = d(x, y)^2$, προκύπτει οτι

$$d(x, y) \leq d_S(x, y) \leq \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{d_S(x,y)^2}{12}}} \cdot d(x, y) \leq \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{12}}} \cdot d(x, y),$$

αφού $0 \leq d_S(x, y) \leq \pi$. □

Από το Λήμμα 3.2.3 προκύπτει οτι η σφαιρική και η χορδική απόσταση ορίζουν τα ίδια ανοιχτά σύνολα στην $S^n$, δηλαδή ορίζουν την συνηθισμένη τοπολογία της $S^n$.

**Πρόταση 3.2.4.** *Μία παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma$ στην $n$-σφαίρα $S^n$ είναι ευθυγραμμίσιμη ως προς τη σφαιρική απόσταση $d_S$ τότε και μόνο τότε όταν είναι ευθυγραμμίσιμη ως προς τη χορδική απόσταση $d$. Αν $L_{d_S}(\gamma)$ είναι το μήκος της $\gamma$ ως προς τη σφαιρική απόσταση και $L_d(\gamma)$ το μήκος της ως προς τη χορδική απόσταση, τότε $L_{d_S}(\gamma) = L_d(\gamma)$.*

*Απόδειξη.* Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ και $\gamma : [a, b] \to S^n$ μία παραμετρισμένη καμπύλη. Από το προηγούμενο Λήμμα 3.2.3 προκύπτει οτι

$$L_d(P, \gamma) \leq L_{d_S}(P, \gamma) \leq \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{12}}} \cdot L_d(P, \gamma)$$

για κάθε διαμέριση $P$ του διαστήματος $[a, b]$. Συνεπώς, η $\gamma$ είναι ευθυγραμμίσιμη ως προς την $d_S$ τότε και μόνο τότε όταν είναι ως προς την $d$.

Αν τώρα η $\gamma$ είναι ευθυγραμμίσιμη, τότε προφανώς $L_d(\gamma) \leq L_{d_S}(\gamma)$. Από την άλλη μεριά, η $\gamma$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$, δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $d_S(\gamma(t), \gamma(s)) < \epsilon$, όταν $t, s \in [a, b]$ και $|t - s| < \delta$. Για κάθε διαμέριση $P$ του $[a, b]$ υπάρχει μία λεπτότερη διαμέριση $Q = \{a = t_0 < \cdots < t_m = b\}$, δηλαδή $P \subset Q$, ώστε $t_k - t_{k-1} < \delta$, $1 \leq k \leq m$. Όπως δείχνει η απόδειξη του Λήμματος 3.2.3,

$$L_{d_S}(P, \gamma) \leq L_{d_S}(Q, \gamma) \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{d_S(\gamma(t_k), \gamma(t_{k-1}))^2}{12}}} d(\gamma(t_k), \gamma(t_{k-1}))$$

$$< \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{12}}} d(\gamma(t_k), \gamma(t_{k-1})) \leq \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{12}}} L_d(\gamma).$$

Αφού λοιπόν

$$L_{d_S}(P, \gamma) < \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{12}}} L_d(\gamma)$$

για κάθε $\epsilon > 0$ και κάθε διαμέριση $P$ του $[a, b]$, συμπεραίνουμε οτι $L_{d_S}(\gamma) \leq L_d(\gamma)$. $\square$

Με άλλα λόγια, η προηγούμενη Πρόταση 3.2.4 λέει ότι μία παραμετρισμένη καμπύλη στην $n$-σφαίρα $S^n$ είναι ευθυγραμμίσιμη ως προς τη σφαιρική απόσταση τότε και μόνο τότε όταν είναι ευθυγραμμίσιμη ως παραμετρισμένη καμπύλη του $\mathbb{R}^{n+1}$ και το μήκος της ταυτίζεται με το ευκλείδειο μήκος της.

## 3.3 Σφαιρικές γεωδαισιακές

Ένας μέγιστος κύκλος στην $n$-σφαίρα $S^n$, $n \geq 2$, είναι η τομή της $S^n$ με έναν 2-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^{n+1}$. Αν τα σημεία $x$, $y \in S^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^{n+1}$, τότε παράγουν έναν μοναδικό διανυσματικό υπόχωρο $V$ του $\mathbb{R}^{n+1}$ και συνεπώς το σύνολο $S(x, y) = V \cap S^n$ είναι μέγιστος κύκλος που καθορίζεται μονοσήμαντα από τα δύο σημεία $x$, $y$. Αν τα $x$, $y$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε $x = \pm y$.

Τρία σημεία $x$, $y$, $z \in S^n$ λέγονται *σφαιρικά συνευθειακά* αν υπάρχει ένας μέγιστος κύκλος στην $S^n$ που τα περιέχει.

**Λήμμα 3.3.1.** *Αν $x$, $y$, $z \in S^n$ και $d_S(x, z) = d_S(x, y) + d_S(y, z)$, τότε τα σημεία $x$, $y$, $z$ είναι σφαιρικά συνευθειακά.*

*Απόδειξη.* Επειδή τα διανύσματα $x$, $y$, $z$ παράγουν έναν διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^{n+1}$ με διάσταση το πολύ 3, αρκεί να αποδειχθεί στην περίπτωση $n = 2$ ότι τα $x$, $y$, $z$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Όπως δείχνει η απόδειξη του Λήμματος 3.2.1, η υπόθεση $d_S(x, z) = d_S(x, y) + d_S(y, z)$ σημαίνει οτι

$$|\langle x \times z, y \times z \rangle| = \|x \times z\| \cdot \|y \times z\|.$$

Συνεπώς τα διανύσματα $x \times z$, $y \times z$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Αλλά τότε τα $x$, $y$, $z$ είναι επίσης γραμμικά εξαρτημένα, γιατί

$$\det(x, y, z)z = \langle x, y \times z \rangle z = (y \times z) \times (x \times z) = 0. \quad \square$$

Οι σφαιρικές γεωδαισιακές, δηλαδή οι γεωδαισιακές ως προς την σφαιρική απόσταση στην $S^n$, $n \geq 2$, περιγράφονται από το ακόλουθο.

**Θεώρημα 3.3.2.** *Έστω $a$, $b \in \mathbb{R}$ με $0 < b - a < \pi$ και $\gamma : [a, b] \to S^n$ μία μη-σταθερή παραμετρισμένη καμπύλη. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*
*(α) Η $\gamma$ είναι γεωδιασιακό τόξο.*
*(β) Υπάρχουν δύο κάθετα $x$, $y \in S^n$ ώστε η $\gamma$ δίνεται από τον τύπο*

$$\gamma(t) = \cos(t - a) \cdot x + \sin(t - a) \cdot y, \quad a \leq t \leq b.$$

*(γ) Η $\gamma$ είναι $C^\infty$ και ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $\gamma'' + \gamma = 0$.*

*Απόδειξη.* Αν η $\gamma$ είναι γεωδαισιακό τόξο, για κάθε $a \leq t \leq b$ έχουμε

$$d_S(\gamma(b), \gamma(a)) = b - a = (b - t) + (t - a) = d_S(\gamma(b), \gamma(t)) + d_S(\gamma(t), \gamma(a)),$$

οπότε τα $\gamma(a)$, $\gamma(t)$, $\gamma(b)$ είναι σφαιρικά συνευθειακά. Δηλαδή, υπάρχει ένας 2-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος $V$ του $\mathbb{R}^{n+1}$ ώστε $\gamma([a,b]) \subset V \cap S^n$. Θέτουμε $x = \gamma(a)$. Υπάρχει ένα διάνυσμα $y \in V \cap S^n$, τέτοιο ώστε το $\{x, y\}$ να είναι ορθοκανονική βάση του $V$ (όπως επίσης και το $\{x, -y\}$). Τότε

$$\gamma(t) = \langle x, \gamma(t)\rangle x + \langle y, \gamma(t)\rangle y$$

και

$$\langle x, \gamma(t)\rangle = \cos d_S(\gamma(a), \gamma(t)) = \cos(t-a)$$

για κάθε $a \leq t \leq b$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε ότι

$$\langle x, \gamma(t)\rangle^2 + \langle y, \gamma(t)\rangle^2 = \|\gamma(t)\|^2 = 1$$

και συνεπώς $\langle y, \gamma(t)\rangle = \pm\sin(t-a)$. Επειδή η $\gamma$ είναι συνεχής και $0 < b-a < \pi$, συμπεραίνουμε από το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής οτι είτε $\langle y, \gamma(t)\rangle = \sin(t-a)$ για κάθε $a \leq t \leq b$ είτε $\langle y, \gamma(t)\rangle = -\sin(t-a)$ για κάθε $a \leq t \leq b$. Αυτό δείχνει οτι το (α) συνεπάγεται το (β).

Αν ισχύει το (β) τότε για κάθε $a \leq s < t \leq b$ έχουμε

$$\cos d_S(\gamma(t), \gamma(s)) = \langle \gamma(t), \gamma(s)\rangle = \cos(t-a)\cdot\cos(s-a) + \sin(t-a)\cdot\sin(s-a) = \cos(t-s).$$

Επειδή $0 < t-s \leq b-a < \pi$, προκύπτει οτι $d_S(\gamma(t), \gamma(s)) = t-s$.

Επιπλέον, προφανώς η $\gamma$ είναι $C^\infty$ και παραγωγίζοντας βλέπουμε οτι $\gamma'' + \gamma = 0$. Το (β) λοιπόν συνεπάγεται τα (α) και (γ).

Τέλος, έστω οτι ισχύει το (γ). Παραγωγίζοντας την εξίσωση $\langle \gamma, \gamma\rangle = 1$, βρίσκουμε $\langle \gamma, \gamma'\rangle = 0$. Επιπλέον, η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (ταλάντωση) $\gamma'' + \gamma = 0$ είναι

$$\gamma(t) = \cos(t-a)\cdot\gamma(a) + \sin(t-a)\cdot\gamma'(a), \quad a \leq t \leq b.$$

Από αυτά έχουμε

$$\cos^2(t-a) + \sin^2(t-a)\cdot\|\gamma'(a)\|^2 = \|\gamma(t)\|^2 = 1$$

για κάθε $a < t \leq b$, οπότε $\|\gamma'(a)\| = 1$ και $\|\gamma'(t)\| = 1$ για κάθε $a \leq t \leq b$. Αυτό δείχνει οτι το (γ) συνεπάγεται το (β). □

**Πόρισμα 3.3.3.** *Μία παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \to S^n$, $n \geq 2$, είναι γεωδαισιακή της σφαρικής απόστασης τότε και μόνο τότε όταν υπάρχουν κάθετα μεταξύ τους $x$, $y \in S^n$ ώστε η $\gamma$ να δίνεται από τον τύπο*

$$\gamma(t) = (\cos t)x + (\sin t)y, \quad t \in \mathbb{R}.$$

*Απόδειξη.* Από το Θεώρημα 3.3.2, αν η $\gamma$ είναι γεωδαισιακή ως προς τη σφαιρική απόσταση, τότε η $\gamma$ είναι $C^\infty$ και υπάρχουν $\delta > 0$ και κάθετα $x$, $y \in S^n$ ώστε

$$\gamma(t) = (\cos t)x + (\sin t)y$$

για κάθε $|t| < \delta$. Θέτουμε

$$I = \{s > 0 : \gamma(t) = (\cos t)x + (\sin t)y \quad \text{για κάθε } 0 \leq t \leq s\}.$$

Θα δείξουμε οτι το $I$ δεν είναι άνω φραγμένο με απαγωγή στο άτοπο. Αν είναι άνω φραγμένο, υπάρχει το $T = \sup I$ και $\delta \leq T < +\infty$. Λόγω της συνέχειας της $\gamma$ και της $\gamma'$ έχουμε $\gamma(T) = (\cos T)x + (\sin T)y$ και $\gamma'(T) = (-\sin T)x + (\cos T)y$.

Από το Θεώρημα 3.3.2 πάλι, υπάρχουν $\epsilon > 0$ και κάθετα μεταξύ τους $u,\ v \in S^n$ ώστε

$$\gamma(t) = \cos(t-T)\cdot u + \sin(t-T)\cdot v$$

για κάθε $|t-T| < \epsilon$. Τότε

$$u = \gamma(T) = (\cos T)x + (\sin T)y, \quad v = \gamma'(T) = (-\sin T)x + (\cos T)y.$$

Αντικαθιστώντας,

$$\gamma(t) = \cos(t-T)\cos T\cdot x + \cos(t-T)\sin T\cdot y - \sin(t-T)\sin T\cdot x + \sin(t-T)\cos T\cdot y$$

$$= (\cos t)x + (\sin t)y$$

για κάθε $|t-T| < \epsilon$, που αντιφάσκει με τον ορισμό του $T$. Αυτό δείχνει οτι $\gamma(t) = (\cos t)x + (\sin t)y$ για κάθε $t \geq 0$. Ανάλογα αποδεικνύεται οτι αυτό ισχύει και για κάθε $t \leq 0$. □

**Πόρισμα 3.3.4.** *Ο μετρικός χώρος $(S^n, d_S)$ είναι γεωδαισιακά πλήρης και τα ίχνη των γεωδαισιακών του είναι οι μέγιστοι κύκλοι.* □

Αν $x,\ y \in S^n$ με $x \neq \pm y$, ορθοκανονικοποιώντας το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\{x, y\}$ βλέπουμε οτι το μικρό σφαιρικό γεωδαισιακό τμήμα με άκρα $x$, $y$ είναι το ίχνος του γεωδαισιακού τόξου $\gamma : [0, d_S(x,y)] \to S^n$ με

$$\gamma(t) = (\cos t)\cdot x + (\sin t)\cdot\left(\frac{y - \langle x,y\rangle x}{\|y - \langle x,y\rangle x\|}\right) = \left(\cos t - \frac{\langle x,y\rangle \sin t}{\sqrt{1-\langle x,y\rangle^2}}\right)x + \frac{\sin t}{\sqrt{1-\langle x,y\rangle^2}}y.$$

Από το Θεώρημα 2.6.3 και την Πρόταση 3.2.4 προκύπτει αμέσως οτι $L_{d_S}(\gamma) = d_S(x,y)$, ενώ είναι προφανές οτι

$$\gamma'(0) = \frac{y - \langle x,y\rangle x}{\sqrt{1-\langle x,y\rangle^2}}.$$

## 3.4 Σφαιρικός όγκος

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε τον $n$-διάστατο σφαιρικό όγκο, $n \geq 1$, από όπου θα υπολογίσουμε το εμβαδόν των σφαιρικών γεωδαισιακών τριγώνων στην περίπτωση της 2-σφαίρας. Θα χρειαστεί να περιγράψουμε την παραμέτριση της $S^n$ με σφαιρικές συντεταγμένες.

Έστω $x = (x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ και $\rho = \|x\|$. Αν $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ είναι η γωνία του $x$ με το βασικό διάνυσμα $e_1$, τότε

$$x_1 = \langle x, e_1\rangle = \rho\cos\theta_1$$

και

$$\sum_{k=2}^{n+1} x_k^2 = \rho^2 \sin^2\theta_1.$$

Αν ο $a_k \in \mathbb{R}$ είναι τέτοιος ώστε $x_k = a_k \rho \sin\theta_1$, $2 \le k \le n+1$, έχουμε

$$x = \rho\cos\theta_1 \cdot e_1 + \rho\sin\theta_1 \cdot \sum_{k=2}^{n+1} a_k e_k$$

και $a_2^2 + \cdots + a_{n+1}^2 = 1$. Αν $\theta_1 = 0$ ή $\pi$, τότε φυσικά $x = \pm\rho e_1$.

Η κανονικοποίηση της προβολής του $x$ στον διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^{n+1}$ που παράγεται από το ορθοκανονικό σύνολο $\{e_2, ..., e_{n+1}\}$ είναι το διάνυσμα

$$y_2 = a_2 e_2 + \cdots + a_{n+1} e_{n+1}.$$

Αν $0 \le \theta_2 \le \pi$ είναι η γωνία του $y_2$ με το $e_2$, τότε $a_2 = \cos\theta_2$ και

$$y_2 = \cos\theta_2 \cdot e_2 + \sum_{k=3}^{n+1} a_k e_k$$

οπότε $a_3^2 + \cdots + a_{n+1}^2 = \sin^2\theta_2$. Επιλέγοντας $b_k \in \mathbb{R}$ ώστε $a_k = b_k \sin\theta_2$, $3 \le k \le n+1$, έχουμε

$$y_2 = \cos\theta_2 \cdot e_2 + \sin\theta_2 \cdot \sum_{k=3}^{n+1} b_k e_k$$

όπου $b_3^2 + \cdots + b_{n+1}^2 = 1$ και

$$x = \rho\cos\theta_1 \cdot e_1 + \rho\sin\theta_1\cos\theta_2 \cdot e_2 + \rho\sin\theta_1\sin\theta_2 \sum_{k=3}^{n+1} b_k e_k.$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, αν $y_k$ είναι η κανονικοποίηση της προβολής του $x$ στον διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^{n+1}$ που παράγεται από το ορθοκανονικό σύνολο $\{e_k, ..., e_{n+1}\}$, $2 \le k \le n$ και $0 \le \theta_k \le \pi$ είναι η γωνία του $y_k$ με το $e_k$, $1 \le k < n$, τότε

$$x = \sum_{k=1}^{n-1} \rho\Big(\prod_{j=1}^{k-1} \sin\theta_j\Big)\cos\theta_k \cdot e_k + \rho\Big(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\theta_k\Big) y_n.$$

Αφού $\|y_n\| = 1$, υπάρχει μοναδικό $0 \le \theta_n < 2\pi$ ώστε $y_n = \cos\theta_n \cdot e_n + \sin\theta_n \cdot e_{n+1}$. Συνεπώς,

$x_1 = \rho\cos\theta_1$
$x_2 = \rho\sin\theta_1\cos\theta_2$
.....
$x_n = \rho\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-1}\cos\theta_n$
$x_{n+1} = \rho\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-1}\sin\theta_n$,

όπου $\rho \ge 0$, $0 \le \theta_k \le \pi$, $1 \le k \le n-1$, $0 \le \theta_n < 2\pi$.

Η απεικόνιση $g : (0, +\infty) \times [0, \pi]^{n-1} \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^{n+1}$ με

$$g(\rho, \theta_1, ..., \theta_n) = x = (x_1, ..., x_n, x_{n+1}),$$

όπου τα $x_k$, $1 \le k \le n+1$ δίνονται από τους παραπάνω τύπους, είναι $C^\infty$ και έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) $\dfrac{\partial g}{\partial \rho} = \dfrac{x}{\rho}$.

(β) $\left\| \dfrac{\partial g}{\partial \theta_k} \right\| = \rho \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{k-1}$, $1 \le k \le n$.

(γ) Το σύνολο $\left\{ \dfrac{\partial g}{\partial \rho}, \dfrac{\partial g}{\partial \theta_1}, ..., \dfrac{\partial g}{\partial \theta_n} \right\}$ των στηλών του ιακωβιανού πίνακα $Dg(\rho, \theta_1, ..., \theta_n)$ είναι ορθογώνιο.

Από αυτές τις ιδιότητες προκύπτει οτι

$$\det Dg(\rho, \theta_1, ..., \theta_n) = \rho^n \sin^{n-1}\theta_1 \sin^{n-2}\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-1}.$$

Η παραμέτριση της $n$-σφαίρας $S^n$, $n \ge 1$, με σφαιρικές συντεταγμένες είναι η $C^\infty$ απεικόνιση $\phi : [0,\pi]^{n-1} \times [0, 2\pi] \to S^n$ με

$$\phi(\theta_1, ..., \theta_n) = g(1, \theta_1, ..., \theta_n).$$

Η $\phi$ είναι επί και ένα-προς-ένα στο $(0,\pi)^{n-1} \times (0, 2\pi)$. Είναι φανερό από τον ορισμό οτι αν $\phi(\theta_1, ..., \theta_n) = (x_1, ..., x_n)$, τότε

$$\theta_k = d_S(e_k, \frac{x_k e_k + \cdots + x_{n+1} e_{n+1}}{\|x_k e_k + \cdots + x_{n+1} e_{n+1}\|}), \quad 1 \le k < n.$$

Αν το $X \subset S^n$ είναι ένα σύνολο, ο μη-αρνητικός πραγματικός αριθμός

$$\mathrm{Vol}(X) = \int_{\phi^{-1}(X)} \sin^{n-1}\theta_1 \sin^{n-2}\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-1} d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} d\theta_n$$

λέγεται *σφαιρικός όγκος* του $X$, υπό την προϋπόθεση οτι το ολοκλήρωμα υπάρχει. Αν $\tilde{X} = \{tx : x \in X, 0 \le t \le 1\}$, έχουμε

$$\mathrm{Vol}(X) = (n+1) \int_0^1 \left( \int_{\phi^{-1}(X)} \rho^n \sin^{n-1}\theta_1 \sin^{n-2}\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-1} d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} d\theta_n \right) d\rho$$

$$= (n+1) \int_{\tilde{X}} dx_1 \cdots dx_n dx_{n+1} = (n+1) V_{n+1}(\tilde{X})$$

όπου με $V_{n+1}$ συμβολίζουμε τον $(n+1)$-διάστατο όγκο.

Αν $A \in O(n+1, \mathbb{R})$, είναι προφανές οτι $A(\tilde{X}) = \widetilde{A(X)}$, λόγω της γραμμικότητας του $A$ και

$$\mathrm{Vol}(A(X)) = (n+1) V_{n+1}(\widetilde{A(X)}) = (n+1) V_{n+1}(A(\tilde{X}))$$

$$= (n+1) V_{n+1}(\tilde{X}) = \mathrm{Vol}(X),$$

αφού ο $(n+1)$-διάστατος όγκος παραμένει αναλλοίωτος από τις ευκλείδειες ισομετρίες του $\mathbb{R}^{n+1}$. Με άλλα λόγια, ο σφαιρικός όγκος είναι αναλλοίωτος από τις ισομετρίες της $S^n$, δηλαδή είναι αναλλοίωτη ποσότητα για τη γεωμετρία (κατά Klein) $(I(S^n), S^n)$.

**Παράδειγμα 3.4.1.** Θα υπολογίσουμε τον συνολικό σφαιρικό όγκο της $S^n$, $n \ge 1$. Έχουμε

$$\mathrm{Vol}(S^n) = 2\pi \int_{[0,\pi]^{n-1}} \sin^{n-1}\theta_1 \sin^{n-2}\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-1} d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} = 2\pi \prod_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi \sin^k\theta d\theta.$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη υπολογίζεται επαγωγικά οτι αν $k = 2m$, τότε

$$\int_0^\pi \sin^{2m}\theta d\theta = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \frac{2m-1}{2m},$$

ενώ αν $k = 2m+1$, τότε

$$\int_0^\pi \sin^{2m+1}\theta d\theta = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m+1}.$$

Συνεπώς,

$$\left(\int_0^\pi \sin^{2m}\theta d\theta\right)\left(\int_0^\pi \sin^{2m-1}\theta d\theta\right) = \frac{\pi}{m}$$

και

$$\mathrm{Vol}(S^{2n-1}) = 2\pi \prod_{m=1}^{n-1} \frac{\pi}{m} = \frac{2\pi^n}{(n-1)!}.$$

Από την άλλη μεριά,

$$\left(\int_0^\pi \sin^{2m+1}\theta d\theta\right)\left(\int_0^\pi \sin^{2m}\theta d\theta\right) = \frac{2\pi}{2m+1}$$

και συνεπώς

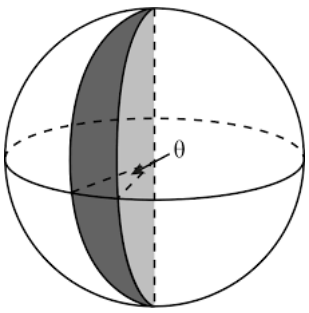
$$\mathrm{Vol}(S^{2n}) = 2 \prod_{m=0}^{n-1} \frac{2\pi}{2m+1} = \frac{2^{n+1}\pi^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}.$$

Στην περίπτωση $n = 2$ ο σφαιρικός όγκος λέγεται σφαιρικό εμβαδόν στην $S^2$ και

$$\mathrm{Vol}(X) = \int_{\phi^{-1}(X)} \sin\theta_1 d\theta_1 d\theta_2,$$

ενώ το συνολικό εμβαδόν της 2-σφαίρας $S^2$ είναι ίσο με $4\pi$.

**Παράδειγμα 3.4.2.** Ένας μέγιστος κύκλος στην $S^2$ τη χωρίζει σε δύο αντίθετα ημισφαίρια, των οποίων είναι το κοινό σύνορο. Ένα *δίγωνο* στην $S^2$ είναι η τομή δύο διαφορετικών, μη-αντίθετων ημισφαιρίων. Κάθε δίγωνο είναι ισοδύναμο στη γεωμετρία της $S^2$ με ένα δίγωνο $L(\theta) = \phi([0,\pi] \times [0,\theta])$ για κάποιο μοναδικό $0 < \theta < 2\pi$, που λέγεται γωνία του διγώνου.



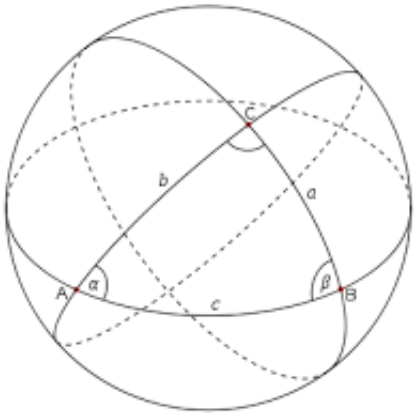
Επειδή το σφαιρικό εμβαδόν είναι αναλλοίωτο από τις ισομετρίες της σφαίρας, ο όγκος ενός σφαιρικού διγώνου με γωνία $\theta$ είναι

$$\mathrm{Vol}(L(\theta)) = \int_0^\theta \int_0^\pi \sin\theta_1 d\theta_1 d\theta_2 = 2\theta.$$

Έστω $A$, $B$, $C \in S^2$ τρία σημεία που δεν είναι σφαιρικά συνευθειακά. Θα υποθέτουμε πάντα οτι η διατεταγμένη βάση $[A, B, C]$ του $\mathbb{R}^3$ είναι θετικά προσανατολισμένη. Έστω $S(A, B)$ ο μοναδικός μέγιστος κύκλος που περέχει τα σημεία $A$, $B$ και $H(A, B, C)$ το ημισφαίριο με σύνορο $S(A, B)$ που περιέχει το $C$. Το σύνολο

$$\overset{\triangle}{ABC} = H(A, B, C) \cap H(B, C, A) \cap H(C, A, B)$$

λέγεται *σφαιρικό γεωδαισιακό τρίγωνο* με κορυφές τα σημεία $A$, $B$, $C$. Συμβολίζουμε με $AB$ το μικρό γεωδαισιακό τμήμα στον $S(A, B)$ με άκρα $A$, $B$. Τα γεωδιασιακά τμήματα $AB$, $BC$, $CA$ λέγονται *πλευρές* του σφαιρικού γεωδαισιακού τριγώνου $\overset{\triangle}{ABC}$. Έστω $a = d_S(B, C)$, $b = d_S(C, A)$, $c = d_S(A, B)$ και $\gamma_{BC} : [0, a] \to BC$ το γεωδαισιακό τόξο με ίχνος την πλευρά $BC$, $\gamma_{CA} : [0, b] \to CA$ το γεωδαισιακό τόξο με ίχνος την πλευρά $CA$ και $\gamma_{AB} : [0, c] \to AB$ το γεωδαισιακό τόξο με ίχνος την πλευρά $AB$. Η *(εσωτερική) γωνία* $\alpha$ στην κορυφή $A$ είναι η γωνία των διανυσμάτων $-\gamma'_{CA}(b)$ και $\gamma'_{AB}(0)$. Όμοια η εσωτερική γωνία $\beta$ του σφαιρικού γεωδαισιακού τριγώνου στην κορυφή $B$ είναι η γωνία των διανυσμάτων $-\gamma'_{AB}(c)$ και $\gamma'_{BC}(0)$ και η εσωτερική γωνία $\gamma$ στην κορυφή $C$ είναι η γωνία των διανυσμάτων $-\gamma'_{BC}(a)$ και $\gamma'_{CA}(0)$. Έτσι $BC$ είναι η απέναντι πλευρά της γωνίας $\alpha$, $CA$ είναι η απέναντι πλευρά της γωνίας $\beta$ και $AB$ είναι η απέναντι πλευρά της γωνίας $\gamma$.




Το εμβαδόν των σφαιρικών γεωδαισιακών τριγώνων υπολογίστηκε από τον σκώτο μαθηματικό Thomas Harriot το 1603. Η απλή συνδυαστική απόδειξη που ακολουθεί δόθηκε από τον L. Euler το 1781.

**Θεώρημα 3.4.3.** *Εστω $\overset{\triangle}{ABC}$ ένα σφαιρικό γεωδαισιακό τρίγωνο με αντίστοιχες εσωτερικές γωνίες $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ στη 2-σφαίρα $S^2$. Το σφαιρικό εμβαδόν του τριγώνου είναι*

$$\mathrm{Vol}(\overset{\triangle}{ABC}) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

*Απόδειξη.* Θεωρούμε τους τρείς μέγιστους κύκλους τόξα των οποίων είναι οι πλευρές του σφαιρικού γεωδαισιακού τριγώνου. Αυτοί χωρίζουν τη σφαίρα σε 6 σφαιρικά δίγωνα. Τα 3 από αυτά περιέχουν το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABC}$, των οποίων είναι η τομή και τα άλλα 3 το αντιποδικό του. Δηλαδή, αυτά τα 6 δίγωνα καλύπτουν τα δύο τρίγωνα από 3 φορές και την υπόλοιπη σφαιρική επιφάνεια από μία φορά. Έχουμε λοιπόν,

$$2[2\alpha + 2\beta + 2\gamma] = 4\pi + 2[\mathrm{Vol}((\overset{\triangle}{ABC}) + \mathrm{Vol}(\overset{\triangle}{ABC})]$$

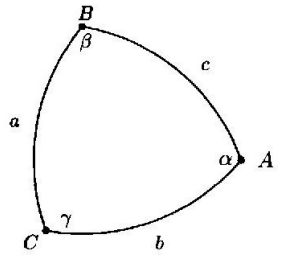
και συνεπώς

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \mathrm{Vol}(\overset{\triangle}{ABC}). \quad \square$$

**Πόρισμα 3.4.4.** *Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών κάθε σφαιρικού γεωδαισιακού τριγώνου είναι γνήσια μεγαλύτερο από* $\pi$. $\square$

## 3.5 Σφαιρική τριγωνομετρία

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε τα σφαιρικά ανάλογα των σχέσεων που υπάρχουν μεταξύ των πλευρών και των γωνιών ενός τριγώνου στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. Η σφαιρική τριγωνομετρία, όπως έχει επικρατήσει να ονομάζεται αυτή η μελέτη, αναπτύχθηκε για τις ανάγκες της Παρατηρησιακής Αστρονομίας, στην οποία ο ουράνιος θόλος ταυτίζεται με την 2-σφαίρα $S^2$.




**Θεώρημα 3.5.1.** *Αν* $\overset{\triangle}{ABC}$ *είναι ένα σφαιρικό γεωδαισιακό τρίγωνο στην* $S^2$ *με αντίστοιχες εσωτερικές γωνίες* $\alpha, \beta, \gamma$ *στις κορυφές* $A, B, C$ *και μήκη απέναντι πλευρών* $a = d_S(B, C)$, $b = d_S(C, A)$, $c = d_S(A, B)$, *τότε*

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

*Απόδειξη.* Σύμφωνα με τον τύπο στο τέλος της παραγράφου 3.3, η εσωτερική γωνία $\alpha$ έχει

$$\cos\alpha = \left\langle \frac{B - \langle A, B\rangle A}{\sqrt{1 - \langle A, B\rangle^2}}, \frac{C - \langle A, C\rangle A}{\sqrt{1 - \langle A, C\rangle^2}} \right\rangle = \frac{\langle B, C\rangle - \langle A, B\rangle \cdot \langle A, C\rangle}{\sqrt{1 - \langle A, B\rangle^2} \cdot \sqrt{1 - \langle A, C\rangle^2}}$$

$$= \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}. \quad \square$$

Παρατηρούμε οτι

$$\langle A \times C, A \times B \rangle = \langle B, C \rangle - \langle A, B \rangle \langle A, C \rangle,$$

οπότε

$$\cos \alpha = \frac{\langle A \times C, A \times B \rangle}{\|A \times C\| \cdot \|A \times B\|} = \frac{\langle A \times C, A \times B \rangle}{\sin b \sin c}$$

και

$$\alpha = d_S\left( \frac{A \times C}{\|A \times C\|}, \frac{A \times B}{\|A \times B\|} \right).$$

Ο τύπος που μόλις αποδείξαμε στο Θεώρημα 3.5.1 είναι γνωστός ως πρώτος νόμος των συνημιτόνων στη σφαιρική τριγωνομετρία. Στην ειδική περίπτωση $\alpha = \frac{\pi}{2}$ δίνει την εκδοχή του Πυθαγόρειου Θεωρήματος στη Σφαιρική Γεωμετρία.

**Πόρισμα 3.5.2.** *Αν $\overset{\triangle}{ABC}$ είναι ένα σφαιρικό γεωδαισιακό τρίγωνο στην $S^2$ με αντίστοιχες εσωτερικές γωνίες $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ στις κορυφές $A$, $B$, $C$ και μήκη απέναντι πλευρών $a = d_S(B, C)$, $b = d_S(C, A)$, $c = d_S(A, B)$ και $\alpha = \frac{\pi}{2}$, τότε $\cos a = \cos b \cos c$.* □

Ο νόμος των ημιτόνων στη Σφαιρική Γεωμετρία έχει την ακόλουθη μορφή.

**Θεώρημα 3.5.3.** *Αν $\overset{\triangle}{ABC}$ είναι ένα σφαιρικό γεωδαισιακό τρίγωνο στην $S^2$ με αντίστοιχες εσωτερικές γωνίες $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ στις κορυφές $A$, $B$, $C$ και μήκη απέναντι πλευρών $a = d_S(B, C)$, $b = d_S(C, A)$, $c = d_S(A, B)$, τότε*

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}.$$

*Απόδειξη.* Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.1 έχουμε

$$\sin \alpha = \frac{\|(A \times B) \times (A \times C)\|}{\sin b \sin c} = \frac{|\det(A, B, C)|}{\sin b \sin c}$$

οπότε

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{|\det(A, B, C)|}{\sin a \sin b \sin c}.$$

Όμοια

$$\frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{|\det(B, C, A)|}{\sin a \sin b \sin c}, \quad \frac{\sin \gamma}{\sin c} = \frac{|\det(C, A, B)|}{\sin a \sin b \sin c}. \quad \square$$

Έστω $\overset{\triangle}{ABC}$ ένα σφαιρικό γεωδαισιακό τρίγωνο με αντίστοιχες εσωτερικές γωνίες $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ στις κορυφές $A$, $B$, $C$ και μήκη απέναντι πλευρών $a = d_S(B, C)$, $b = d_S(C, A)$, $c = d_S(A, B)$. Επειδή

$$\det(A \times B, B \times C, C \times A) = \det(A, B, C)^2 > 0,$$

τα διανύσματα $A \times B$, $B \times C$, $C \times A$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έτσι τα σημεία

$$A' = \frac{B \times C}{\|B \times C\|}, \quad B' = \frac{C \times A}{\|C \times A\|}, \quad C' = \frac{A \times B}{\|A \times B\|}$$

είναι κορυφές ενός σφαιρικού γεωδαισιακού τριγώνου που λέγεται το *πολικό τρίγωνο* του $\overset{\triangle}{ABC}$. Τα μήκη των πλευρών του πολικού τριγώνου είναι

$$a' = d_S(B', C') = d_S\left(\frac{C \times A}{\|C \times A\|}, \frac{A \times B}{\|A \times B\|}\right) = \pi - \alpha$$

και $b' = d_S(A', C') = \pi - \beta$, $c' = d_S(A', B') = \pi - \gamma$. Επειδή το αρχικό σφαιρικό γεωδαισιακό τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABC}$ είναι το πολικό του $\overset{\triangle}{A'B'C'}$, αν $\alpha'$, $\beta'$ $\gamma'$ είναι οι εσωτερικές γωνίες του δεύτερου, έχουμε και $a = \pi - \alpha'$, $b = \pi - \beta'$, $c = \pi - \gamma'$.

**Θεώρημα 3.5.4.** *Αν $\overset{\triangle}{ABC}$ είναι ένα σφαιρικό γεωδαισιακό τρίγωνο στην $S^2$ με αντίστοιχες εσωτερικές γωνίες $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ στις κορυφές $A$, $B$, $C$ και μήκη απέναντι πλευρών $a = d_S(B, C)$, $b = d_S(C, A)$, $c = d_S(A, B)$, τότε*

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

*Απόδειξη.* Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.5.1 για το πολικό τρίγωνο παίρνουμε

$$\cos(\pi - a) = \frac{\cos(\pi-\alpha) - \cos(\pi-\beta)\cos(\pi-\gamma)}{\sin(\pi-\beta)\sin(\pi-\gamma)}$$

από όπου ο τύπος. □

Ο τελευταίος τύπος λέγεται δεύτερος νόμος των συνημιτόνων και σύμφωνα με αυτόν τα μήκη των πλευρών ενός σφαιρικού γεωδαισιακού τριγώνου καθορίζονται από τις εσωτερικές γωνίες του τριγώνου.

## 3.6 Σφαίρες με μεγάλη ακτίνα

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάστηκαν βασικά στοιχεία της γεωμετρίας της $n$-σφαίρας $S^n$ με ακτίνα 1, $n \geq 1$ και ειδικότερα της 2-σφαίρας $S^2$. Ανάλογα ισχύουν για την σφαίρα $S^n_R$ με ακτίνα $R > 0$. Στην $S^n_R$ ο σφαιρικός όγκος ενός συνόλου $X \subset S^n_R$ είναι

$$\mathrm{Vol}(X) = \int_{\phi^{-1}(X)} R^n \sin^{n-1}\theta_1 \sin^{n-2}\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-1} d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} d\theta_n,$$

όταν το ολοκλήρωμα υπάρχει.

Ειδικά για $n = 2$, αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο οτι το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ενός σφαιρικού γεωδαισιακού τριγώνου $\overset{\triangle}{ABC}$ στην $S^2_R$ δίνεται από τον τύπο

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{\mathrm{Vol}(\overset{\triangle}{ABC})}{R^2}.$$

Επίσης το σφαιρικό Πυθαγόρειο Θεώρημα στην $S^2_R$ στην περίπτωση $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ έχει τη μορφή

$$\cos\Big(\frac{a}{R}\Big) = \cos\Big(\frac{b}{R}\Big) \cdot \cos\Big(\frac{c}{R}\Big).$$

Παρατηρούμε οτι όταν $R \to +\infty$, τότε $\alpha + \beta + \gamma \to \pi$. Κάτι ανάλογο ισχύει και για το σφαιρικό Πυθαγόρειο Θεώρημα που τείνει προς τον κλασικό ευκλείδειο τύπο. Πράγματι, αναπτύσοντας σε δυναμοσειρές

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}\Big(\frac{a}{R}\Big)^{2k} = \Big(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}\Big(\frac{b}{R}\Big)^{2k}\Big)\cdot\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}\Big(\frac{c}{R}\Big)^{2k}\Big),$$

οπότε

$$1 - \frac{a^2}{2R^2} + \cdots = 1 - \frac{b^2}{2R^2} - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{b^2c^2}{4R^4} + \cdots.$$

Συνεπώς,

$$a^2 = b^2 + c^2 + \frac{P}{R^2}, \quad \lim_{R\to+\infty}\frac{P}{R^2} = 0.$$

## 3.7 Ασκήσεις

1. Αν $x$, $y \in S^2$ με $x \neq y$, να αποδειχθεί οτι το σύνολο

$$\{z \in S^2 : d_S(z,x) = d_S(z,y)\}$$

είναι ένας μέγιστος κύκλος στην $S^2$.

2. Αν $x$, $y \in S^2$ και υπάρχει $f \in I(S^2)$ ώστε $f(x) = x$ και $f(y) = -y$, να αποδειχθεί οτι $d_S(x,y) = \dfrac{\pi}{2}$.

3. Να ευρεθούν όλα τα στοιχεία με τάξη 4 στη ομάδα ισομετριών $I(S^2)$.

4. Να ευρεθούν όλα τα στοιχεία με τάξη 2 στη ομάδα ισομετριών $I(S^2)$.

5. Να αποδειχθεί οτι η σφαιρική απόσταση $d_S$ είναι εσωτερική συνάρτηση απόστασης στην $S^n$, $n \geq 1$.

6. Αν $\sigma$, $\gamma : \mathbb{R} \to S^n$ είναι δύο οποιεσδήποτε σφαιρικές γεωδαισιακές, $n \geq 2$, να αποδειχθεί οτι υπάρχει μία (όχι μοναδική) ισομετρία $f \in I(S^n)$ ώστε $\sigma = f \circ \gamma$.

7. Έστω $\{u_0, ..., u_n\}$ και $\{v_0, ..., v_n\}$ δύο γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα $n+1$ διανυσμάτων στην $n$-σφαίρα $S^n$, $n \geq 1$. Αν $d_S(u_i, u_j) = d_S(v_i, v_j)$ για κάθε $0 \leq i, j \leq n$, να αποδειχθεί οτι υπάρχει μία μοναδική ισομετρία $f \in I(S^n)$ τέτοια ώστε $f(u_i) = v_i$, $0 \leq i \leq n$.

8. Να αποδειχθεί οτι το σφαιρικό μήκος περιφέρειας κύκλου στην $S^2$ με σφαιρικό μήκος ακτίνας $r > 0$ είναι ίσο με $2\pi \sin r$.

9. Έστω $0 < r < \pi$, $x \in S^2$ και $\overline{B(x,r)} = \{y \in S^2 : d_S(x,y) \leq r\}$. Να αποδειχθεί οτι $\mathrm{Vol}(\overline{B(x,r)}) = 2\pi(1 - \cos r)$.

10. Αν $\overset{\triangle}{ABC}$ είναι ένα οποιοδήποτε σφαιρικό γεωδαισιακό τρίγωνο στην $S^2$ με μήκη πλευρών $a$, $b$, $c$, να αποδειχθεί οτι $a + b + c < 2\pi$.

11. Να αποδειχθεί οτι δύο σφαιρικά γεωδαισιακά τρίγωνα με αντίστοιχες ίσες εσωτερικές γωνίες είναι ισοδύναμα στη Σφαιρική Γεωμετρία.

12. Αν $\overset{\triangle}{ABC}$ είναι ένα ισοσκελές σφαιρικό γεωδαισιακό τρίγωνο στην $S^2$ με αντίστοιχες εσωτερικές γωνίες $\alpha$, $\beta = \gamma$ στις κορυφές $A$, $B$, $C$ και μήκη των απέναντι πλευρών $a = d_S(B, C)$, $b = d_S(C, A) = d_S(A, B) = c$, να αποδειχθεί οτι

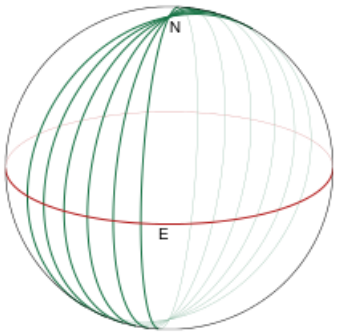
$$\sin\frac{a}{2} = \sin b \cdot \sin\frac{\alpha}{2}.$$

# Κεφάλαιο 4

# Προβολική Γεωμετρία

## 4.1 Ο $n$-διάστατος πραγματικός προβολικός χώρος

Στη γεωμετρία της $n$-σφαίρας $S^n$, $n \geq 2$, από δύο διαφορετικά σημεία $x$, $y \in S^n$ διέρχεται μία μοναδική σφαιρική γεωδαισιακή τότε και μόνο τότε όταν $x \neq -y$. Όμως από δύο οποιαδήποτε αντιποδικά σημεία $x$ και $-x$ διέρχονται ένα υπεραριθμήσιμο πλήθος από σφαιρικές γεωδαισιακές. Επιπλέον, μαζύ με κάθε σφαιρικό γεωδαισιακό τρίγωνο υπάρχει και το ισοδύναμο αντιποδικό του.




Προκειμένου να ανακτήσουμε την ισχύ του ευκλείδειου αξιώματος οτι δύο σημεία μπορούν να συνδεθούν με ένα ακριβώς γεωδαισιακό τμήμα, είμαστε υποχρεωμένοι να περάσουμε από την $S^n$ στο σύνολο πιλήκο $\mathbb{R}P^n = S^n/\sim$, όπου $\sim$ είναι η σχέση ισοδυναμίας $x \sim -x$ στην $S^n$. Με άλλα λόγια το $\mathbb{R}P^n$ είναι το σύνολο των τροχιών της φυσικής δράσης της κυκλικής υποομάδας $\{id_{S^n}, a\}$ της $I(S^n) = O(n+1, \mathbb{R})$ επί της $S^n$, όπου $a$ είναι η αντιποδική απεικόνιση $a(x) = -x$. Το σύνολο $\mathbb{R}P^n$ λέγεται *$n$-διάστατος πραγματικός προβολικός χώρος* και ορίζεται για κάθε ακέραιο $n \geq 0$. Προφανώς, ο $\mathbb{R}P^0$ είναι μονοσύνολο. Αν $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ είναι η απεικόνιση πιλήκο, συνήθως χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $p(x) = [x]$ ή

$$p(x_1, ..., x_{n+1}) = [x_1, ..., x_{n+1}]$$

για $x = (x_1, ..., x_{n+1}) \in S^n$. Οι πραγματικοί αριθμοί $x_1$,..., $x_{n+1}$ λέγονται *ομογενείς συντεταγμένες* του σημείου $[x] = [x_1, ..., x_{n+1}] \in \mathbb{R}P^n$.

Στον $\mathbb{R}P^n$ ορίζεται η συνάρτηση απόστασης $d : \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^n \to [0, \frac{\pi}{2}]$ με τύπο

$$d([x],[y]) = \min\{d_S(x,y), d_S(x,-y)\} = \min\{d_S(x,y), \pi - d_S(x,y)\}$$
$$= \arccos|\langle x, y\rangle|$$

για κάθε $x$, $y \in S^n$.

**Πρόταση 4.1.1.** *Το ζεύγος $(\mathbb{R}P^n, d)$ είναι μετρικός χώρος.*

*Απόδειξη.* Μόνο η τριγωνική ανισότητα χρειάζεται απόδειξη. Έστω $[x]$, $[y]$, $[z] \in \mathbb{R}P^n$. Μπορούμε να επιλέξουμε τους αντιπροσώπους $x$, $z \in S^n$ έτσι ώστε $\langle x, z\rangle \geq 0$ και $\langle y, z\rangle \geq 0$, δηλαδή $d([x],[z]) = d_S(x,z)$ και $d([y],[z]) = d_S(y,z)$. Αν $\langle x, y\rangle \geq 0$, τότε επιπλέον $d([x],[y]) = d_S(x,y)$ και η τριγωνική ανισότητα για την $d$ είναι η τριγωνική ανισότητα για τη σφαιρική απόσταση $d_S$. Αν $\langle x, y\rangle \leq 0$, τότε $d([x],[y]) = d_S(x,-y) = d_S(-x,y)$ και πάλι από την τριγωνική ανισότητα για την $d_S$ έχουμε

$$d([x],[z]) \leq d_S(-x,z) \leq d_S(-x,y) + d_S(y,z) = d([x],[y]) + d([y],[z]). \quad \square$$

**Παράδειγμα 4.1.2.** Ο 1-διάστατος πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^1$ λέγεται και πραγματική προβολική ευθεία. Θα δείξουμε οτι είναι (τοπολογικά) ένας κύκλος. Θεωρούμε την απεικόνιση $h : S^1 \to \mathbb{R}P^1$ με

$$h(\cos t, \sin t) = \left[\cos\frac{t}{2}, \sin\frac{t}{2}\right]$$

που είναι καλά ορισμένη και συνεχής γιατί

$$d(h(\cos t, \sin t), h(\cos s, \sin s)) = \arccos\left|\cos\left(\frac{t-s}{2}\right)\right|$$

για κάθε $0 \leq t, s < 2\pi$. Εύκολα βλέπουμε οτι η $h$ είναι ένα-προς-ένα και επί του $\mathbb{R}P^1$, γιατί κάθε σημείο του $\mathbb{R}P^1$ έχει αντιπρόσωπο στο κλειστό βόρειο ημικύκλιο, δηλαδή είναι της μορφής $[\cos\theta, \sin\theta]$ για κάποιο μοναδικό $0 \leq \theta < \pi$. Συνεπώς, $h^{-1}([\cos\theta, \sin\theta]) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$, από όπου προκύπτει οτι η $h^{-1}$ είναι συνεχής.

Από τον ορισμό της απόστασης $d$ στον $\mathbb{R}P^n$ είναι φανερό οτι αν $x$, $y \in S^n$ και $d_S(x,y) < \frac{\pi}{2}$, δηλαδή $\langle x, y\rangle > 0$, τότε $d([x],[y]) = d_S(x,y)$. Συνεπώς, για κάθε $x \in S^n$ και $0 < r \leq \frac{\pi}{4}$ η απεικόνιση πιλήκο $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ απεικονίζει ισομετρικά την ανοιχτή μπάλλα $B(x,r) \subset S^n$ επί της ανοιχτής μπάλλας $B([x],r) \subset \mathbb{R}P^n$. Δηλαδή η $p$ είναι τοπική ισομετρία μετρικών χώρων. Αυτό συνεπάγεται οτι η $p$ απεικονίζει σφαιρικές γεωδαισιακές σε προβολικές γεωδαισιακές, δηλαδή σε γεωδαισιακές της $d$ στον $\mathbb{R}P^n$ και αντίστροφα κάθε προβολική γεωδαισιακή είναι εικόνα σφαιρικής γεωδαισιακής μέσω της $p$. Από το Πόρισμα 3.3.3 και το Παράδειγμα 4.1.2 προκύπτει οτι το ίχνος κάθε προβολικής γεωδαισιακής είναι εικόνα ενός μέγιστου κύκλου της $S^n$ και είναι τοπολογικά κύκλος. Τα ίχνη των προβολικών γεωδαισιακών στον $\mathbb{R}P^n$ λέγονται προβολικές ευθείες. Παρατηρούμε οτι από δύο διαφορετικά σημεία του $\mathbb{R}P^n$ διέρχεται μία μοναδική προβολική ευθεία. Επιπλέον, δύο οποιεσδήποτε διαφορετικές προβολικές ευθείες

τέμνονται ακριβώς σε ένα σημείο. Έτσι στη γεωμετρία (κατά Klein) $(I_d(\mathbb{R}P^n), \mathbb{R}P^n)$ δεν ισχύει το ευκλείδειο αξίωμα της ύπαρξης παραλλήλων ευθειών, με την έννοια οτι δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες.

Θα ολοκληρώσουμε την παρουσίαση του $n$-διάστατου πραγματικού προβολικού χώρου $\mathbb{R}P^n$ περιγράφοντας τον τρόπο με τον οποίο αυτός χτίζεται από τον $(n-1)$-διάστατο πραγματικό προβολικό χώρο $\mathbb{R}P^{n-1}$. Η απεικόνιση $i : \mathbb{R}P^{n-1} \to \mathbb{R}P^n$ με

$$i([x_1, ..., x_n]) = [x_1, ..., x_n, 0]$$

είναι ισομετρική εμφύτευση του $\mathbb{R}P^{n-1}$ μέσα στον $\mathbb{R}P^n$, δηλαδή

$$d([x], [y]) = d(i([x]), i([y]))$$

για κάθε $[x]$, $[y] \in \mathbb{R}P^{n-1}$. Προφανώς,

$$\mathbb{R}P^n \setminus i(\mathbb{R}P^{n-1}) = \{[x_1, ..., x_n, x_{n+1}] \in \mathbb{R}P^n : x_{n+1} \neq 0\}.$$

Η απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}P^n \setminus i(\mathbb{R}P^{n-1}) \to \mathbb{R}^n$ με

$$\phi([x_1, ..., x_n, x_{n+1}]) = \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, ..., \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$$

είναι συνεχής, ένα-προς-ένα, επί και έχει αντίστροφη την

$$\phi^{-1}(t_1, ..., t_n) = \left[\frac{t_1}{\sqrt{1 + \sum_{k=1}^n t_k^2}}, ..., \frac{t_n}{\sqrt{1 + \sum_{k=1}^n t_k^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{k=1}^n t_k^2}}\right]$$

που είναι επίσης συνεχής. Η $\phi^{-1}$ απεικονίζει τις ευκλείδειες ευθείες στον $\mathbb{R}^n$ στα υποσύνολα των προβολικών ευθειών που περιέχονται στο $\mathbb{R}P^n \setminus i(\mathbb{R}P^{n-1})$. Η $\phi$ λέγεται *συσχετισμένος χάρτης* του $\mathbb{R}P^n$.

Παραδοσιακά ο $i(\mathbb{R}P^{n-1})$ λέγεται ο $(n-1)$-διάστατος πραγματικός προβολικός χώρος στο άπειρο. Στην ειδική περίπτωση $n = 1$ το «σημείο στο άπειρο» $i(\mathbb{R}P^0) = \{[1, 0]\}$ συμβολίζεται με $\infty = [1, 0]$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, για κάθε σημείο $R \in \mathbb{R}P^1 \setminus \{\infty\}$ υπάρχει μοναδικός $t \in \mathbb{R}$ ώστε

$$R = \left[\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right]$$

και τότε

$$d(R, \infty) = \arccos \frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Συνεπώς, $R \to \infty$ τότε και μόνο τότε όταν $|t| \to +\infty$.

## 4.2 Προβολικές ισομετρίες

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε τις ισομετρίες και την ομάδα των ισομετριών $I(\mathbb{R}P^n)$ του μετρικού χώρου $(\mathbb{R}P^n, d)$, $n \geq 1$. Πρώτα παρατηρούμε οτι

κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός $A \in O(n+1,\mathbb{R}) = I(S^n)$ επάγει μία ισομετρία $\tilde{A} : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n$ που ορίζεται καλά από τον τύπο

$$\tilde{A}([x]) = [A(x)]$$

για κάθε $[x] \in \mathbb{R}P^n$. Η $\tilde{A}$ είναι πράγματι ισομετρία γιατί

$$d(\tilde{A}([x]), \tilde{A}([y])) = \arccos|\langle A(x), A(y)\rangle| = \arccos|\langle x, y\rangle| = d([x],[y]).$$

Η απεικόνιση $F : O(n+1,\mathbb{R}) \to I(\mathbb{R}P^n)$ με $F(A) = \tilde{A}$ είναι ομομορφισμός ομάδων. Αν $A \in \mathrm{Ker}F$, τότε για κάθε $x \in S^n$ έχουμε $A(x) \sim x$. Συνεπώς, για κάθε $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ έχουμε $A(x) = x$ ή $A(x) = -x$. Από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής προκύπτει ότι είτε $A(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ είτε $A(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Αυτό δείχνει οτι $\mathrm{Ker}F = \{I_{n+1}, -I_{n+1}\}$.

**Λήμμα 4.2.1.** *Έστω $f \in I(\mathbb{R}P^n)$. Αν υπάρχει μία ορθοκανονική βάση $\{u_1, ..., u_{n+1}\}$ του $\mathbb{R}^{n+1}$ ώστε $f([u_k]) = [u_k]$ για κάθε $0 \le k \le n+1$, όπου έχουμε θέσει*

$$u_0 = \frac{1}{\|u_1 + \cdots + u_{n+1}\|} \cdot (u_1 + \cdots + u_{n+1}),$$

*τότε $f = id_{\mathbb{R}P^n}$.*

*Απόδειξη.* Η $f$ ως ισομετρία που είναι απεικονίζει γεωδαισιακές σε γεωδαισιακές. Για κάθε $1 \le i, j \le n+1$ με $i \ne j$ υπάρχει μία μοναδική γεωδαισιακή $\gamma_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}P^n$ που διέρχεται από τα $[u_i]$, $[u_j]$. Σύμφωνα με το Πόρισμα 3.3.3 η $\gamma_{ij}$ δίνεται από τον τύπο

$$\gamma_{ij}(t) = [(\cos t)u_i + (\sin t)u_j].$$

Αφού, $f([u_i]) = [u_i]$ και $f([u_j] = [u_j]$, συμπεραίνουμε οτι $f \circ \gamma_{ij} = \gamma_{ij}$.

Για κάθε $[x] \in \mathbb{R}P^n$ υπάρχει μία μοναδική γεωδαισιακή $\gamma_{[x]}$ που διέρχεται από τα σημεία $[x]$ και $[u_0]$. Επειδή $[u_0] \notin \gamma_{ij}(\mathbb{R})$, τα ίχνη των $\gamma_{ij}$ και $\gamma_{[x]}$ είναι διαφορετικές προβολικές ευθείες και συνεπώς τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο, το οποίο φυσικά είναι διαφορετικό από το $[u_0]$. Αυτό σημαίνει οτι η $\gamma_{[x]}$ διέρχεται από δύο σταθερά σημεία της $f$ και κατά συνέπεια $f \circ \gamma_{[x]} = \gamma_{[x]}$. Ειδικά, $f([x]) = [x]$. □

**Θεώρημα 4.2.2.** *Για κάθε $f \in I(\mathbb{R}P^n)$ υπάρχει ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός $A \in O(n+1,\mathbb{R})$ ώστε $f = \tilde{A}$.*

*Απόδειξη.* Υπάρχουν $u_1$,..., $u_{n+1} \in S^n$ ώστε $f([e_k]) = [u_k]$, $1 \le k \le n+1$, οπότε

$$d([u_i],[u_j]) = d([e_i],[e_j]) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } i = j, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{όταν } i \ne j. \end{cases}$$

Αυτό σημαίνει οτι το σύνολο $\{u_1, ..., u_{n+1}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{n+1}$. Η γραμμική απεικόνιση $A : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ με $A(e_k) = u_k$, $1 \le k \le n+1$ είναι λοιπόν ορθογώνιος μετασχηματισμός, από την Πρόταση 2.2.2. Προφανώς, $(\tilde{A}^{-1} \circ f)([e_k]) =$

$[e_k]$ για κάθε $1 \leq k \leq n+1$. Από την άλλη μεριά, υπάρχουν $a_1$,..., $a_{n+1} \in \mathbb{R}$ ώστε $a_1^2 + \cdots + a_{n+1}^2 = 1$ και

$$(\tilde{A}^{-1} \circ f)\left(\left[\frac{e_1 + \cdots + e_{n+1}}{\|e_1 + \cdots + e_{n+1}\|}\right]\right) = [a_1 e_1 + \cdots + a_{n+1} e_{n+1}].$$

Έχουμε τώρα

$$\arccos |a_k| = d\left((\tilde{A}^{-1} \circ f)\left(\left[\frac{e_1 + \cdots + e_{n+1}}{\|e_1 + \cdots + e_{n+1}\|}\right]\right), (\tilde{A}^{-1} \circ f)([e_k])\right)$$

$$= d\left(\left[\frac{e_1 + \cdots + e_{n+1}}{\|e_1 + \cdots + e_{n+1}\|}\right], [e_k]\right) = \arccos \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

και συνεπώς $|a_k| = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ για κάθε $1 \leq k \leq n+1$. Αν θέσουμε τώρα

$$e_0 = \frac{1}{\|e_1 + \cdots + e_{n+1}\|} \cdot (e_1 + \cdots + e_{n+1})$$

και

$$B = \sqrt{n+1} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n+1} \end{pmatrix}$$

τότε ο $B$ είναι ορθογώνιος και $(\tilde{B} \circ \tilde{A}^{-1} \circ f)([e_k]) = [e_k]$ για κάθε $0 \leq k \leq n+1$. Από το Λήμμα 4.2.1 προκύπτει οτι

$$f = \tilde{A} \circ \tilde{B}^{-1} = \widetilde{A \circ B^{-1}}. \quad \square$$

Το Θεώρημα 4.2.2 λέει οτι η απεικόνιση $F$ που ορίσαμε στην αρχή είναι επιμορφισμός ομάδων. Από το πρώτο Θεώρημα των Ισομορφισμών έχουμε λοιπόν το ακόλουθο.

**Πόρισμα 4.2.3.** *Για κάθε ακέραιο $n \geq 1$ ο επιμορφισμός ομάδων*

$$F : O(n+1, \mathbb{R}) \to I(\mathbb{R}P^n)$$

*είναι δύο-προς-ένα και επάγει έναν ισομορφισμό ομάδων*

$$O(n+1, \mathbb{R})/\{I_{n+1}, -I_{n+1}\} \cong I(\mathbb{R}P^n). \quad \square$$

Επειδή στην περίπτωση που ο $n$ είναι άρτιος, ο ορθογώνιος μετασχηματισμός $-I_{n+1}$ αντιστρέφει τον προσανατολισμό του $\mathbb{R}^{n+1}$, για τους πραγματικούς προβολικούς χώρους με άρτια διάσταση έχουμε το παρακάτω ακριβέστερο αποτέλεσμα.

**Πόρισμα 4.2.4.** *Για κάθε ακέραιο $k \geq 1$ η απεικόνιση $F$ απεικονίζει ισομορφικά την ειδική ορθογώνια ομάδα $SO(2k+1, \mathbb{R})$ επί της $I(\mathbb{R}P^{2k})$ και συνεπώς*

$$SO(2k+1, \mathbb{R}) \cong I(\mathbb{R}P^{2k}).$$

*Απόδειξη.* Επειδή $\det(-I_{2k+1}) = -1$, έχουμε

$$O(2k+1,\mathbb{R}) = SO(2k+1,\mathbb{R}) \cup (-I_{2k+1})SO(2k+1,\mathbb{R}).$$

Για κάθε $A \in (-I_{2k+1})SO(2k+1,\mathbb{R})$ έχουμε $-A \in SO(2k+1,\mathbb{R})$ και $F(A) = F(-A)$, ενώ $SO(2k+1,\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ker}F = \{I_{n+1}\}$. Κατά συνέπεια, η

$$F|_{SO(2k+1,\mathbb{R})} : SO(2k+1,\mathbb{R}) \to I(\mathbb{R}P^{2k})$$

είναι ισομορφισμός ομάδων. □

## 4.3 Δύο κλασικά θεωρήματα της Προβολικής Γεωμετρίας

Θα αρχίσουμε την παρούσα παράγραφο με μία εναλλακτική πιο αλγεβρική περιγραφή του $n$-διάστατου πραγματικού προβολικού χώρου $\mathbb{R}P^n$. Στο σύνολο $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $xRy$ όταν $y = \lambda x$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Η κλάση ισοδυναμίας $R(x)$ είναι ο 1-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^{n+1}$ που παράγεται από το μη-μηδενικό διάνυσμα $x$, χωρίς το μηδενικό διάνυσμα. Η ένθεση $i : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ με $i(x) = x$ διατηρεί τις σχέσεις ισοδυναμίας $\sim$ στην $n$-σφαίρα και $R$ στο σύνολο $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, αφού αν $y = \pm x$ τότε $xRy$ και συνεπώς επάγει μία καλά ορισμένη απεικόνιση $i_* : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/R$ με $i_*([x]) = R(x)$. Σχηματικά, το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{\quad i \quad} & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{\quad i_* \quad} & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/R \end{array}$$

Η $i_*$ είναι επί, γιατί κάθε 1-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^{n+1}$ τέμνει την $S^n$ σε δύο αντιποδικά σημεία, δηλαδή

$$i_*([\frac{1}{\|x\|}x]) = R(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, ενώ είναι ένα-προς-ένα γιατί αν $x$, $y \in S^n$ και $xRy$, τότε $x = \pm y$.

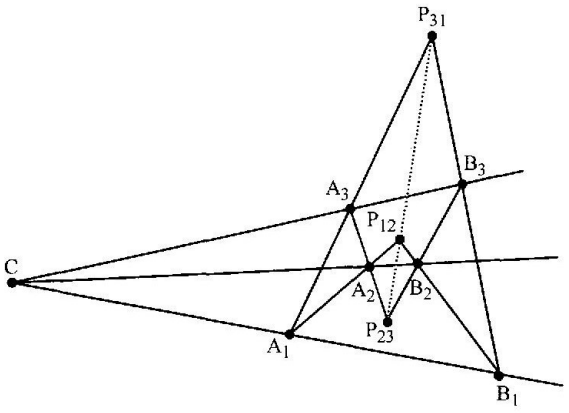
Τα προηγούμενα δείχνουν οτι μεταφέροντας τις δομές που φέρει ο $\mathbb{R}P^n$ στο σύνολο πιλήκο $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/R$ παίρνουμε ένα εναλλακτικό μοντέλο για τον $\mathbb{R}P^n$. Στο εξής θα ταυτίζουμε τον $\mathbb{R}P^n$ με το $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/R$ και θα χρησιμοποιούμε τον ίδιο ενιαίο συμβολισμό μου χρησιμοποιούσαμε μέχρι τώρα. Δηλαδή αν $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, το σύμβολο $[x]$ θα δηλώνει τον 1-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^{n+1}$ που παράγεται από το διάνυσμα $x$. Αυτή η αλγεβρική θεώρηση των προβολικών χώρων διευκολύνει την απόδειξη κλασικών θεωρημάτων της Προβολικής Γεωμετρίας με τη χρήση μεθόδων της Γραμμικής Άλγεβρας. Κάθε προβολική ευθεία στον $\mathbb{R}P^n$ είναι η προβολή από την απεικόνιση πιλήκο ενός 2-διάστατου διανυσματικού υπόχωρου του $\mathbb{R}^{n+1}$, χωρίς το μηδενικό διάνυσμα.

Ως παράδειγμα της ισχύος των αλγεβρικών μεθόδων στην Προβολική Γεωμετρία, θα αποδείξουμε δύο κλασικά θεωρήματα. Το πρώτο οφείλεται στον G. Desargues (1591-1661). Αν $A$, $B \in \mathbb{R}P^n$, $n \geq 2$, θα συμβολίζουμε με $AB$ τη μοναδική προβολική ευθεία που τα περιέχει.

**Θεώρημα 4.3.1.** *Έστω $A_1$, $A_2$, $A_3$, $B_1$, $B_2$, $B_3$, $C \in \mathbb{R}P^n$, $n \geq 2$, τέτοια ώστε:*
*(α) Τα σημεία $A_k$, $B_k$, $C$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους και προβολικά συνευθειακά, $k = 1, 2, 3$.*
*(β) Τα σημεία $C$, $A_1$, $A_2$, $A_3$ δεν είναι προβολικά συνευθειακά ανά τρία και το ίδιο ισχύει για τα $C$, $B_1$, $B_2$, $B_3$.*

*Τότε τα σημεία $P_{12} = A_1A_2 \cap B_1B_2$, $P_{23} = A_2A_3 \cap B_2B_3$ και $P_{31} = A_3A_1 \cap B_3B_1$ είναι προβολικά συνευθειακά.*

*Απόδειξη.* Επιλέγουμε μη-μηδενικά διανύσματα $v_1$, $v_2$, $v_3 \in \mathbb{R}^{n+1}$, με $A_k = [v_k]$, $k = 1, 2, 3$. Επειδή υποθέτουμε οτι τα $A_1$, $A_2$, $A_3$ δεν είναι προβολικά συνευθειακά, το $\{v_1, v_2, v_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$ και συνεπώς παράγει έναν 3-διάστατο διανυσματικό του υπόχωρο $V$. Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις.




Αν $C \subset V$, τότε υπάρχουν $a_1$, $a_2$, $a_3 \in \mathbb{R}$, όχι όλα μηδενικά, ώστε

$$C = [a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3].$$

Μάλιστα, επειδή τα $C$, $A_1$, $A_2$, $A_3$ δεν είναι προβολικά συνευθειακά ανά τρία, όλα τα $a_1$, $a_2$, $a_3$ είναι μη-μηδενικά. Αφού τώρα $A_k = [a_kv_k]$, $k = 1, 2, 3$, αλλάζοντας τα $v_1$, $v_2$, $v_3$ με τα $a_1v_1$, $a_2v_2$, $a_3v_3$, μπορούμε να υποθέσουμε οτι $C = [v_1 + v_2 + v_3]$.

Επειδή τα σημεία $A_k$, $B_k$, $C$ είναι προβολικά συνευθειακά, $k = 1, 2, 3$, υπάρχουν μη-μηδενικοί $b_1$, $b_2$, $b_3 \in \mathbb{R}$ ώστε

$$B_1 = [b_1v_1 + v_1 + v_2 + v_3] = [(b_1 + 1)v_1 + v_2 + v_3],$$

$$B_2 = [b_2v_2 + v_1 + v_2 + v_3] = [v_1 + (b_2 + 1)v_2 + v_3],$$

$$B_3 = [b_3v_3 + v_1 + v_2 + v_3] = [v_1 + v_2 + (b_3 + 1)v_3].$$

Το σημείο $P_{12}$ είναι η προβολή από την απεικόνιση πιλήκο της τομής του 2-διάστατου διανυσματικού υπόχωρου του $\mathbb{R}^{n+1}$ που παράγεται από το $\{v_1, v_2\}$ με τον 2-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο που παράγεται από το $\{((b_1+1)v_1+v_2+v_3, v_1+(b_2+1)v_2+v_3\}$, χωρίς το μηδενικό διάνυσμα. Αυτή η τομή όμως είναι ένας 1-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος που περιέχει το μη-μηδενικό διάνυσμα $b_1v_1 - b_2v_2$. Αυτό σημαίνει οτι $P_{12} = [b_1v_1 - b_2v_2]$ και όμοια $P_{23} = [b_2v_2 - b_3v_3]$, $P_{31} = [b_3v_3 - b_1v_1]$. Αφού

$$b_2v_2 - b_3v_3 = -(b_1v_1 - b_2v_2) - (b_3v_3 - b_1v_1),$$

τα σημεία $P_{12}$, $P_{23}$ και $P_{31}$ είναι προβολικά συνευθειακά.

Αν ο $C$ δεν περιέχεται στον $V$, τότε $C \cap V = \{0\}$ στον $\mathbb{R}^{n+1}$. Έστω $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, μη-μηδενικό με $C = [v]$. Υπάρχουν μη-μηδενικά $c_k$, $d_k \in \mathbb{R}$ ώστε $B_k = [c_kv + d_kv_k]$, $k = 1, 2, 3$. Τώρα το $P_{12}$ είναι η προβολή από την απεικόνιση πιλήκο της τομής του 2-διάστατου διανυσματικού υπόχωρου του $\mathbb{R}^{n+1}$ που παράγεται από το $\{v_1, v_2\}$ με τον 2-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο που παράγεται από το $\{c_1v+d_1v_1, c_2v+d_2v_2\}$, χωρίς το μηδενικό διάνυσμα. Συνεπώς, $P_{12} = [c_2d_1v_1-c_1d_2v_2]$ και όμοια $P_{23} = [c_3d_2v_2-c_2d_3v_3]$, $P_{31} = [c_1d_3v_3 - c_3d_1v_1]$. Αφού

$$c_3d_2v_2 - c_2d_3v_3 = \left(-\frac{c_3}{c_1}\right)(c_2d_1v_1 - c_1d_2v_2) + \left(-\frac{c_2}{c_1}\right)(c_1d_3v_3 - c_3d_1v_1),$$

τα $P_{12}$, $P_{23}$, $P_{31}$ είναι και σε αυτή την περίπτωση προβολικά συνευθειακά. □

Το δεύτερο κλασικό θεώρημα που θα αποδείξουμε με απλές αλγεβρικές μεθόδους είναι το Θεώρημα του Πάππου από την Αλεξάνδρεια που έζησε περίπου από το 290 μέχρι το 350.

**Θεώρημα 4.3.2.** *Έστω $g$, $h$ δύο διαφορετικές προβολικές ευθείες με σημείο τομής το $C$. Αν τα σημεία $A_1$, $A_2$ $A_3 \in g$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους, τα $B_1$, $B_2$ $B_3 \in h$ είναι επίσης διαφορετικά μεταξύ τους και όλα είναι διαφορετικά από το $C$, τότε τα σημεία $Q_{12} = A_1B_2 \cap B_1A_2$, $Q_{23} = A_2B_3 \cap A_3B_2$ και $Q_{31} = A_3B_1 \cap A_1B_3$ είναι προβολικά συνευθειακά.*

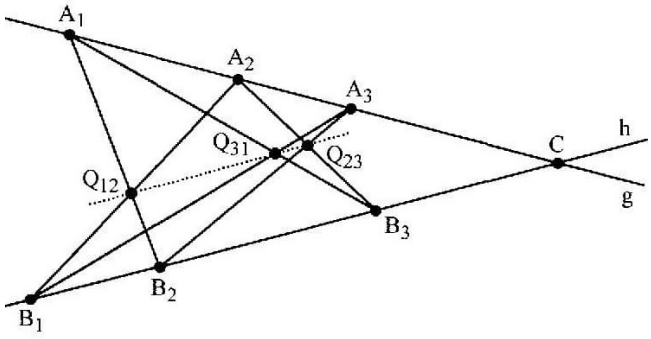
*Απόδειξη.* Υπάρχουν μη-μηδενικά διανύσματα $u$, $v$, $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ ώστε $C = [u]$, $A_1 = [v]$, $B_1 = [w]$ και $A_2 = [u + v]$, $B_2 = [u + w]$. Υπάρχουν επίσης $a$, $b \neq 0$, $1$ ώστε $A_3 = [u + av]$, $B_3 = [u + bw]$, αφού $A_3 \neq A_1$, $A_2$.

Το σημείο $Q_{12} \in \mathbb{R}P^n$ είναι η τομή του 2-διάστατου διανυσματικού υπόχωρου του $\mathbb{R}^{n+1}$ που παράγεται από το $\{v, u + w\}$ με τον 2-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο που παράγεται από το $\{u + v, w\}$. Συνεπώς $Q_{12} = [u + v + w]$.

Το $Q_{31} \in \mathbb{R}P^n$ είναι η τομή του 2-διάστατου διανυσματικού υπόχωρου του $\mathbb{R}^{n+1}$ που παράγεται από το $\{u + av, w\}$ με τον 2-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο που παράγεται από το $\{v, u + bw\}$. Συνεπώς $Q_{31} = [u + av + bw]$.

Τέλος το $Q_{23} \in \mathbb{R}P^n$ είναι η τομή του 2-διάστατου διανυσματικού υπόχωρου του $\mathbb{R}^{n+1}$ που παράγεται από το $\{u + v, u + bw\}$ με τον 2-διάστατο διανυσματικό υπόχωρο που παράγεται από το $\{u + av, u + w\}$. Συνεπώς

$$Q_{23} = \left[\frac{ab - 1}{b - 1}u + av + \frac{(a - 1)b}{b - 1}w\right].$$




Επειδή τώρα

$$\frac{ab-1}{b-1}u + av + \frac{(a-1)b}{b-1}w = \frac{ab}{b-1}(u+v+w) + \frac{1}{1-b}(u+av+bw)$$

το σημείο $Q_{23}$ περιέχεται στη προβολική ευθεία $Q_{12}Q_{31}$. □

Σημειώνουμε οτι το Θεώρημα του Πάππου είναι ισχυρότερο από το Θεώρημα του Desargues. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί το Θεώρημα του Desargues ως συνέπεια του Θεωρήματος του Πάππου. Δεν θα εμβαθύνουμε περαιτέρω σε αυτά τα θέματα, γιατί στις σημειώσεις αυτές δίνεται έμφαση κυρίως στη μετρική γεωμετρία.

## 4.4 Προβολικός Δυϊσμός

Μία ιδιαιτερότητα της 2-διάστατης Προβολικής Γεωμετρίας είναι ο δυϊσμός. Ένα σημείο $A \in \mathbb{R}P^2$ είναι ένας 1-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, χωρίς το μηδενικό διάνυσμα, στον οποίο αντιστοιχεί ένα μοναδικό ορθογώνιο συμπλήρωμα $A^\perp$. Ο $A^\perp$ είναι 2-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, με $\mathbb{R}^3 = A \oplus A^\perp$ και ορίζει μία μοναδική προβολική ευθεία στο προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2$. Αντίστροφα, κάθε προβολική ευθεία $L$ στο $\mathbb{R}P^2$ είναι ένας 2-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, χωρίς το μηδενικό διάνυσμα, στον οποίο αντιστοιχεί ένα μοναδικό ορθογώνιο συμπλήρωμα $L^\perp$, που είναι 1-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και συνεπώς σημείο του $\mathbb{R}P^2$. Υπάρχει λοιπόν μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων και των προβολικών ευθειών στο προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2$.

Σε κάθε αληθή λογική πρόταση της 2-διάστατης Προβολικής Γεωμετρίας, που αφορά σημεία και προβολικές ευθείες, αντιστοιχεί μία δυϊκή της, η οποία είναι επίσης αληθής. Στη δυϊκή τα σημεία έχουν αντικατασταθεί από τις δυϊκές τους προβολικές ευθείες, με την έννοια που περιγράφτηκε προηγουμένως, και οι προβολικές ευθείες με τα δυϊκά

τους σημεία. Έτσι αποδεικνύοντας μία πρόταση στην 2-διάστατη Προβολική Γεωμετρία για σημεία και προβολικές ευθείες έχουμε αποδείξει ταυτόχρονα και τη δυϊκή της. Για παράδειγμα, αν σε μία πρόταση αναφέρεται οτι τρία διαφορετικά σημεία του $\mathbb{R}P^2$ είναι προβολικά συνευθειακά, τότε στη δυϊκή διατύπωση οι αντίστοιχες δυϊκές προβολικές ευθείες συντρέχουν σε ένα κοινό σημείο, το οποίο είναι το δυϊκό της προβολικής ευθείας που τα περιέχει.

Η δυϊκή πρόταση του Θεωρήματος του Desargues έχει την παρακάτω διατύπωση.

**Θεώρημα 4.4.1.** *Έστω $L_1$, $L_2$, $L_3$, $M_1$, $M_2$, $M_3 \in \mathbb{R}P^2$ με $L_k \neq M_k$, $k = 1, 2, 3$ και τέτοια ώστε:*
*(α) Τα $L_1$, $L_2$, $L_3$ δεν είναι προβολικά συνευθειακά, όπως και τα $M_1$, $M_2$, $M_3$.*
*(β) Τα σημεία $L_1L_2 \cap M_1M_2$, $L_2L_3 \cap M_2M_3$ και $L_3L_1 \cap M_3M_1$ είναι προβολικά συνευθειακά.*

*Τότε οι προβολικές ευθείες $L_1M_1$, $L_2M_2$ και $L_3M_3$ συντρέχουν σε ένα κοινό σημείο.* □

Εδώ το σημείο $L_1$ είναι το δυϊκό της προβολικής ευθείας $A_1A_2$ της διατύπωσης του Θεωρήματος 4.3.1, το $L_2$ είναι το δυϊκό σημείο της $A_2A_3$ και το $L_3$ το δυϊκό της $A_3A_1$. Τα σημεία $A_1$, $A_2$, $A_3$ του Θεωρήματος 4.3.1 είναι τα δυϊκά των προβολικών ευθειών $L_1L_2$, $L_2L_3$, $L_3L_1$, αντίστοιχα. Ανάλογα ισχύουν για τα $M_1$, $M_2$, $M_3$ και τα $B_1$, $B_2$, $B_3$. Συμπτωματικά, η παραπάνω δυϊκή διατύπωση του Θεωρήματος του Desargues, είναι το αντίστροφό του.

## 4.5 Προβολικοί μετασχηματισμοί

Κάθε γραμμικός ισομορφισμός $A : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 0$, επάγει μία καλά ορισμένη απεικόνιση $\tilde{A} : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n$ με $\tilde{A}([x]) = [A(x)]$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Η $\tilde{A}$ είναι συνεχής, αντιστρέψιμη και η $\tilde{A}^{-1} = \widetilde{A^{-1}}$ είναι επίσης συνεχής. Επειδή η $A$ υποτίθεται ισομορφισμός, η επαγόμενη $\tilde{A}$ απεικονίζει προβολικές ευθείες σε προβολικές ευθείες. Η απεικόνιση $\tilde{A}$ λέγεται ο *προβολικός μετασχηματισμός* του $\mathbb{R}P^n$ που επάγεται από τον $A$.

Το σύνολο $GL(n+1, \mathbb{R})$ όλων των γραμμικών αυτομορφισμών του $\mathbb{R}^{n+1}$ είναι ως γνωστόν ομάδα και λέγεται η γενική γραμμική ομάδα. Το σύνολο $PGL(n+1, \mathbb{R})$ όλων των προβολικών μετασχηματισμών του $\mathbb{R}P^n$ είναι επίσης ομάδα με πράξη τη σύνθεση και η απεικόνιση $F : GL(n+1, \mathbb{R}) \to PGL(n+1, \mathbb{R})$ με $F(A) = \tilde{A}$ είναι επιμορφισμός ομάδων. Ο πυρήνας του $F$ είναι

$$\mathrm{Ker}F = \{\lambda I_{n+1} : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\},$$

όπως προκύπτει αμέσως από το παρακάτω αλγεβρικό λήμμα.

**Λήμμα 4.5.1.** *Έστω $A \in GL(n+1, \mathbb{R})$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ υπάρχει $\lambda(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ τέτοιο ώστε $A(x) = \lambda(x)x$, τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ώστε $A = \lambda I_{n+1}$.*

*Απόδειξη.* Από την υπόθεση υπάρχει μία μοναδική συνάρτηση $\lambda : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ώστε $A(x) = \lambda(x)x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Αρκεί να δείξουμε οτι η $\lambda$ είναι σταθερή.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ και $t \neq 0$ έχουμε

$$t\lambda(x)x = tA(x) = A(tx) = \lambda(tx)tx$$

και συνεπώς $\lambda(x) = \lambda(tx)$.

Αν πάλι τα $x$, $y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε

$$\lambda(x+y)(x+y) = A(x+y) = A(x) + A(y) = \lambda(x)x + \lambda(y)y$$

και κατά συνέπεια $\lambda(x) = \lambda(x+y) = \lambda(y)$. □

Από το πρώτο Θεώρημα των Ισομορφισμών έχουμε τώρα

$$GL(n+1,\mathbb{R})/\{\lambda I_{n+1} : \lambda \neq 0\} \cong PGL(n+1,\mathbb{R}).$$

Η $PGL(n+1,\mathbb{R})$ λέγεται *προβολική γραμμική ομάδα*. Από το Θεώρημα 4.2.2, κάθε ισομετρία του $\mathbb{R}P^n$ είναι προβολικός μετασχηματισμός. Το Λήμμα 4.2.1 γενικεύεται και απλοποιείται στην αλγεβρική του μορφή.

**Λήμμα 4.5.1.** *Έστω $A \in GL(n+1,\mathbb{R})$. Αν υπάρχει μία βάση $\{u_1, ..., u_{n+1}\}$ του $\mathbb{R}^{n+1}$ ώστε $\tilde{A}([u_k]) = [u_k]$, $0 \leq k \leq n+1$, όπου $u_0 = u_1 + \cdots + u_{n+1}$, τότε $\tilde{A} = id_{\mathbb{R}P^n}$.*

*Απόδειξη.* Για κάθε ακέραιο $1 \leq k \leq n+1$ υπάρχει $a_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ώστε $A(u_k) = a_k u_k$ και υπάρχει $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ώστε $A(u_1 + \cdots + u_{n+1}) = a(u_1 + \cdots + u_{n+1})$. Προκύπτει λοιπόν οτι

$$a_1 u_1 + \cdots + a_{n+1} u_{n+1} = a(u_1 + \cdots + u_{n+1})$$

και συνεπώς $a_1 = \cdots = a_{n+1} = a$. Αυτό σημαίνει οτι $A = aI_{n+1}$. □

Η πρόταση που ακολουθεί είναι γνωστή ως πρώτο θεμελιώδες θεώρημα της Προβολικής Γεωμετρίας.

**Πρόταση 4.5.2.** *Αν $\{u_1, ..., u_{n+1}\}$ και $\{v_1, ..., v_{n+1}\}$ είναι δύο βάσεις του $\mathbb{R}^{n+1}$, τότε υπάρχει ένας μοναδικός προβολικός μετασχηματισμός $f \in PGL(n+1,\mathbb{R})$ ώστε $f([u_k]) = [v_k]$ για κάθε ακέραιο $0 \leq k \leq n+1$, όπου $u_0 = u_1 + \cdots + u_{n+1}$ και $v_0 = v_1 + \cdots + v_{n+1}$.*

*Απόδειξη.* Υπάρχει μοναδική $A \in GL(n+1,\mathbb{R})$ ώστε $A(u_k) = v_k$ για κάθε ακέραιο $1 \leq k \leq n+1$, οπότε και $A(u_0) = v_0$, λόγω της γραμμικότητας. Αρκεί λοιπόν να πάρουμε $f = \tilde{A}$. Για τη μοναδικότητα, αν $g \in PGL(n+1,\mathbb{R})$ για την οποία επίσης $g([u_k]) = [v_k]$ για κάθε ακέραιο $0 \leq k \leq n+1$, τότε $(g^{-1} \circ f)([u_k]) = [u_k]$ για κάθε $0 \leq k \leq n+1$, Από το Λήμμα 4.5.1, $g = f$. □

**Παράδειγμα 4.5.3.** Θα περιγράψουμε τους προβολικούς μετασχηματισμούς της πραγματικής προβολικής ευθείας $\mathbb{R}P^1$, οι οποίοι στην κλασική ορολογία αποκαλούνται ομογραφικές απεικονίσεις. Κάθε $A \in GL(2,\mathbb{R})$ έχει ένα πίνακα (ως προς την κανονική βάση)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

όπου $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{R}$ και $ad - bc \neq 0$. Δηλαδή, η $A$ δίνεται από τον τύπο

$$A(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2).$$

Ακολουθώντας τον κλασικό συμβολισμό γράφουμε $\infty = [1, 0]$ για το «σημείο στο άπειρο», οπότε $i(\mathbb{R}P^0) = \{\infty\}$. Ο συσχετισμένος χάρτης $\phi : \mathbb{R}P^1 \setminus \{\infty\} \to \mathbb{R}$ με

$$\phi([x_1, x_2]) = \frac{x_1}{x_2}$$

είναι ένα-προς-ένα, συνεχής και η $\phi^{-1}(t) = [t, 1]$ είναι επίσης συνεχής, όπως είδαμε στο τέλος της παραγράφου 4.1.

Για κάθε σημείο $[x_1, x_2] \in \mathbb{R}P^1 \setminus \{\infty\}$ έχουμε $x_2 \neq 0$, οπότε $[x_1, x_2] = [\frac{x_1}{x_2}, 1]$ και

$$\tilde{A}([x_1, x_2]) = \left[\frac{a(\frac{x_1}{x_2}) + b}{c(\frac{x_1}{x_2}) + d}, 1\right]$$

όταν $cx_1 + dx_2 \neq 0$. Συνεπώς,

$$(\phi \circ \tilde{A} \circ \phi^{-1})(t) = \frac{at + b}{ct + d}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $ct + d \neq 0$. Αν $cx_1 + dx_2 = 0$, τότε προφανώς $\tilde{A}([x_1, x_2]) = [ax_1 + bx_2, 0] = \infty$, ενώ $\tilde{A}(\infty) = [a, c]$.

Έστω $L$ μία προβολική ευθεία στον πραγματικό προβολικό χώρο $\mathbb{R}P^n$, $n \geq 1$, και $Q$, $R$, $S$, $T$ τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους σημεία που περιέχονται στην $L$. Υπάρχουν $x$, $y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ώστε $Q = [x]$, $R = [y]$ και $S = [x + y]$. Το $\{x, y\}$ είναι βάση του 2-διάστατου διανυσματικού υπόχωρου $L$ του $\mathbb{R}^{n+1}$, αφού $Q \neq R$. Υπάρχει τώρα μοναδικός $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ τέτοιο ώστε $T = [x + cy]$. Παρατηρούμε οτι ο $c$ δεν εξαρτάται από την επιλογή των αντιπροσώπων $x$, $y$. Πράγματι, αν $Q = [x] = [x']$ και $R = [y] = [y']$, τότε υπάρχουν μη-μηδενικοί $a$, $b \in \mathbb{R}$ ώστε $x' = ax$, $y' = by$, οπότε $[x + y] = [ax + by]$, από όπου προκύπτει οτι $a = b$. Συνεπώς, $[x + cy] = [x' + cy'] = T$. Ο πραγματικός αριθμός $c$ λέγεται *διπλός λόγος* της τετράδας των προβολικά συνευθειακών σημείων $Q$, $R$, $S$, $T$. Επειδή $T \neq Q$, $S$, έχουμε $c \neq 0, 1$. Συμβολικά θα γράφουμε $c = [Q, S, R, T]$. Σημειώνουμε όμως οτι δεν υπάρχει κοινά καθιερωμένος συμβολισμός.

Είναι τώρα άμεση συνέπεια της γραμμικότητας ότι ο διπλός λόγος είναι αναλλοίωτος από τους προβολικούς μετασχηματισμούς.

**Παράδειγμα 4.5.4.** Για κάθε τετράδα διαφορετικών μεταξύ τους σημείων $Q$, $R$, $S$, $T \in \mathbb{R}P^1 \setminus \{\infty\}$ θα υπολογίσουμε το διπλό λόγο $[Q, S, R, T]$. Υπάρχουν μοναδικοί και διαφορετικοί μεταξύ τους $t_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k = 1, 2, 3, 4$, ώστε $Q = [t_1, 1]$, $R = [t_2, 1]$, $S = [t_3, 1]$ και $T = [t_4, 1]$. Τότε

$$Q = \left[\frac{t_3 - t_2}{t_1 - t_2}t_1, \frac{t_3 - t_2}{t_1 - t_2}\right],$$

$$R = \left[\frac{t_1 - t_3}{t_1 - t_2}t_2, \frac{t_1 - t_3}{t_1 - t_2}\right],$$

$$S = \left[\frac{t_3 - t_2}{t_1 - t_2}t_1 + \frac{t_1 - t_3}{t_1 - t_2}t_2, 1\right].$$

Ο διπλός λόγος $c = [Q, S, R, T]$ είναι ο μοναδικός πραγματικός αριθμός για τον οποίο υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ώστε

$$\lambda \cdot (t_4, 1) = \left(\frac{t_3 - t_2}{t_1 - t_2}t_1 + c\frac{t_1 - t_3}{t_1 - t_2}t_2, \frac{t_3 - t_2}{t_1 - t_2} + c\frac{t_1 - t_3}{t_1 - t_2}\right)$$

δηλαδή

$$\lambda t_4 = \frac{t_3 - t_2}{t_1 - t_2}t_1 + c\frac{t_1 - t_3}{t_1 - t_2}t_2,$$
$$\lambda = \frac{t_3 - t_2}{t_1 - t_2} + c\frac{t_1 - t_3}{t_1 - t_2}.$$

Αντικαθιστώντας από τη δεύτερη ισότητα στην πρώτη βρίσκουμε

$$(t_3 - t_2)t_4 + c(t_1 - t_3)t_4 = (t_3 - t_2)t_1 + c(t_1 - t_3)t_2$$

και συνεπώς

$$[Q, S, R, T] = c = \frac{(t_1 - t_4)(t_2 - t_3)}{(t_1 - t_3)(t_2 - t_4)}.$$

Από τη συνέχεια του διπλού λόγου, ο τύπος αυτός επεκτείνεται και στην περίπτωση που κάποιο από τα τέσσερα σημεία είναι το $\infty = [1, 0]$. Αν $Q = \infty$, τότε

$$[\infty, S, R, T] = \lim_{Q\to\infty}[Q, S, R, T] = \lim_{|t_1|\to+\infty}\frac{t_1 - t_4}{t_1 - t_3}\cdot\frac{t_2 - t_3}{t_2 - t_4} = \frac{t_2 - t_3}{t_2 - t_4}.$$

Ανάλογοι τύποι προκύπτουν όταν $R = \infty$ ή $S = \infty$ ή $T = \infty$.

## 4.6 Ασκήσεις

1. Αν $x,\ y \in S^n$, $n \geq 1$, με $x \neq \pm y$, να αποδειχθεί οτι η μοναδική προβολική γεωδαισιακή $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}P^n$ που διέρχεται από τα σημεία $[x]$, $[y] \in \mathbb{R}P^n$ δίνεται από τον τύπο

$$\gamma(t) = \left[\left(\cos t - \frac{\langle x, y\rangle \sin t}{\|y - \langle x, y\rangle x\|}\right)x + \frac{\sin t}{\|y - \langle x, y\rangle x\|}y\right].$$

2. Να αποδειχθεί οτι η προβολική ευθεία στο πραγματικό προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2$ που διέρχεται από τα δύο διαφορετικά σημεία $[a_1, a_2, a_3]$, $[b_1, b_2, b_3]$ είναι το σύνολο όλων των σημείων $[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}P^2$ για τα οποία

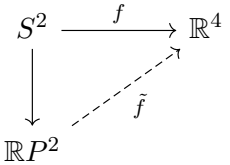
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_3 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Να αποδειχθεί οτι αν $L$, $L'$ είναι δύο προβολικές ευθείες στον $\mathbb{R}P^n$, $n \geq 2$, υπάρχει μία προβολική ισομετρία $f \in I(\mathbb{R}P^n)$ τέτοια ώστε $f(L) = L'$.

4. Να αποδειχθεί οτι η συνεχής απεικόνιση $f : S^2 \to \mathbb{R}^4$ με

$$f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, yz, zx)$$

επάγει μία καλά ορισμένη συνεχή και ένα-προς-ένα απεικόνιση $\tilde{f} : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$ που κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό.




5. Να περιγραφεί η ομάδα $I(\mathbb{R}P^1)$ των ισομετριών της πραγματικής προβολικής ευθείας $\mathbb{R}P^1$.

6. Έστω $\{u_1, u_2, u_3\}$ μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Να αποδειχθεί οτι υπάρχουν ακριβώς τέσσερεις ισομετρίες του $\mathbb{R}P^2$ που αφήνουν τα σημεία $[u_1]$, $[u_2]$, $[u_3] \in \mathbb{R}P^2$ ταυτόχρονα σταθερά.

7. Να αποδειχθεί οτι κάθε ισομετρία του πραγματικού προβολικού επιπέδου $\mathbb{R}P^2$ έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο και μία αναλλοίωτη προβολική ευθεία.

8. Να αποδειχθεί οτι κάθε προβολικός μετασχηματισμός $f : \mathbb{R}P^{2k} \to \mathbb{R}P^{2k}$ έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο.

9. Να ευρεθεί το σημείο τομής των προβολικών ευθειών

$$L_1 = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}P^2 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\},$$

$$L_2 = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}P^2 : 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0\}$$

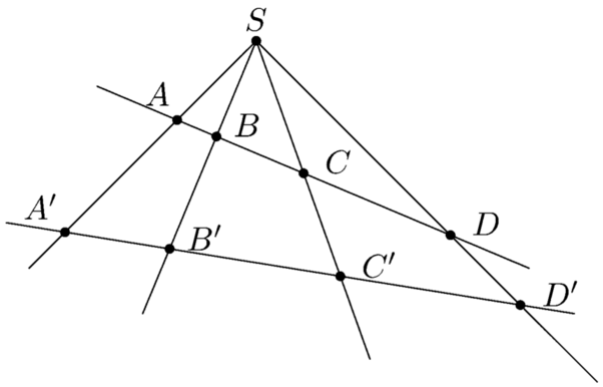
στο προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2$.

10. Αν $SL(n+1, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n+1, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$ είναι η ειδική γραμμική ομάδα, να αποδειχθεί οτι $SL(3, \mathbb{R}) \cong PGL(3, \mathbb{R})$.

11. Να ευρεθεί ο προβολικός μετασχηματισμός $f : \mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^1$ με $f([0, 1]) = [1, 0]$, $f([1, 0]) = [1, 1]$, $f([1, 1]) = [0, 1]$ και να αποδειχθεί οτι $f^3 = id_{\mathbb{R}P^1}$.

12. Να αποδειχθεί οτι τα σημεία $Q = [2, -2, -1, 1]$, $R = [1, 1, 2, 1]$, $S = [3, -1, 1, 2]$ και $T = [6, 2, 7, 5]$ του $\mathbb{R}P^3$ είναι προβολικά συνευθειακά και να υπολογιστεί ο διπλός λόγος $[Q, S, R, T]$.

13. Αν $f : \mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^1$ είναι μία ένα-προς-ένα και επί απεικόνιση η οποία διατηρεί τους διπλούς λόγους, δηλαδή για κάθε τετράδα διαφορετικών μεταξύ τους σημείων $Q$, $R$, $S$, $T \in \mathbb{R}P^1$ ισχύει $[Q, S, R, T] = [f(Q), f(S), f(R), f(T)]$, να αποδειχθεί οτι τότε $f \in PGL(2, \mathbb{R})$.




14. Στον προβολικό χώρο $\mathbb{R}P^n$, $n \geq 2$, θεωρούμε δύο τετράδες προβολικά συνευθειακών διαφορετικών μεταξύ τους σημείων $A$, $B$, $C$, $D$ και $A'$, $B'$, $C'$, $D'$. Υποθέτουμε οτι οι προβολικές ευθείες $AA'$, $BB'$, $CC'$ και $DD'$ συντρέχουν σε ένα σημείο $S \in \mathbb{R}P^n$, το οποίο δεν βρίσκεται πάνω στις δύο προβολικές ευθείες που περιέχουν τις αντίστοιχες τετράδες. Να αποδειχθεί οτι $[A, B, C, D] = [A', B', C', D']$.

# Κεφάλαιο 5

# Επίπεδη Υπερβολική Γεωμετρία

## 5.1 Η σφαίρα του Riemann

Σε αναλογία με τον $n$-διάστατο πραγματικό προβολικό χώρο μπορεί να οριστεί ο $n$-διάστατος μιγαδικός προβολικός χώρος αντικαθιστώντας το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών με το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών. Συγκεκριμένα, στο σύνολο $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $zRw$ όταν $w = \lambda z$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Η κλάση ισοδυναμίας $R(z)$ είναι ο (μιγαδικός) 1-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{C}^{n+1}$ που παράγεται από το μη-μηδενικό διάνυσμα $z$, χωρίς το μηδενικό διάνυσμα. Το σύνολο πιλήκο $\mathbb{C}P^n$ λέγεται *$n$-διάστατος μιγαδικός προβολικός χώρος*, $n \geq 0$. Εναλλακτικά μπορούμε στην $(2n+1)$-σφαίρα

$$S^{2n+1} = \{(z_1, ..., z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_1|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2 = 1\}$$

να θεωρήσουμε τη σχέση ισοδυναμίας $z \sim w$ όταν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| = 1$ ώστε $w = \lambda z$. Η ένθεση $i : S^{2n+1} \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ με $i(z) = z$ διατηρεί τις σχέσεις ισοδυναμίας $\sim$ στην $(2n+1)$-σφαίρα και $R$ στο σύνολο $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ και συνεπώς επάγει μία καλά ορισμένη απεικόνιση $i_*$, που κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} S^{2n+1} & \xrightarrow{\quad i \quad} & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^{2n+1}/\sim & \xrightarrow{\quad i_* \quad} & \mathbb{C}P^n \end{array}$$

στο οποίο τα κάθετα βέλη είναι οι αντίστοιχες απεικονίσεις πιλήκο. Η $i_*$ είναι επί, γιατί κάθε 1-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{C}^{n+1}$ τέμνει την $S^{2n+1}$ σε έναν μέγιστο κύκλο, ενώ είναι προφανώς ένα-προς-ένα. Όπως στην πραγματική περίπτωση, συμβολίζουμε με $[z_1, ..., z_{n+1}]$ το στοιχείο του $\mathbb{C}P^n$ με αντιπρόσωπο το διάνυσμα $(z_1, ..., z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1$,..., $z_{n+1}$ λέγονται ομογενείς συνεταγμένες του $[z_1, ..., z_{n+1}]$. Προφανώς, ο $\mathbb{C}P^0$ είναι μονοσύνολο.

Όπως στην πραγματική περίπτωση, αν $n \geq 1$, ο $\mathbb{C}P^{n-1}$ εμφυτεύεται στον $\mathbb{C}P^n$ μεσω της $i : \mathbb{C}P^{n-1} \to \mathbb{C}P^n$ με $i([z_1, ..., z_n]) = [z_1, ..., z_n, 0]$ και

$$\mathbb{C}P^n \setminus i(\mathbb{C}P^{n-1}) = \{[z_1, ..., z_{n+1}] : z_{n+1} \neq 0\} = \{[z_1, ..., z_n, 1] : (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n\}.$$

Ορίζεται πάλι ο συσχετισμένος χάρτης $\phi : \mathbb{C}P^n \setminus i(\mathbb{C}P^{n-1}) \to \mathbb{C}^n$ με

$$\phi([z_1, ..., z_n, 1]) = (z_1, ..., z_n)$$

που είναι ένα-προς-ένα και επί.

Ειδικά στην περίπτωση $n = 1$ έχουμε $i(\mathbb{C}P^0) = \{[1, 0]\}$ και

$$\mathbb{C}P^1 \setminus i(\mathbb{C}P^0) = \{[z, 1] : z \in \mathbb{C}\}.$$

Αν $\infty$ είναι ένα σύμβολο που δεν ανήκει στο $\mathbb{C}$ και θέσουμε $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, η απεικόνιση $\hat{\phi} : \mathbb{C}P^1 \to \hat{\mathbb{C}}$ με $\hat{\phi}([z, 1]) = z$ και $\hat{\phi}([1, 0]) = \infty$ είναι ένα-προς-ένα και επί. Το σύνολο $\hat{\mathbb{C}}$ λέγεται *σφαίρα του Riemann*.

Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και $\epsilon > 0$ το σύνολο $B(z, \epsilon) = \{u \in \mathbb{C} : |u - z| < \epsilon\}$ είναι ο ανοικτός δίσκος με κέντρο $z$ και ακτίνα $\epsilon$. Ορίζουμε

$$B(\infty, \epsilon) = \{\infty\} \cup \{u \in \mathbb{C} : |u| > \frac{1}{\epsilon}\}.$$

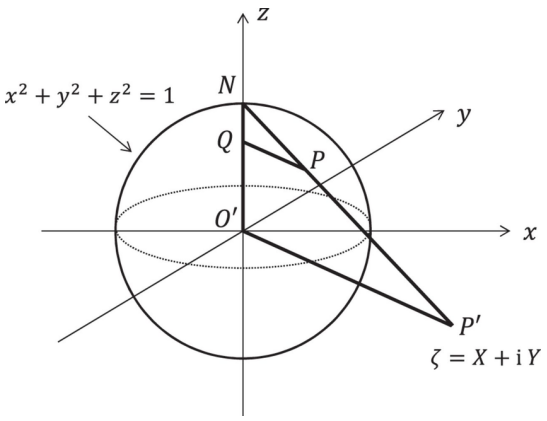
Ένα σύνολο $A \subset \hat{\mathbb{C}}$ λέγεται ανοιχτό αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $B(x, \epsilon) \subset A$. Ένα σύνολο $K \subset \hat{\mathbb{C}}$ λέγεται κλειστό αν το $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$ είναι ανοικτό. Το σύνολο όλων των ανοιχτών υποσυνόλων του $\hat{\mathbb{C}}$ που ορίζονται με αυτόν το τρόπο συνιστά μία τοπολογία. Αν στον $\mathbb{C}P^1$ θεωρήσουμε την τοπολογία πιλήκο, η $\hat{\phi}$ καθίσταται ομοιομορφισμός.

Μία ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\hat{\mathbb{C}}$ συγκλίνει στο $x \in \hat{\mathbb{C}}$, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in B(x, \epsilon)$ για κάθε $n > N$. Μία συνάρτηση $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ λέγεται συνεχής αν $f(x_n) \to f(x)$, όταν $x_n \to x$. Για παράδειγμα, αν $z_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, και $|z_n| \to +\infty$, τότε $z_n \to \infty$ και αντίστροφα.

Τοπολογικά η σφαίρα του Riemann είναι ομοιομορφική με τη 2-σφαίρα

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Αυτό το βλέπουμε μέσω της στερεογραφικής προβολής που θα περιγράψουμε αμέσως τώρα. Εστω $N = (0, 0, 1)$ ο βόρειος πόλος της $S^2$. Στο οριζόντιο επίπεδο που είναι το σύνολο $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ θεωρούμε μιγαδική δομή που το ταυτίζει με το $\mathbb{C}$. Για κάθε $(x, y, z) \in S^2$ η ευθεία που διέρχεται από το $N$ και το $(x, y, z)$ τέμνει το $\mathbb{C}$ ακριβώς σε ένα σημείο $\zeta = \sigma(x, y, z)$.



Η απεικόνιση $\sigma : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$, που είναι η στερεογραφική προβολή, έχει τύπο

$$\sigma(x, y, z) = \frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z}$$

και είναι προφανώς συνεχής. Η $\sigma$ είναι αντιστρέψιμη, η $\sigma^{-1} : \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{N\}$ έχει τύπο

$$\sigma^{-1}(\zeta) = (\frac{2\text{Re}\zeta}{|\zeta|^2+1}, \frac{2\text{Im}\zeta}{|\zeta|^2+1}, \frac{|\zeta|^2-1}{|\zeta|^2+1})$$

και είναι προφανώς συνεχής. Η στερεογραφική προβολή επεκτείνεται στην $S^2$ αν θέσουμε $\sigma(N) = \infty$, οπότε επεκτείνεται η $\sigma^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \to S^2$ με $\sigma^{-1}(\infty) = N$. Οι επεκτάσεις είναι συνεχείς με βάση την έννοια της σύγκλισης στο $\hat{\mathbb{C}}$, που ορίσαμε προηγουμένως. Η επέκταση της στερεογραφικής προβολής είναι συνεχής και στον βόρειο πόλο, γιατί για κάθε ακολουθία $(x_n, y_n, z_n) \to (0, 0, 1)$, όπου $(x_n, y_n, z_n) \in S^2$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$|\sigma(x_n, y_n, z_n)| = |\frac{x_n}{1-z_n} + i\frac{y_n}{1-z_n}| = \frac{x_n^2+y_n^2}{(1-z_n)^2} = \frac{1-z_n^2}{(1-z_n)^2} = \frac{1+z_n}{1-z_n} \to +\infty,$$

και συνεπώς $\sigma(x_n, y_n, z_n) \to \infty = \sigma(N)$. Επίσης, και η $\sigma^{-1}$ είναι συνεχής στο $\infty$,γιατί αν $\zeta_n \to \infty$, τότε $|\zeta_n| \to +\infty$ και προφανώς $\sigma^{-1}(\zeta_n) \to (0, 0, 1) = \sigma^{-1}(\infty)$. Με άλλα λόγια η $\sigma : S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$ είναι ομοιομορφισμός.

Όπως στους πραγματικούς προβολικούς χώρους, κάθε (μιγαδικά) γραμμικός ισομορφισμός $A : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ επάγει έναν (μιγαδικό) προβολικό μετασχηματισμό $\tilde{A} : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$ με $\tilde{A}([z]) = [A(z)]$. Επαναλαμβάνοντας λέξη προς λέξη το Παράδειγμα 4.5.3, αντικαθιστώντας το σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ με το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$, αν $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός με πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

όπου $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{C}$, τότε $ad - bc \neq 0$ και η απεικόνιση

$$f = \hat{\phi} \circ \tilde{A} \circ \hat{\phi}^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$$

δίνεται από τον τύπο

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d}, & \text{όταν } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\dfrac{d}{c}\}, \\ \infty, & \text{όταν } z = -\dfrac{d}{c}, \end{cases}$$

στην περίπτωση $c \neq 0$, ενώ

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και $f(\infty) = \infty$, στην περίπτωση $c = 0$. Μία τέτοια απεικόνιση λέγεται *μετασχηματισμός Möbius* της σφαίρας του Riemann. Με άλλα λόγια οι μετασχηματισμοί Möbius είναι οι προβολικοί μετασχηματισμοί του $\mathbb{C}P^1$ μεταφερμένοι στη σφαίρα του Riemann από τον ομοιομορφισμό $\hat{\phi}$.

Ένας μετασχηματισμός Möbius $f$ είναι προφανώς συνεχής στο $\mathbb{C}\setminus\{-\frac{d}{c}\}$. Επιπλέον,

$$\lim_{z\to\infty}\frac{az+b}{cz+d}=\lim_{z\to\infty}\frac{a+\frac{b}{z}}{c+\frac{d}{z}}=\frac{a}{c}=f(\infty),$$

δηλαδή η $f$ είναι συνεχής στο $\infty$. Επίσης, αν $c\neq 0$, τότε

$$\lim_{z\to-\frac{d}{c}}|az+b|=\frac{1}{|c|}|ad-bc|\neq 0$$

και κατά συνέπεια

$$\lim_{z\to-\frac{d}{c}}|f(z)|=+\infty,$$

που σημαίνει οτι

$$\lim_{z\to-\frac{d}{c}}f(z)=\infty=f(-\frac{d}{c}).$$

Έτσι κάθε μετασχηματισμός Möbius είναι συνεχής στην σφαίρα του Riemann.

Ο αντίστροφος του μετασχηματισμού Möbius $f$ δίνεται από τον τύπο

$$f^{-1}(z)=\frac{-dz+b}{cz-a},f^{-1}(\frac{a}{c})=\infty,f^{-1}(\infty)=-\frac{d}{c}.$$

Ειδικά, κάθε μετασχηματισμός Möbius είναι ομοιομορφισμός. Αν τώρα

$$g(z)=\frac{a'z+b'}{c'z+d'},$$

τότε έχουμε

$$(g\circ f)(z)=\frac{(a'a+b'c)z+(a'b+b'd)}{(c'a+d'c)z+(c'b+d'd)}.$$

Το σύνολο $\mathcal{M}^+$ των μετασχηματισμών Möbius είναι μία ομάδα μετασχηματισμών της $\hat{\mathbb{C}}$. Σε ακριβή αναλογία με την πραγματική περίπτωση, όπως στην παράγραφο 4.5 έχουμε $\mathcal{M}^+\cong PGL(2,\mathbb{C})=GL(2,\mathbb{C})/\{\lambda I_2:\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\}\cong SL(2,\mathbb{C})/\{I_2,-I_2\}=PSL(2,\mathbb{C})$.

Η στροφή $\rho_\theta(z)=e^{i\theta}z$ είναι μετασχηματισμός Möbius, για $c=b=0,d=1$. Επίσης, η μεταφορά $\tau_b(z)=z+b$ είναι μετασχηματισμός Möbius, για $a=d=1,c=0$. Ο μετασχηματισμός Möbius $J(z)=\frac{1}{z}$ λέγεται αντιστροφή. Είναι προφανές οτι αν

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d},c\neq 0,$$

τότε

$$f(z)=\frac{acz+bc}{c^2z+cd}=\frac{acz+ad-(ad-bc)}{c^2z+cd}=\frac{a}{c}-\frac{ad-bc}{c^2z+cd}.$$

Έτσι, αν θέσουμε $g(z)=c^2z+cd$ και $h(z)=-(ad-bc)z+\frac{a}{c}$, τότε $f=h\circ J\circ g$.

Η ανάκλαση $\tau(z)=-\bar{z}$ ως προς τον φανταστικό άξονα επεκτείνεται σε έναν ομοιομορφισμό του $\hat{\mathbb{C}}$, αν θέσουμε $\tau(\infty)=\infty$ και δεν είναι μετασχηματισμός Möbius. Πράγματι, αν υπάρχουν $a,b,c,d\in\mathbb{C}$, ώστε για κάθε $z\in\mathbb{C}$ να ισχύει

$$\bar{z}=\frac{az+b}{cz+d},$$

τότε $c|z|^2 + d\bar{z} = az + b$. Για $z = 0$ παίρνουμε $b = 0$. Για $z = \pm 1$, παίρνουμε $c = a - d = d - a$, οπότε $c = 0$, $a = d$. Αλλά για $z = i$ έχουμε $d = 0$, δηλαδή αντίφαση, αφού τότε $a = b = c = d = 0$.

Αν $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, όπου $ad - bc \neq 0$, τότε έχουμε

$$(f \circ \tau)(z) = \frac{-a\bar{z} + b}{-c\bar{z} + d} \text{ και } (\tau \circ f)(z) = \frac{-\bar{a}\bar{z} - \bar{b}}{\bar{c}\bar{z} + \bar{d}}.$$

Αφού $\tau = \tau^{-1}$, έχουμε $(f \circ \tau)^{-1} = \tau \circ f^{-1}$. Τέλος, αν $f, g \in \mathcal{M}^+$, τότε έχουμε $(g \circ \tau) \circ (f \circ \tau) \in \mathcal{M}^+$. Αυτά δείχνουν οτι το σύνολο $\mathcal{M} = \mathcal{M}^+ \cup \mathcal{M}^+ \circ \tau$ είναι ομάδα μετασχηματισμών της $\hat{\mathbb{C}}$. Τα στοιχεία της $\mathcal{M}$ λέγονται γενικευμένοι μετασχηματισμοί Möbius.

## 5.2 Η γεωμετρία των μετασχηματισμών Möbius

Οπως είδαμε το σύνολο των μετασχηματισμών Möbius $\mathcal{M}^+$ και το σύνολο των γενικευμένων μετασχηματισμών Möbius $\mathcal{M}$ αποτελούν ομάδες μετασχηματισμών. Μάλιστα η $\mathcal{M}^+$ είναι κανονική υποομάδα της $\mathcal{M}$ με δείκτη 2. Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε τα κύρια αναλλοίωτα της γεωμετρίας $(\mathcal{M}^+, \hat{\mathbb{C}})$, η οποία ταυτίζεται με τη μιγαδική Προβολική Συσχετισμένη Γεωμετρία $(PGL(2,\mathbb{C}), \mathbb{C}P^1)$.

Το $x \in \hat{\mathbb{C}}$ λέγεται σταθερό σημείο του $f \in \mathcal{M}^+$, αν $f(x) = x$.

**Λήμμα 5.2.1.** *Κάθε $f \in \mathcal{M}^+$ με $f \neq id$ έχει το πολύ δύο σταθερά σημεία στην $\hat{\mathbb{C}}$.*

*Απόδειξη.* Εστω οτι

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

όπου $ad - bc \neq 0$. Υποθέτουμε πρώτα οτι $c = 0$. Τότε, $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ και ένα σταθερό σημείο είναι το $\infty$. Τα άλλα ενδεχόμενα σταθερά σημεία βρίσκονται στο $\mathbb{C}$ και είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = z.$$

Αν $a = d$, τότε $z + \frac{b}{d} = z$ και συνεπώς $b = 0$, δηλαδή $f = id$. Άρα $a \neq d$ και συνεπώς $z = \frac{b}{d-a}$. Δηλαδή, η $f$ έχει δύο σταθερά σημεία. Έστω τώρα οτι $c \neq 0$. Τότε $f(\infty) = \frac{a}{c}$ και συνεπώς όλα τα σταθερά σημεία είναι οι λύσεις στο $\mathbb{C}$ της εξίσωσης $cz^2 + (d-a)z - b = 0$, που είναι το πολύ δύο. □

Το ακόλουθο θεώρημα είναι θεμελειώδες στην γεωμετρία των μετασχηματισμών Möbius.

**Θεώρημα 5.2.2.** *Για κάθε ζεύγος διατεταγμένων τριάδων $(z_1, z_2, z_3)$ και $(w_1, w_2, w_3)$ διαφορετικών μεταξύ τους σημείων της $\hat{\mathbb{C}}$ υπάρχει ακριβώς ένας $f \in \mathcal{M}^+$, ώστε*

$$f(z_1) = w_1, f(z_2) = w_2 \text{ και } f(z_3) = w_3.$$

*Απόδειξη.* Πρώτα κατασκευάζουμε έναν $g \in \mathcal{M}^+$ ώστε $g(z_1) = 0$, $g(z_2) = 1$ και $g(z_3) = \infty$. Ενας τέτοιος $g \in \mathcal{M}^+$ έχει τύπο

$$g(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

Ομοια υπάρχει ένας $h \in \mathcal{M}^+$ ώστε $h(w_1) = 0$, $h(w_2) = 1$ και $h(w_3) = \infty$. Συνεπώς, ο $f = h^{-1} \circ g$ ικανοποιεί τις $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$, $f(z_3) = w_3$. Η μοναδικότητα του $f$ προκύπτει από το Λήμμα 3.1, γιατί αν ο $f_0 \in \mathcal{M}^+$ ικανοποιεί επίσης τις $f_0(z_1) = w_1$, $f_0(z_2) = w_2$, $f_0(z_3) = w_3$, τότε ο $f^{-1} \circ f_0$ έχει τρία σταθερά σημεία και συνεπώς είναι η ταυτοτική απεικόνιση. □

Ο διπλός λόγος ορίζεται για προβολικούς μετασχηματισμούς του $\mathbb{C}P^1$ με τον ίδιο τρόπο όπως στην πραγματική περίπτωση. Ο υπολογισμός του παραδείγματος 4.5.4 επαναλαβάνεται αυτούσιος και οδηγεί στον ορισμό του διπλού λόγου στη σφαίρα του Riemann.

**Ορισμός.5.2.3** Αν $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ είναι τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους σημεία, ο διπλός λόγος $[z_1, z_2; z_3, z_4]$ είναι ο

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_4}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4}.$$

Αν $z_1 = \infty$, επεκτείνουμε τον ορισμό του διπλού λόγου θέτοντας

$$[\infty, z_2; z_3, z_4] = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4},$$

έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η συνέχεια του διπλού λόγου ως συνάρτησης των $z_1, z_2, z_3, z_4$, αφού τότε έχουμε

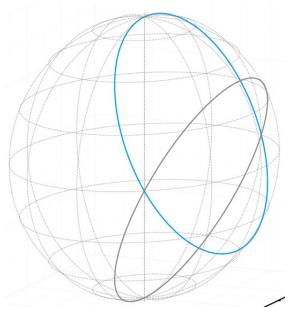
$$\lim_{z\to\infty} [z, z_2; z_3, z_4] = \lim_{z\to\infty} \frac{z - z_4}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4} = \lim_{z\to\infty} \frac{1 - \frac{z_4}{z}}{1 - \frac{z_2}{z}} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4} = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4}.$$

Ομοια ορίζονται τα $[z_1, \infty; z_3, z_4]$, $[z_1, z_2; \infty, z_4]$ και $[z_1, z_2; z_3, \infty]$. Οπως δείχνει η απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.2, ο μοναδικός $f \in \mathcal{M}^+$ με $f(z_1) = 0$, $f(z_2) = 1$ και $f(z_3) = \infty$ έχει τύπο $f(z) = [z, z_3; z_2, z_1]$.

**Πρόταση 5.2.4.** *Ο διπλός λόγος παραμένει αναλλοίωτος από την ομάδα μετασχηματισμών $\mathcal{M}^+$, δηλαδή $[z_1, z_2; z_3, z_4] = [f(z_1), f(z_2); f(z_3), f(z_4)]$ για κάθε $f \in \mathcal{M}^+$ και $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ διαφορετικά μεταξύ τους.*

*Απόδειξη.* Εστω $f \in \mathcal{M}^+$ και $g \in \mathcal{M}^+$ με τύπο $g(z) = [z, z_2; z_3, z_4]$. Ο $g$ είναι ο μοναδικός μετασχηματισμός Möbius για τον οποίο ισχύει $g(z_2) = \infty$, $g(z_3) = 1$ και $g(z_4) = 0$. Ο $g \circ f^{-1}$ είναι τότε ο μοναδικός μετασχηματισμός Möbius με $(g \circ f^{-1})(f(z_2)) = \infty$, $(g \circ f^{-1})(f(z_3)) = 1$ και $(g \circ f^{-1})(f(z_4)) = 0$. Αρα $(g \circ f^{-1})(z) = [z, f(z_2); f(z_3), f(z_4)]$ για κάθε $z \in \hat{\mathbb{C}}$ και κατά συνέπεια $[z_1, z_2; z_3, z_4] = g(z_1) = (g \circ f^{-1})(f(z_1)) = [f(z_1), f(z_2); f(z_3), f(z_4)]$.

**Ορισμός 5.2.5.** Ένα σύνολο $K \subset \hat{\mathbb{C}}$ λέγεται κύκλος στην σφαίρα του Riemann αν είναι ευκλείδειος κύκλος στο $\mathbb{C}$ ή $K = l \cup \{\infty\}$, όπου $l$ είναι μια ευκλείδεια ευθεία στο $\mathbb{C}$.



**Πρόταση 5.2.6.** *Αν τα $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους, ο διπλός λόγος $[z_1, z_2; z_3, z_4]$ είναι πραγματικός αριθμός τότε και μόνον τότε όταν τα $z_1, z_2, z_3, z_4$ βρίσκονται πάνω σε έναν κύκλο στην $\hat{\mathbb{C}}$.*

*Απόδειξη.* Έστω $f \in \mathcal{M}^+$ ο μοναδικός μετασχηματισμός Möbius ώστε $f(z_2) = \infty$, $f(z_3) = 1$, $f(z_4) = 0$, δηλαδή

$$f(z) = [z, z_2; z_3, z_4] = \frac{az + b}{cz + d},$$

για κατάλληλα $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ με $ad - bc \neq 0$. Έχουμε τώρα οτι $f(z) \in \mathbb{R}$ τότε και μόνον τότε όταν $f(z) = \overline{f(z)}$ και αντικαθιστώντας

$$(a\bar{c} - c\bar{a})z\bar{z} + (a\bar{d} - c\bar{b})z + (b\bar{c} - d\bar{a})\bar{z} + (b\bar{d} - d\bar{b}) = 0.$$

Έτσι έχουμε δύο περιπτώσεις. Αν $a\bar{c} - c\bar{a} = 0$, η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$\lambda z - \bar{\lambda}\bar{z} + \mu - \bar{\mu} = 0,$$

όπου έχουμε θέσει $\lambda = a\bar{d} - c\bar{b}$ και $\mu = b\bar{d}$. Αυτή είναι ισοδύναμη με την $\mathrm{Im}(\lambda z + \mu) = 0$, που είναι η εξίσωση της ευκλείδειας ευθείας με κλίση $-\mathrm{Im}\lambda/\mathrm{Re}\lambda$. Αν $a\bar{c} - c\bar{a} \neq 0$, διαιρώντας έχουμε

$$z\bar{z} + \left(\frac{a\bar{d} - c\bar{b}}{a\bar{c} - c\bar{a}}\right)z + \left(\frac{b\bar{c} - d\bar{a}}{a\bar{c} - c\bar{a}}\right)\bar{z} + \left(\frac{b\bar{d} - d\bar{b}}{a\bar{c} - c\bar{a}}\right) = 0$$

οπότε

$$\left(z - \frac{d\bar{a} - b\bar{c}}{a\bar{c} - c\bar{a}}\right) \cdot \left(\bar{z} - \frac{\overline{d\bar{a} - b\bar{c}}}{\overline{a\bar{c} - c\bar{a}}}\right) = \frac{d\bar{b} - b\bar{d}}{a\bar{c} - c\bar{a}} + \left|\frac{d\bar{a} - b\bar{c}}{a\bar{c} - c\bar{a}}\right|^2$$

ή ακόμα

$$\left|z - \frac{d\bar{a} - b\bar{c}}{a\bar{c} - c\bar{a}}\right|^2 = \left|\frac{ad - bc}{a\bar{c} - c\bar{a}}\right|^2$$

που είναι η εξίσωση ενός κύκλου στο $\mathbb{C}$. □

**Θεώρημα 5.2.7.** *Κάθε $f \in \mathcal{M}^+$ απεικονίζει κύκλους σε κύκλους στην $\hat{\mathbb{C}}$. Δηλαδή, το σύνολο των κύκλων της $\hat{\mathbb{C}}$ είναι αναλλοίωτη κλάση σχημάτων της γεωμετρίας $(\mathcal{M}^+, \hat{\mathbb{C}})$.*

*Απόδειξη.* Εστω $K \subset \hat{\mathbb{C}}$ ένας κύκλος και $z_1, z_2, z_3 \in K$. Τότε

$$K = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : [z, z_1; z_2, z_3] \in \mathbb{R}\},$$

από την Πρόταση 5.2.6. Συνεπώς, από την Πρόταση 5.2.4 για κάθε $f \in \mathcal{M}^+$ έχουμε

$$f(K) = \{z' \in \hat{\mathbb{C}} : [z', f(z_1); f(z_2), f(z_3)] \in \mathbb{R}\},$$

αφού η $f$ είναι 1-1 και επί, που είναι κύκλος στην $\hat{\mathbb{C}}$, πάλι από την πρόταση 5.2.6. □

**Θεώρημα 5.2.8.** *Αν $A$, $B \subset \hat{\mathbb{C}}$ είναι δύο κύκλοι, τότε υπάρχει $f \in \mathcal{M}^+$ ώστε $f(A) = B$.*

*Απόδειξη.* Έστω $z_1, z_2, z_3 \in A$ τρία διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και όμοια $w_1, w_2, w_3 \in B$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.2.2, υπάρχει $f \in \mathcal{M}^+$ ώστε $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ και $f(z_3) = w_3$. Από το Θεώρημα 5.2.7, το $f(A)$ είναι ένας κύκλος στην $\hat{\mathbb{C}}$, που διέρχεται από τα σημεία $w_1, w_2, w_3$. Αφού οι κύκλοι $f(A)$, $B$ έχουν τρία διαφορετικά σημεία κοινά, ταυτίζονται. □

Μία αναλλοίωτη ποσότητα για τους μετασχηματισμούς Möbius είναι η γωνία. Έστω $\gamma_1 : (\alpha_1, \beta_1) \to \mathbb{C}$ και $\gamma_2 : (\alpha_2, \beta_2) \to \mathbb{C}$ δύο κανονικές διαφορίσιμες καμπύλες και $z = \gamma_1(t) = \gamma_2(s)$ ένα σημείο τομής τους. Η προσανατολισμένη γωνία τους $\angle(\gamma_1, \gamma_2)(z)$ στο σημείο $z$ είναι το μοναδικό $0 \leq \phi < 2\pi$ ώστε

$$\frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_2'(s)} = \left|\frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_2'(s)}\right| e^{i\phi}.$$

**Λήμμα 5.2.9.** *Εστω $\gamma : (\alpha, \beta) \to \mathbb{C}$ μία διαφορίσιμη καμπύλη και $f \in \mathcal{M}^+$ με τύπο*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

*Για κάθε $\alpha < t < \beta$ με $\gamma(t) \neq -\dfrac{d}{c}$ η $f \circ \gamma$ είναι διαφορίσιμη στο $t$ και*

$$(f \circ \gamma)'(t) = \frac{ad - bc}{(c\gamma(t) + d)^2} \cdot \gamma'(t).$$

*Απόδειξη.* Εχουμε

$$(f \circ \gamma)'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{a\gamma(t+h) + b}{c\gamma(t+h) + d} - \frac{a\gamma(t) + b}{c\gamma(t) + d}\right) =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(ad - bc)(\gamma(t+h) - \gamma(t))}{(c\gamma(t+h) + d)(c\gamma(t) + d)} = \frac{ad - bc}{(c\gamma(t) + d)^2} \cdot \gamma'(t). \quad \square$$

**Θεώρημα 5.2.10.** *Έστω $\gamma_1$, $\gamma_2$ δύο κανονικές διαφορίσιμες καμπύλες που τέμνονται στο σημείο $\gamma_1(t) = \gamma_2(s) = z_0$. Έστω $f \in \mathcal{M}^+$ με τύπο*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

*ώστε $z_0 \neq -\frac{d}{c}$. Τότε $\angle(\gamma_1, \gamma_2)(z_0) = \angle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2)(f(z_0))$.*

*Απόδειξη.* Από το λήμμα 5.2.9 προκύπει οτι

$$\frac{(f \circ \gamma_1)'(t)}{(f \circ \gamma_2)'(s)} = \frac{\overline{\frac{ad-bc}{(cz_0+d)^2}}}{\frac{ad-bc}{(cz_0+d)^2}} \cdot \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_2'(s)} = \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_2'(s)},$$

και το συμπέρασμα είναι άμεσο από τους ορισμούς. □

Η συμπεριφορά της ανάκλασης ως προς τον φανταστικό (ή πραγματικό) άξονα σε σχέση με τις γωνίες είναι η ακόλουθη.

**Πρόταση 5.2.11.** *Έστω $\gamma_1$, $\gamma_2$ δύο κανονικές διαφορίσιμες καμπύλες που τέμνονται στο σημείο $\gamma_1(t) = \gamma_2(s) = z_0 \in \mathbb{C}$. Αν $\tau$ είναι η ανάκλαση ως προς τον φανταστικό άξονα, τότε $\angle(\gamma_1, \gamma_2)(z_0) = -\angle(\tau \circ \gamma_1, \tau \circ \gamma_2)(\tau(z_0))$.*

*Απόδειξη.* Προφανώς

$$\frac{(\tau \circ \gamma_1)'(t)}{(\tau \circ \gamma_2)'(s)} = \frac{\overline{\gamma_1'(t)}}{\overline{\gamma_2'(s)}}$$

και το συμπέρασμα είναι φανερό. □

Το αποτέλεσμα της Πρότασης 5.2.11 αντικατοπτρίζει το γεγονός οτι η ανάκλαση αντιστρέφει τον προσανατολισμό της $\hat{\mathbb{C}}$, σε αντίθεση με τους μετασχηματισμούς Möbius που τον διατηρούν.

## 5.3 Το υπερβολικό επίπεδο

Έστω $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$ και $I(\mathbb{H}^2) = \{f \in \mathcal{M} : f(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2\}$. Το σύνολο $I(\mathbb{H}^2)$ είναι προφανώς ομάδα μετασχηματισμών του $\mathbb{H}^2$. Το $\mathbb{H}^2$ λέγεται *υπερβολικό επίπεδο* και η γεωμετρία Klein $(I(\mathbb{H}^2), \mathbb{H}^2)$ λέγεται *Υπερβολική Γεωμετρία*. Είναι σαφές οτι ο ορισμός της $I(\mathbb{H}^2)$ δεν είναι βολικός. Θα βρούμε τους τύπους των στοιχείων της. Πρώτα παρατηρούμε οτι αφού κάθε στοιχείο της $f$ είναι ομοιομορφισμός της $\hat{\mathbb{C}}$ και $f(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$, πρέπει $f(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$, όπου $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

**Λήμμα 5.3.1.** *Έστω $f \in \mathcal{M}^+$. Αν $f(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$, τότε ο μετασχηματισμός Möbius $f$ έχει τύπο με πραγματικούς συντελεστές και αντίστροφα.*

*Απόδειξη.* Το αντίστροφο είναι προφανές. Έστω λοιπόν οτι $f(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$, όπου

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Ξεχωρίζουμε τρείς περιπτώσεις:
(α) Έστω οτι $a \neq 0$, $c \neq 0$. Τότε $\frac{a}{c} = f(\infty) \in \mathbb{R}$, $-\frac{b}{a} = f^{-1}(0) \in \mathbb{R}$ και $-\frac{d}{c} = f^{-1}(\infty) \in \mathbb{R}$. Έχουμε λοιπόν $a = f(\infty)c$, $b = -af^{-1}(0) = -f^{-1}(0)f(\infty)c$ και $d = -f^{-1}(\infty)c$. Άρα

$$f(z) = \frac{f(\infty)z + (-f^{-1}(0)f(\infty))}{z + (-f^{-1}(\infty))},$$

δηλαδή ο τύπος του $f$ έχει πραγματικούς συντελεστές.
(β) Έστω οτι $a = 0$, οπότε $c \neq 0$. Πάλι έχουμε $f^{-1}(\infty) \in \mathbb{R}$ και $d = -cf^{-1}(\infty)$. Συνεπώς

$$b = f(z)(cz + d) = cf(z)(z - f^{-1}(\infty))$$

για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$. Επιλέγουμε τώρα ένα $z_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, οπότε $f(z_0) \in \mathbb{R}$ και για κάθε $z \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$f(z) = \frac{f(z_0)z_0 - f(z_0)f^{-1}(\infty)}{z - f^{-1}(\infty)},$$

δηλαδή ο $f$ έχει τύπο με πραγματικούς συντελεστές.
(γ) Έστω οτι $c = 0$, οπότε $a \neq 0$, $d \neq 0$. Τότε έχουμε $f(0)$, $f(1) \in \mathbb{R}$ και $b = f(0)d$, $a = f(1)d - b = (f(1) - f(0))d$. Άρα $f(z) = (f(1) - f(0))z + f(0)$ και ο $f$ έχει πάλι τύπο με πραγματικούς συντελεστές. □

**Θεώρημα 5.3.2.** *Για έναν $f \in \mathcal{M}^+$ ισχύει $f(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$ τότε και μόνον τότε όταν έχει τύπο*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

*όπου $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{R}$ και $ad - bc = 1$.*

*Απόδειξη.* Από το Λήμμα 5.3.1 ο $f$ έχει τύπο

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

όπου $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{R}$ και $ad - bc \neq 0$. Κατά συνέπεια

$$\mathrm{Im} f(z) = -\frac{i}{2}(f(z) - \overline{f(z)}) = -\frac{i}{2}\left(\frac{az + b}{cz + d} - \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}\right) = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2}\mathrm{Im} z.$$

Έτσι έχουμε $f(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$ τότε και μόνον τότε όταν $ad - bc > 0$. Διαιρώντας τον αριθμητή και τον παρανομαστή του τύπου του $f$ με $\sqrt{ad - bc}$ προκύπτει το συμπέρασμα. □

**Θεώρημα 5.3.3.** *Η ομάδα μετασχηματισμών $I(\mathbb{H}^2)$ αποτελείται από μετασχηματισμούς $f \in \mathcal{M}$ που έχουν τύπο*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ όπου } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ και } ad - bc = 1 \text{ ή}$$

$$f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d},\ \text{όπου } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ και } ad - bc = -1.$$

*Απόδειξη.* Αν $f \in \mathcal{M}^+$, έχουμε την πρώτη μορφή από το Θεώρημα 5.3.2. Τα στοιχεία του $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}^+$ είναι της μορφής $f \circ \tau$, όπου $f \in \mathcal{M}^+$ και $\tau$ είναι η ανάκλαση ως προς τον φανταστικό άξονα. Τότε $(f \circ \tau)(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$ ακριβώς όταν $f(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$ και $f(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$, αφού $\tau(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$. Από το Θεώρημα 5.3.2, ο $f$ δίνεται από τύπο

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},\ \text{όπου } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ και } ad - bc = 1,$$

οπότε

$$(f \circ \tau)(z) = \frac{(-a)\bar{z} + b}{(-c)\bar{z} + d},\ \text{όπου } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ και } (-a)d - b(-c) = -1$$

και παίρνουμε την δεύτερη μορφή. □

Αν θέσουμε $I^+(\mathbb{H}^2) = \mathcal{M}^+ \cap I(\mathbb{H}^2)$, τότε

$$I^+(\mathbb{H}^2) = \{f \in \mathcal{M}^+ : f(z) = \frac{az + b}{cz + d},\ \text{όπου } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ και } ad - bc = 1\},$$

και $I(\mathbb{H}^2) = I^+(\mathbb{H}^2) \cup I^+(\mathbb{H}^2) \circ \tau$, όπου $\tau(z) = -\bar{z}$ είναι η ανάκλαση ως προς τον φανταστικό άξονα. Η απεικόνιση $F : SL(2, \mathbb{R}) \to I^+(\mathbb{H}^2)$ με

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f,\ \text{με τύπο } f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

είναι επιμορφισμός ομάδων, όπως εύκολα διαπιστώνεται, με πυρήνα $\{I_2, -I_2\}$, όπου $I_2$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας. Κατά συνέπεια $PSL(2, \mathbb{R}) \cong I^+(\mathbb{H}^2)$.

**Πρόταση 5.3.4.** *Για κάθε $z, w \in \mathbb{H}^2$ υπάρχει $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$ ώστε $f(z) = w$.*

*Απόδειξη.* Αρκεί να δείξουμε οτι για κάθε $z \in \mathbb{H}^2$ υπάρχει $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$ ώστε $f(z) = i$. Αν $z = a + ib$, όπου $a$, $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ και

$$f(u) = \frac{1}{b}u - \frac{a}{b},$$

τότε $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$ και $f(z) = i$. □

**Θεώρημα 5.3.5.** *Έστω $K \subset \hat{\mathbb{C}}$ ένας κύκλος που τέμνει κάθετα τον κύκλο $\hat{\mathbb{R}}$. Τότε για κάθε $f \in I(\mathbb{H}^2)$, ο $f(K)$ είναι κύκλος που τέμνει επίσης κάθετα τον $\hat{\mathbb{R}}$ και $f(K \cap \mathbb{H}^2) = f(K) \cap \mathbb{H}^2$.*

*Απόδειξη.* Έστω πρώτα οτι $K \subset \mathbb{C}$. Τότε ο $K$ τέμνει τον $\hat{\mathbb{R}}$ σε δύο σημεία στο $\mathbb{R}$. Τουλάχιστον ένα από τα δύο δεν είναι το $f^{-1}(\infty)$. Αν αυτό είναι το $z \in \mathbb{R}$, τότε από το Θεώρημα 5.2.10 ο κύκλος $f(K) \subset \hat{\mathbb{C}}$ τέμνει κάθετα τον $\hat{\mathbb{R}}$ στο $f(z)$. Αν $f(K) \subset \mathbb{C}$, ο $f(K)$ είναι ευκλείδειος κύκλος που τέμνει κάθετα τον πραγματικό άξονα $\mathbb{R}$. Αν $\infty \in f(K)$, το $f(K) \setminus \{\infty\}$ είναι ευκλείδεια ευθεία κάθετη στο $\mathbb{R}$.

Αν τώρα $\infty \in K$, το $K \setminus \{\infty\}$ είναι ευκλείδεια ευθεία κάθετη στο $\mathbb{R}$ και αν το σημείο τομής δεν είναι το $f^{-1}(\infty)$, ισχύουν τα ίδια όπως προηγουμένως. Αν το σημείο τομής είναι το $f^{-1}(\infty)$, το $f(K) \setminus \{\infty\}$ είναι πάλι ευκλείδεια ευθεία κάθετη στο $\mathbb{R}$. □

Σύμφωνα λοιπόν με το Θεώρημα 5.3.5 η κλάση $\mathcal{L}$ των υποσυνόλων του $\mathbb{H}^2$ από ευκλείδειες ευθείες στο $\mathbb{H}^2$ που είναι κάθετες στο $\mathbb{R}$ και από ευκλείδεια ημικύκλια που τέμνουν κάθετα το $\mathbb{R}$ είναι αναλλοίωτη στα πλαίσια της υπερβολικής γεωμετρίας. Κάθε στοιχείο της κλάσης $\mathcal{L}$ λέγεται *υπερβολική ευθεία*.

**Πρόταση 5.3.6.** *Για κάθε υπερβολική ευθεία $l \in \mathcal{L}$ υπάρχει $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$ ώστε*

$$f(l) = \{iy : y > 0\}.$$

*Απόδειξη.* Έστω $l \in \mathcal{L}$ ένα ευκλείδειο ημικύκλιο που τέμνει κάθετα το $\mathbb{R}$ και $a < b$ τα ακραία σημεία του πάνω στο $\mathbb{R}$. Αν

$$f(z) = \frac{z-b}{z-a},$$

τότε $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$ και $f(b) = 0$, $f(a) = \infty$. Το σημείο $z = \frac{b+a}{2} + i\frac{b-a}{2}$ είναι το ανώτερο σημείο του ημικυκλίου $l$ και κάνοντας τις πράξεις βλέπουμε οτι $f(z) = i$. Αν λοιπόν $K \subset \mathbb{C}$ είναι ο κύκλος του οποίου άνω ημικύκλιο είναι το $l$, τότε ο κύκλος $f(K) \subset \hat{\mathbb{C}}$ έχει τρία κοινά σημεία με τον κύκλο $\{iy : y \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\} \subset \hat{\mathbb{C}}$. Άρα $f(K) = \{iy : y \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$ και συνεπώς $f(l) = f(K \cap \mathbb{H}^2) = f(K) \cap \mathbb{H}^2 = \{iy : y > 0\}$. Αν τώρα η $l \in \mathcal{L}$ είναι ευκλείδεια ευθεία κάθετη στο $\mathbb{R}$, τότε θεωρούμε τον $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$ με τύπο $f(z) = z - a$, όπου $a$ είναι το ακραίο σημείο της $l$ πάνω στο $\mathbb{R}$. □

**Πρόταση 5.3.7.** *Αν $z, w \in \mathbb{H}^2$, $z \neq w$, τότε υπάρχει μία μοναδική υπερβολική ευθεία του $\mathbb{H}^2$ που διέρχεται από τα $z, w$.*

*Απόδειξη.* Αν $\mathrm{Re}z = \mathrm{Re}w$, τότε η ευκλείδεια ευθεία που διέρχεται από τα $z$, $w$ είναι κάθετη στο $\mathbb{R}$ και συνεπώς το μέρος της που βρίσκεται στο $\mathbb{H}^2$ είναι η μοναδική υπερβολική ευθεία που διέρχεται από τα $z$, $w$. Αν $\mathrm{Re}z \neq \mathrm{Re}w$, θεωρούμε το ευκλείδειο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $z$, $w$. Η ευκλείδεια μεσοκάθετη σε αυτό τέμνει τότε το $\mathbb{R}$ σε ένα μοναδικό σημείο, το οποίο είναι το κέντρο ενός ευκλείδειου κύκλου $K$. Το $l = K \cap \mathbb{H}^2$ είναι η μοναδική υπερβολική ευθεία που διέρχεται από τα $z$, $w$. □

## 5.4 Η υπερβολική απόσταση

Το υπερβολικό μήκος μίας $C^1$ παραμετρισμένης καμπύλης $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{H}^2$ ορίζεται να είναι

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \frac{|\gamma'(t)|}{\mathrm{Im}\gamma(t)} dt.$$

Αν η $\gamma$ είναι μία μόνο κατά τμήματα $C^1$ παραμετρισμένη καμπύλη, δηλαδή υπάρχουν $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = \beta$ ώστε η $\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}$, $j = 0, ...k-1$, να είναι $C^1$, τότε ορίζουμε

$$L(\gamma) = \sum_{j=0}^{k-1} L(\gamma|_{[t_j, t_{j+1}])}.$$

Το υπερβολικό μήκος είναι αναλλοίωτο από αναπαραμετρήσεις, όπως ακριβώς συμβαίνει με το ευκλείδειο μήκος. Πράγματι, αν $h : [\alpha', \beta'] \to [\alpha, \beta]$ είναι μία $C^1$ αμφιδιαφόριση, τότε $(\gamma \circ h)'(t) = h'(t)\gamma'(h(t))$ και

$$L(\gamma \circ h) = \int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{|(\gamma \circ h)'(t)|}{\mathrm{Im}((\gamma \circ h)(t))} dt = \int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{|\gamma'(h(t))|}{\mathrm{Im}\gamma(h(t))} \cdot |h'(t)| dt = \int_\alpha^\beta \frac{|\gamma'(t))|}{\mathrm{Im}\gamma(t)} dt = L(\gamma).$$

**Θεώρημα 5.4.1.** *Έστω $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{H}^2$ μία (κατά τμήματα) $C^1$ παραμετρισμένη καμπύλη. Για κάθε $f \in I(\mathbb{H}^2)$ ισχύει $L(f \circ \gamma) = L(\gamma)$.*

*Απόδειξη.* Έστω οτι $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$ με τύπο

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

όπου $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$. Τότε όπως ξέρουμε

$$(f \circ \gamma)'(t) = \frac{1}{(c\gamma(t) + d)^2} \cdot \gamma'(t) \text{ και } \mathrm{Im} f(\gamma(t)) = \frac{1}{|c\gamma(t) + d|^2} \cdot \mathrm{Im}\gamma(t).$$

Κατά συνέπεια

$$\frac{|(f \circ \gamma)'(t)|}{\mathrm{Im}(f \circ \gamma)(t)} = \frac{\frac{1}{|c\gamma(t) + d|^2} \cdot |\gamma'(t)|}{\frac{1}{|c\gamma(t) + d|^2} \cdot \mathrm{Im}\gamma(t)} = \frac{|\gamma'(t)|}{\mathrm{Im}\gamma(t)}.$$

Άρα $L(f \circ \gamma) = L(\gamma)$. Απομένει τώρα να δείξουμε οτι $L(\tau \circ \gamma) = L(\gamma)$. Αυτό όμως είναι προφανές. □

**Παράδειγμα 5.4.2.** Έστω $\alpha < \beta$ και $\gamma : [\alpha', \beta'] \to \mathbb{H}^2$ με τύπο $\gamma(t) = i\phi(t)$, όπου η $\phi : [\alpha', \beta'] \to [\alpha, \beta]$ είναι μία $C^1$ αμφιδιαφόριση. Τότε

$$L(\gamma) = \int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{|i\phi'(t)|}{\phi(t)} dt = \int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{|\phi'(t)|}{\phi(t)} dt = \log \frac{\beta}{\alpha}.$$

Αν $\delta : [\alpha'', \beta''] \to \mathbb{H}^2$ είναι μία οποιαδήποτε κατά τμήματα $C^1$ παραμετρισμένη καμπύλη, με $\delta(\alpha'') = i\alpha$ και $\delta(\beta'') = i\beta$, τότε

$$L(\delta) = \int_{\alpha''}^{\beta''} \frac{|\delta'(t)|}{\mathrm{Im}\delta(t)} dt \geq \int_{\alpha''}^{\beta''} \frac{|(\mathrm{Im}\delta)'(t)|}{\mathrm{Im}\delta(t)} dt \geq \int_{\alpha''}^{\beta''} \frac{(\mathrm{Im}\delta)'(t)}{\mathrm{Im}\delta(t)} dt = \log \frac{\beta}{\alpha} = L(\gamma).$$

Δηλαδή, η $\gamma$ είναι η κατά τμήματα $C^1$ καμπύλη από το $i\alpha$ στο $i\beta$ με το ελάχιστο υπερβολικό μήκος.

**Θεώρημα 5.4.3.** *Έστω $z$, $w \in \mathbb{H}^2$ και $\zeta : [\alpha, \beta] \to \mathbb{H}^2$ μία 1-1 παραμέτρηση του τμήματος της υπερβολικής ευθείας που διέρχεται από τα $z$, $w$ και τα έχει άκρα. Η $\zeta$ μεταξύ των κατά τμήματα $C^1$ καμπύλων από το $z$ στο $w$ έχει το ελάχιστο υπερβολικό μήκος.*

*Απόδειξη.* Έστω $\delta : [\alpha', \beta'] \to \mathbb{H}^2$ μία κατά τμήματα $C^1$ καμπύλη από το $z$ στο $w$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.3.6, υπάρχει $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$ ώστε $f(\zeta([\alpha, \beta])) = \gamma([\alpha, \beta])$, όπου $\gamma$ είναι η καμπύλη του Παραδείγματος 5.4.2 από το $f(z)$ στο $f(w)$ . Από το Θεώρημα 5.4.1 και το Παράδειγμα 5.4.2 έχουμε τώρα $L(\zeta) = L(f \circ \zeta) = L(\gamma) \leq L(f \circ \delta) = L(\delta)$. □

Αν $z$, $w \in \mathbb{H}^2$, το τμήμα της υπερβολικής ευθείας που διέρχεται από τα $z$ και $w$ και τα έχει άκρα λέγεται *υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα* με άκρα τα $z$, $w$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, τα υπερβολικά ευθύγραμμα τμήματα είναι καμπύλες ελαχίστου υπερβολικού μήκους. Ορίζουμε τώρα ως *υπερβολική απόσταση* των $z$, $w \in \mathbb{H}^2$ το υπερβολικό μήκος $d(z, w)$ του υπερβολικού ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα $z$, $w$. Αν $z = w$ τότε ορίζουμε $d(z, w) = 0$. Προφανώς,

$$d(z, w) = \inf\{L(\delta) | \delta \text{ είναι μία κατά τμήματα } C^1 \text{ καμπύλη από το } z \text{ στο } w\}.$$

**Πρόταση 5.4.4.** *Το ζεύγος $(\mathbb{H}^2, d)$ είναι μετρικός χώρος.*

*Απόδειξη.* Από τον ορισμό είναι προφανές οτι $L(\delta) \geq 0$ για κάθε κατά τμήματα $C^1$ παραμετρισμένη καμπύλη και συνεπώς $d(z, w) \geq 0$. Επίσης, αν $z \neq w$, το μοναδικό υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα που τα έχει άκρα έχει θετικό υπερβολικό μήκος. Από το Θεώρημα 5.4.3 έχουμε λοιπόν $d(z, w) > 0$. Για τη συμμετρικότητα αρκεί να παρατηρήσουμε οτι αν $\delta : [\alpha, \beta] \to \mathbb{H}^2$ είναι μία κατά τμήματα $C^1$ παραμετρισμένη καμπύλη από το $z$ στο $w$, τότε η $\tilde{\delta} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{H}^2$ με τύπο $\tilde{\delta}(t) = \delta(\alpha + \beta - t)$ είναι μία κατά τμήματα $C^1$ παραμετρισμένη καμπύλη από το $w$ στο $z$ και $L(\tilde{\delta}) = L(\delta)$. Αρκεί τώρα να πάρουμε ως $\delta$ το υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα από το $z$ στο $w$. Για την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε το υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{H}^2$ από το $z$ στο $u$ και το υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα $\gamma_2 : [\alpha_2, \beta_2] \to \mathbb{H}^2$ από το $u$ στο $w$. Αν

$$\delta(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t(\beta_1 - \alpha_1) + \alpha_1), & \text{όταν } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2((2t-1)(\beta_2 - \alpha_2) + \alpha_2), & \text{όταν } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

τότε $d(z, w) \leq L(\delta) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) = d(z, u) + d(u, w)$. □

**Θεώρημα 5.4.5.** *Έστω $z, w \in \mathbb{H}^2$ με $z \neq w$ και $z^*, w^* \in \hat{\mathbb{R}}$ τα άκρα στο άπειρο της μοναδικής υπερβολικής ευθείας $l$ που διέρχεται από τα $z$, $w$, ώστε το $z$ να βρίσκεται μεταξύ των $z^*$ και $w$. Τότε $d(z,w) = \log[z, z^*; w, w^*]$.*

*Απόδειξη.* Από την Πρόταση 5.3.6 υπάρχει $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$ ώστε $f(l) = \{iy : y > 0\}$. Συνθέτοντας εν ανάγκη την $f$ από αριστερά με την $f_1(u) = \lambda u$, για κατάλληλο $\lambda > 0$ ή και με την $f_2(u) = -\frac{1}{u}$, μπορούμε να την επιλέξουμε έτσι ώστε επιπλέον $f(z^*) = 0$, $f(w^*) = \infty$ και $f(z) = i$, οπότε $f(w) = \beta i$ για κάποιο $\beta > 1$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 5.4.2 έχουμε τότε $d(z,w) = d(i, \beta i) = \log \beta$. Ομως

$$\beta = \lim_{u\to\infty} \frac{i-u}{i} \cdot \frac{\beta i}{\beta i - u} = [i, 0; \beta i, \infty] = [f^{-1}(i), f^{-1}(0); f^{-1}(\beta i), f^{-1}(\infty)]$$

$$= [z, z^*; w, w^*]. \quad \square$$

Από τα προηγούμενα έχουμε τώρα το ακόλουθο.

**Πόρισμα 5.4.6.** *Κάθε $f \in I(\mathbb{H}^2)$ είναι υπερβολική ισομετρία, δηλαδή $d(f(z), f(w)) = d(z,w)$ για κάθε $z$, $w \in \mathbb{H}^2$.* $\square$

Ένας ακόμα χρήσιμος τύπος για την υπερβολική απόσταση είναι ο ακόλουθος.

**Πρόταση 5.4.7.** *Για κάθε $z$, $w \in \mathbb{H}^2$ ισχύει*

$$\sinh(\frac{1}{2}d(z,w)) = \frac{|z-w|}{2(\mathrm{Im}z)^{1/2}(\mathrm{Im}w)^{1/2}}.$$

*Απόδειξη.* Πρώτα παρατηρούμε οτι οι ποσότητες και των δύο μελών είναι αναλλοίωτες από την ομάδα μετασχηματισμών $I^+(\mathbb{H}^2)$. Το αναλλοίωτο του αριστερού μέλους είναι το Πόρισμα 5.4.6. Οσο αφορά το δεξιό μέλος, για κάθε $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$ έχουμε

$$|f(z) - f(w)| = |z-w| \left(\frac{\mathrm{Im}f(z)}{\mathrm{Im}z}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{\mathrm{Im}f(w)}{\mathrm{Im}w}\right)^{1/2}.$$

και συνεπώς το δεξιό μέλος είναι αναλλοίωτο. Επιλέγοντας τώρα έναν $f$ που απεικονίζει το υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $z$, $w$ στο υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $i\alpha$, $i\beta$ για κάποια $\alpha$, $\beta > 0$ έχουμε από το παράδειγμα 5.4.2

$$\sinh(\frac{1}{2}d(z,w)) = \sinh(\frac{1}{2}d(i\alpha, i\beta)) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right) = \frac{|i\alpha - i\beta|}{2(\mathrm{Im}i\alpha)^{1/2}(\mathrm{Im}i\beta)^{1/2}}$$

$$= \frac{|z-w|}{2(\mathrm{Im}z)^{1/2}(\mathrm{Im}w)^{1/2}}. \quad \square$$

Από τον τύπο της Πρότασης 5.4.7 προκύπτει αμέσως ότι η $C^\infty$ παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^2$ με $\gamma(t) = ie^t$ είναι υπερβολική γεωδαισιακή, δηλαδή $d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t-s|$ για κάθε $t$, $s \in \mathbb{R}$. Αν $l \subset \mathbb{H}^2$ είναι μία υπερβολική ευθεία, από την Πρόταση 5.3.6., υπάρχει $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$ με $f(\gamma(\mathbb{R})) = l$, οπότε η $l$ είναι το ίχνος της $C^\infty$ παραμετρισμένης καμπύλης $f \circ \gamma$. Σύμφωνα με το Πόρισμα 5.4.6 όμως

η $f$ είναι $d$-ισομετρία και συνεπώς η $f \circ \gamma$ είναι υπερβολική γεωδαισιακή. Συμπερασματικά, οι υπερβολικές ευθείες είναι ίχνη γεωδαισιακών της υπερβολικής απόστασης.

**Πόρισμα 5.4.8.** *Ενα υποσύνολο του $\mathbb{H}^2$ είναι $d$-ανοιχτό τότε και μόνον τότε όταν είναι ανοιχτό ως προς την ευκλείδεια απόσταση.*

*Απόδειξη.* Για κάθε $\epsilon > 0$ και $z \in \mathbb{H}^2$ η ανοιχτή $d$-μπάλλα ακτίνας $\epsilon$ και κέντρου $z$ είναι το σύνολο

$$B_d(z,\epsilon) = \{w \in \mathbb{H}^2 : d(z,w) < \epsilon\} = \{w \in \mathbb{H}^2 : \frac{|z-w|}{2(\mathrm{Im}z)^{1/2}(\mathrm{Im}w)^{1/2}} < \sinh(\frac{\epsilon}{2})\},$$

από την Πρόταση 5.4.7, που είναι προφανώς ανοιχτό ως προς την ευκλείδεια απόσταση. Αυτό δείχνει οτι κάθε $d$-ανοιχτό σύνολο είναι ανοιχτό και ως προς την ευκλείδεια απόσταση. Αντίστροφα, για κάθε $\delta > 0$ και $z \in \mathbb{H}^2$ υπάρχει κάποιο $\epsilon > 0$ ώστε $B_d(z,\epsilon) \subset B(z,\delta)$. Πράγματι, αν το $0 < \epsilon < 1$ είναι τέτοιο ώστε $2(\mathrm{Im}z)^{1/2}(e^{\epsilon+|\log \mathrm{Im}z|})^{1/2}\sinh(\epsilon/2) < \delta$, τότε για κάθε $w \in B_d(z,\epsilon)$ έχουμε

$$|z-w| < 2\sinh(\epsilon/2)(\mathrm{Im}z)^{1/2}(\mathrm{Im}w)^{1/2} < \delta$$

γιατί αν $\gamma : \alpha, \beta \to \mathbb{H}^2$ είναι μία παραμέτρηση του υπερβολικού ευθύγραμμου τμήματος με άκρα $z$, $w$ έχουμε

$$\epsilon > d(z,w) = L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \frac{|\gamma'(t)|}{\mathrm{Im}\gamma(t)}dt \geq \int_\alpha^\beta \frac{|(\mathrm{Im}\gamma)'(t)|}{\mathrm{Im}\gamma(t)}dt = |\log(\frac{\mathrm{Im}z}{\mathrm{Im}w})|$$

και συνεπώς $\mathrm{Im}w < e^{\epsilon+\log \mathrm{Im}z}$. □

## 5.5 Οι υπερβολικές ισομετρίες

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε οτι $I(\mathbb{H}^2) = I_d(\mathbb{H}^2)$. Από το Πόρισμα 5.4.6 έχουμε οτι η $I(\mathbb{H}^2)$ είναι υποομάδα της $I_d(\mathbb{H}^2)$. Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα χρειαστούμε το ακόλουθο.

**Πρόταση 5.5.1.** *Έστω $z$, $u$, $w \in \mathbb{H}^2$ τρία διαφορετικά μεταξύ τους σημεία. Το $u$ βρίσκεται πάνω στο υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $z$, $w$ τότε και μόνο τότε όταν $d(z,w) = d(z,u) + d(u,w)$.*

*Απόδειξη.* Υπάρχει $f_1 \in I^+(\mathbb{H}^2)$ που απεικονίζει την υπερβολική ευθεία $l$ που διέρχεται από τα $z$, $w$ στην $I = \{iy : y > 0\}$. Τότε $f_1(z) = \mu i$ και $f_1(w) = \lambda i$, για κάποια $\lambda$, $\mu > 0$. Αν $f_2 \in I^+(\mathbb{H}^2)$ είναι αυτή με τύπο $f_2(v) = \frac{1}{\mu}v$, τότε $f_2(I) = I$ και συνεπώς $(f_2 \circ f_1)(l) = I$, ενώ $(f_2 \circ f_1)(z) = i$ και $(f_2 \circ f_1)(w) = \frac{\lambda}{\mu}i$. Αν $\frac{\lambda}{\mu} < 1$, θεωρούμε την $f_3(v) = -\frac{1}{v}$, οπότε $f_3(I) = I$, ενώ $(f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z) = i$ και $(f_3 \circ f_2 \circ f_1)(w) = \frac{\lambda}{\mu}i$. Ετσι υπάρχει $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$, ώστε $f(l) = I$, $f(z) = i$ και $f(w) = ai$ για κάποιο $a > 1$. Εστω τώρα οτι $u \in l$ μεταξύ των $z$, $w$. Τότε το $f(u) \in I$ βρίσκεται μεταξύ των $i$, $ai$. Δηλαδή, $f(u) = bi$ για κάποιο $1 \leq b \leq a$ και $d(z,w) = d(i,bi) = \log b$, ενώ

$$d(u,w) = d(bi,ai) = \log a - \log b = d(i,ai) - d(z,u) = d(z,w) - d(z,u).$$

Για το αντίστροφο, έστω οτι $f(u) = c+bi \in \mathbb{H}^2$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$. Θα υποθέσουμε οτι το $u$ δεν βρίσκεται στο υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $z$, $w$ και θα δείξουμε οτι οδηγούμαστε σε άτοπο. Αν $f(u) \in I$, τότε $c = 0$, δηλαδή $f(u) = bi$ και $0 < b < 1$ ή $a < b$. Αν $0 < b < 1$, τότε $d(z, u) = d(i, bi) = -\log b$, ενώ

$$d(u, w) = d(ai, bi) = \log a - \log b = d(i, ai) + d(z, u) = d(z, w) + d(z, u).$$

Κατά συνέπεια

$$d(z, u) + d(u, w) = d(z, w) = d(u, w) - d(z, u),$$

δηλαδή $d(z, u) = 0$, αντίφαση. Εστω τώρα οτι $b > a$. Τότε $d(z, u) = \log b$ και $d(u, w) = d(z, u) - d(z, w)$, οπότε όπως προηγουμένως βρίσκουμε $d(u, w) = 0$, αντίφαση. Εστω τώρα οτι $c \neq 0$, δηλαδή $f(u) \notin I$. Τότε $d(z, u) = d(i, c + bi) > d(i, bi)$ και $d(u, w) = d(ai, c + bi) > d(ai, bi)$. Αν $1 \leq b \leq a$, τότε

$$d(z, w) = d(i, ai) = d(i, bi) + d(bi, ai) < d(z, u) + d(u, w)$$

που είναι αντίφαση. Αν $b \notin [1, a]$, τότε πάλι έχουμε δύο περιπτώσεις. Αν $0 < b < 1$, έχουμε σύμφωνα με τους προηγούμενους υπολογισμούς

$$d(z, w) = d(i, ai) = d(ai, bi) - d(i, bi) \leq d(ai, bi) + d(i, bi) < d(z, u) + d(u, w),$$

αντίφαση. Αν $b > a$, τότε

$$d(z, w) = d(i, ai) = d(i, bi) - d(ai, bi) \leq d(i, bi) + d(ai, bi) < d(z, u) + d(u, w).$$

Ετσι σε κάθε περίπτωση φθάνουμε σε αντίφαση. □

Από την προηγούμενη Πρόταση 5.5.1 προκύπτει αμέσως οτι το ίχνος κάθε υπερβολικής γεωδαισιακής είναι υπερβολική ευθεία. Συνεπώς, οι υπερβολικές ευθείες είναι ακριβώς τα ίχνη των υπερβολικών γεωδαισιακών. Επειδή η υπερβολική γεωδαισιακή $\gamma(t) = ie^t$ ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$, από αυτό και την Πρόταση 5.3.6 συμπεραίνουμε οτι ο μετρικός χώρος $(\mathbb{H}^2, d)$ είναι γεωδαισιακά πλήρης.

**Πόρισμα 5.5.2.** *Έστω $z$, $w \in \mathbb{H}^2$ με $z \neq w$. Τότε κάθε $f \in I_d(\mathbb{H}^2)$ απεικονίζει το υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $z$, $w$ στο υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $f(z)$, $f(w)$.*

*Απόδειξη.* Εστω $u$ ένα σημείο του υπερβολικού ευθύγραμμου τμήματος με άκρα $z$, $w$. Από την Πρόταση 5.5.1 έχουμε

$$d(f(z), f(w)) = d(z, w) = d(z, u) + d(u, w) = d(f(z), f(u)) + d(f(u), f(w))$$

και συνεπώς το $f(u)$ βρίσκεται πάνω στο υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $f(z)$, $f(w)$. □

**Θεώρημα 5.5.3.** $I_d(\mathbb{H}^2) = I(\mathbb{H}^2)$.

*Απόδειξη.* Αρκεί να δείξουμε οτι κάθε $f \in I_d(\mathbb{H}^2)$ είναι στην $I(\mathbb{H}^2)$. Ο φανταστικός ημιάξονας $I = \{iy : y > 0\}$ είναι υπερβολική ευθεία και το $f(I)$ είναι επίσης υπερβολική ευθεία, από το Πόρισμα 5.5.2. Οπως στην αρχή της απόδειξης της Πρότασης 5.5.1, υπάρχει $g \in I^+(\mathbb{H}^2)$ ώστε $(g \circ f)(i) = i$, $(g \circ f)(\{iy : y > 1\}) = \{iy : y > 1\}$ και $(g \circ f)(\{iy : 0 < y < 1\}) = \{iy : 0 < y < 1\}$. Τότε

$$d(z, (g \circ f)(z)) = |d(z, i) - d(i, (g \circ f)(z))| = 0,$$

για κάθε $z \in I$. Αρα $(g \circ f)(z) = z$ για κάθε $z \in I$. Εστω τώρα $z = x + iy \in \mathbb{H}^2$ και $(g \circ f)(z) = r + is$. Τότε για κάθε $t > 0$ έχουμε $d(z, it) = d((g \circ f)(z), (g \circ f)(it)) = d(r + is, it)$. Από την Πρόταση 5.4.7 προκύπτει οτι

$$\frac{|x + iy - it|^2}{4yt} = \frac{|r + is - it|^2}{4st}$$

και κατά συνέπεια

$$\frac{1}{t^2}[x^2 + (y - t)^2]s = \frac{1}{t^2}[r^2 + (s - t)^2]y$$

για κάθε $t > 0$. Παίρνοντας τα όρια για $t \to +\infty$ προκύπτει οτι $s = y$ και κατά συνέπεια $x^2 = r^2$. Αυτό σημαίνει οτι $(g \circ f)(z) = z$ ή $-\bar{z}$ για κάθε $z \in \mathbb{H}^2$. Αφού η $g \circ f$ είναι συνεχής και τα $\{z \in \mathbb{H}^2 : \mathrm{Re}z < 0\}$, $\{z \in \mathbb{H}^2 : \mathrm{Re}z > 0\}$ κυρτά, πρέπει $g \circ f = id$ ή $g \circ f = \tau$, όπου η $\tau \in I(\mathbb{H}^2)$ έχει τύπο $\tau(z) = -\bar{z}$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $f = g^{-1} \in I^+(\mathbb{H}^2)$, ενώ στην δεύτερη $f = g^{-1} \circ \tau \in I^+(\mathbb{H}^2) \circ \tau \subset I(\mathbb{H}^2)$.

## 5.6 Τα αξιώματα του Ευκλείδη στην Υπερβολική Γεωμετρία

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε ποιά από τα αξιώματα του Ευκλείδη ισχύουν στην υπερβολική γεωμετρία και με ποιά μορφή. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.3.7, από δύο διαφορετικά σημεία του υπερβολικού επιπέδου διέρχεται μία μοναδική υπερβολική ευθεία. Έτσι το 1ο αίτημα του Ευκλείδη ισχύει και στην υπερβολική γεωμετρία. Από το παράδειγμα 5.4.2 και την Πρόταση 5.3.6 προκύπτει οτι κάθε υπερβολική ευθεία έχει άπειρο μήκος και προς τις δύο κατευθύνσεις της. Συνεπώς το 2ο αίτημα του Ευκλείδη έχει ισχύ στην υπερβολική γεωμετρία.

Για το 3ο αίτημα θα χρειαστεί πρώτα να περιγράψουμε τους υπερβολικούς κύκλους. Έστω $z \in \mathbb{H}^2$ και $s > 0$. Το σύνολο $C(z, s) = \{w \in \mathbb{H}^2 : d(z, w) = s\}$ λέγεται υπερβολικός κύκλος με κέντρο $z$ και ακτίνα $s$. Αν $z = i$ και $r = \sinh(s/2)$, από την πρόταση 5.4.7 έχουμε

$$C(i, s) = \{z \in \mathbb{H}^2 : \frac{|z - i|}{2(\mathrm{Im}z)^{1/2}} = r\}.$$

Αν $z = x + iy$, έχουμε $z \in C(i, s)$ τότε και μόνον τότε όταν $x^2 + (y - 1)^2 = 4r^2y$ ή ισοδύναμα

$$x^2 + [y - (2r^2 + 1)]^2 = 4r^2(r^2 + 1).$$

Δηλαδή, ο υπερβολικός κύκλος $C(i, s)$ είναι ένας ευκλείδειος κύκλος με κέντρο το σημείο $i(2r^2 + 1)$ και ακτίνα $2r(r^2 + 1)^{1/2}$. Αφού για κάθε $z \in \mathbb{H}^2$ υπάρχει $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$

ώστε $f(z) = i$ και ο $f$ απεικονίζει ευκλείδειους κύκλους σε ευκλείδειους κύκλους, ενώ είναι και υπερβολική ισομετρία, προκύπτει οτι κάθε υπερβολικός κύκλος είναι ευκλείδειος κύκλος ως σύνολο, αλλά με άλλο κέντρο και άλλη ακτίνα. Αυτό σημαίνει οτι το 3ο αίτημα του Ευκλείδη ισχύει και στην Υπερβολική Γεωμετρία.

Θεωρώντας την ίδια έννοια γωνίας για την υπερβολική γεωμετρία όπως και στην ευκλείδεια, όλες οι ορθές γωνίες στο υπερβολικό επίπεδο είναι ίσες, αφού οι υπερβολικές ισομετρίες διατηρούν τις γωνίες. Έτσι ισχύει και το 4ο αίτημα του Ευκλείδη.

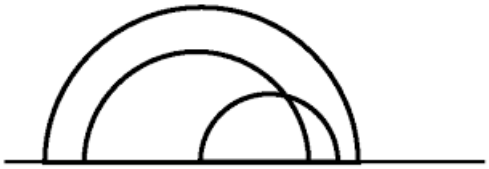
Δύο υπερβολικές ευθείες $l_1$, $l_2$ λέγονται παράλληλες αν $l_1 \cap l_2 = \varnothing$. Έστω $l$ μία υπερβολική ευθεία και $z \in \mathbb{H}^2$, $z \notin l$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Έστω οτι η $l$ είναι ευκλείδεια ημιευθεία κάθετη στο $\mathbb{R}$. Τότε η ευκλείδεια ημιευθεία που είναι κάθετη στο $\mathbb{R}$ και διέρχεται από το $z$ είναι υπερβολική ευθεία παράλληλη προς την $l$. Έστω $x \in \mathbb{H}^2$ με $y < x < \mathrm{Im}z$, όπου $y$ είναι το ασυμπτωτικό άκρο της $l$ επί του $\mathbb{R}$. Υπάρχει ένας μοναδικός ευκλείδειος κύκλος $C$ που διέρχεται από τα $x$, $z$ και είναι κάθετος στο $\mathbb{R}$. Το $C \cap \mathbb{H}^2$ είναι υπερβολική ευθεία που διέρχεται από το $z$ και είναι παράλληλη προς την $l$. Αυτό δείχνει οτι υπάρχουν υπεραριθμήσιμες στο πλήθος παράλληλες προς την $l$ που διέρχονται από το $z$.

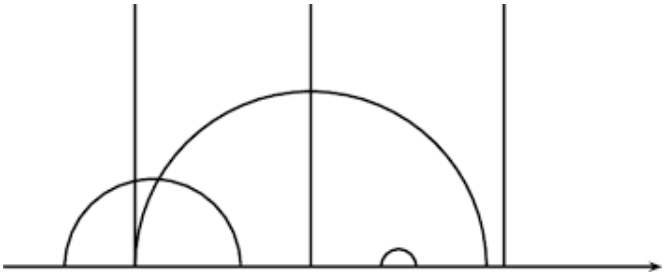
Έστω οτι η $l$ είναι το άνω ημικύκλιο ευκλείδειου κύκλου κάθετου στο $\mathbb{R}$. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ το κέντρο αυτού του ευκλείδειου κύκλου. Έστω $K$ ο ευκλείδειος κύκλος με κέντρο $x_0$ που διέρχεται από το $z$. Το $K \cap \mathbb{H}^2$ είναι υπερβολική ευθεία παράλληλη της $l$. Αν $x \in \mathbb{R}$ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο μεταξύ των ευκλειδείων κύκλων $K$, $l$, τότε υπάρχει ένας μοναδικός ευκλείδειος κύκλος $C$ που διέρχεται από τα $x$, $z$. Το $C \cap \mathbb{H}^2$ είναι υπερβολική ευθεία παράλληλη της $l$. Έτσι και σε αυτήν την περίπτωση υπάρχουν υπεραριθμήσιμες στο πλήθος υπερβολικές ευθείες παράλληλες της $l$ που διέρχονται από το $z$.

Τα προηγούμενα δείχνουν οτι το 5ο αίτημα του Ευκλείδη δεν ισχύει στην υπερβολική γεωμετρία, αλλά ισχύει το ακόλουθο.

**Θεώρημα 5.6.1.** *Για κάθε υπερβολική ευθεία $l$ και $z \in \mathbb{H}^2$ με $z \notin l$ υπάρχουν υπεραριθμήσιμες στο πλήθος υπερβολικές ευθείες παράλληλες της $l$ που διέρχονται από το $z$.* □



Μία ιδιαιτερότητα που έχει το υπερβολικό επίπεδο σε σχέση με το ευκλείδειο είναι το ιδεώδες σύνορο, που είναι εξ ορισμού το σύνολο $\partial\mathbb{H}^2 = \hat{\mathbb{R}}$. Τα σημεία του ιδεώδους συνόρου λέγονται σημεία στο άπειρο. Κάθε υπερβολική ευθεία έχει ακριβώς δύο σημεία στο άπειρο. Αντίστροφα, δύο διαφορετικά σημεία στο άπειρο ορίζουν ακριβώς μία υπερβολική ευθεία της οποίας είναι τα σημεία στο άπειρο. Στο υπερβολικό επίπεδο έχουμε δύο περιπτώσεις παραλλήλων ευθειών. Δύο παράλληλες υπερβολικές ευθείες $l_1$, $l_2$ είτε έχουν ένα κοινό σημείο στο άπειρο είτε δεν έχουν κανένα. Αν δεν έχουν κανένα λέγονται *υπερπαράλληλες*.



## 5.7 Υπερβολικό εμβαδόν και τύπος των Gauss-Bonnet

Το υπερβολικό εμβαδόν ενός συνόλου $X \subset \mathbb{H}^2$ είναι το

$$\mu(X) = \int_X \frac{1}{y^2} dxdy,$$

αν το ολοκλήρωμα υπάρχει. Θυμίζουμε οτι η ύπαρξη του ολοκληρώματος εξαρτάται από το $X$. Έτσι το υπερβολικό εμβαδόν δεν υπάρχει για όλα τα υποσύνολα του υπερβολικού επιπέδου.

**Πρόταση 5.7.1.** *Το υπερβολικό εμβαδόν είναι αναλλοίωτο από τις υπερβολικές ισομετρίες. Δηλαδή, για κάθε $X \subset \mathbb{H}^2$, του οποίου το υπερβολικό εμβαδόν υπάρχει και κάθε $f \in I(\mathbb{H}^2)$ ισχύει $\mu(X) = \mu(f(X))$.*

*Απόδειξη.* Η απόδειξη είναι συνέπεια του τύπου αλλαγής μεταβλητής κατά την ολοκλήρωση. Έστω πρώτα οτι $f = \tau$, όπου $\tau(z) = -\bar{z}$. Αν $z = x + iy$, τότε $\tau(x, y) = (-x, y)$ και συνεπώς

$$D\tau(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Αρα

$$\mu(\tau(X)) = \int_{\tau(X)} \frac{1}{y^2} dxdy = \int_X \frac{1}{y^2} \cdot |\det D\tau(x, y)| dxdy = \mu(X).$$

Έστω τώρα οτι $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$ με τύπο

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ όπου } a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1.$$

Τότε όπως ξέρουμε

$$\mathrm{Im} f(z) = \frac{1}{|cz + d|^2} \cdot \mathrm{Im} z$$

και

$$f(x, y) = \frac{acx^2 + acy^2 + bd + bcx + adx}{(cx + d)^2 + c^2y^2} + i \cdot \frac{y}{(cx + d)^2 + c^2y^2}.$$

Άρα

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{(cx+d)^2 - c^2y^2}{[(cx+d)^2+c^2y^2]^2} & \dfrac{2cy(cx+d)}{[(cx+d)^2+c^2y^2]^2} \\ \dfrac{-2cy(cx+d)}{[(cx+d)^2+c^2y^2]^2} & \dfrac{(cx+d)^2 - c^2y^2}{[(cx+d)^2+c^2y^2]^2} \end{pmatrix}$$

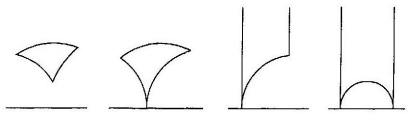
και συνεπώς

$$\det Df(x,y) = \frac{1}{|cz+d|^4}, \text{ όπου } z = x+iy.$$

Έτσι από τον τύπο αλλαγής μεταβλητής κατά την ολοκλήρωση έχουμε

$$\mu(f(X)) = \int_{f(X)} \frac{1}{y^2}dxdy = \int_X \frac{1}{\dfrac{y^2}{[(cx+d)^2+c^2y^2]^2}} \cdot \frac{1}{[(cx+d)^2+c^2y^2]^2}dxdy = \mu(X). \quad \square$$

Ένα υπερβολικό $n$-γωνο, $n \geq 3$, είναι ένα κλειστό υποσύνολο $P$ του $\mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$, που φράσσεται από $n$ υπερβολικά ευθύγραμμα τμήματα, που λέγονται πλευρές. Τα σημεία τομής των πλευρών λέγονται κορυφές. Επιτρέπουμε κάποιες από τις κορυφές να βρίσκονται στο $\partial\mathbb{H}^2 = \hat{\mathbb{R}}$. Τέτοιες κορυφές αποκαλούνται ιδεώδεις κορυφές και βέβαια δεν ανήκουν στο $P \cap \mathbb{H}^2$. Πάντα όμως έχουμε $\text{int}P \subset \mathbb{H}^2$. Αν το $P$ δεν έχει καμμία ιδεώδη κορυφή, είναι κλειστό και φραγμένο, δηλαδή συμπαγές.



**Πρόταση 5.7.2.** *Έστω $\Delta$ ένα υπερβολικό τρίγωνο με μία μόνον ιδεώδη κορυφή. Αν $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi$ είναι οι εσωτερικές γωνίες στις δύο άλλες κορυφές, τότε*

$$\mu(\Delta) = \pi - \alpha - \beta.$$

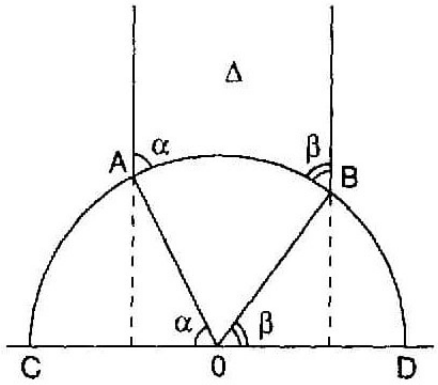
*Απόδειξη.* Χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλο στοιχείο της $I^+(\mathbb{H}^2)$ μπορούμε να μετασχηματίσουμε το τρίγωνο, ώστε η ιδεώδης κορυφή του να είναι η $\infty$, οπότε οι δύο πλευρές που τέμνονται σε αυτήν είναι τμήματα ευκλειδείων ευθειών κάθετων στο $\hat{\mathbb{R}}$. Μετασχηματίζοντας στην συνέχεια το τρίγωνο με στοιχεία της $I^+(\mathbb{H}^2)$ της μορφής $f(z) = z + b$, $b \in \mathbb{R}$ και $g(z) = \lambda z$, $\lambda > 0$, το φέρνουμε σε θέση ώστε η τρίτη πλευρά να περιέχεται στο ευκλείδειο ημικύκλιο με κέντρο το $0 \in \mathbb{R}$ και ακτίνα 1. Το υπερβολικό εμβαδόν και οι γωνίες παραμένουν αναλλοίωτα από τους μετασχηματισμούς αυτούς, από την πρόταση 5.7.1 και το θεώρημα 5.2.10.

Έχουμε τώρα

$$\mu(\Delta) = \int_\Delta \frac{1}{y^2}dxdy = \int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta} \left( \int_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \frac{1}{y^2}dy \right) dx = \int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Θέτοντας $x = \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$, βρίσκουμε

$$\mu(\Delta) = \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin\theta}{\sin\theta}d\theta = \pi - \alpha - \beta. \quad \square$$

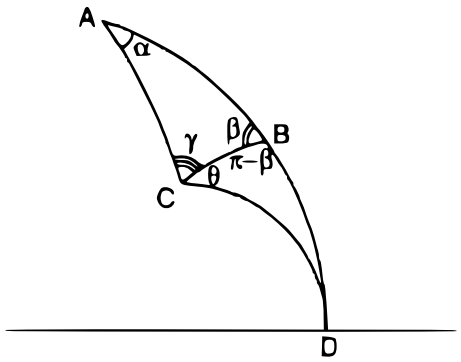



**Θεώρημα 5.7.3.** *Έστω $\Delta \subset \mathbb{H}^2$ ένα συμπαγές υπερβολικό τρίγωνο με εσωτερικές γωνίες $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Το υπερβολικό εμβαδόν του $\Delta$ είναι*

$$\mu(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

*Απόδειξη.* Μετασχηματίζοντας το τρίγωνο με κατάλληλα στοιχεία της $I^+(\mathbb{H}^2)$ παίρνουμε ένα ισοδύναμο τρίγωνο του οποίου καμμία πλευρά δεν είναι μέρος ευκλείδειας ευθείας κάθετης στο $\hat{\mathbb{R}}$. Όπως πάντα το εμβαδόν και οι γωνίες δεν αλλάζουν. Έστω $A$, $B$, $C$ οι κορυφές με αντίστοιχες εσωτερικές γωνίες $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Προεκτείνοντας την πλευρά $AB$ προς την κατεύθυνση του $B$, η υπερβολική ευθεία, μέρος της οποίας είναι η $AB$, έχει ένα σημείο $D$ στο άπειρο. Το υπερβολικό τρίγωνο $\Delta_1$ με κορυφές $A$, $D$, $C$ έχει μόνον μία ιδεώδη κορυφή, την $D$ και το ίδιο ισχύει για το υπερβολικό τρίγωνο $\Delta_2$ με κορυφές $B$, $D$, $C$. Αν $\theta$ είναι η εσωτερική γωνία του τριγώνου $\Delta_2$ στην κορυφή $C$, έχουμε

$$\mu(\Delta) = \mu(\Delta_1) - \mu(\Delta_2) = [\pi - \alpha - (\gamma + \theta)] - [\pi - (\theta + \pi - \beta)] = \pi - (\alpha + \beta + \gamma). \square$$




**Πόρισμα 5.7.4.** *Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός υπερβολικού τριγώνου είναι μικρότερο από $\pi$ και η διαφορά είναι το υπερβολικό εμβαδόν του τριγώνου.* $\square$

## 5.8 Το μοντέλο του δίσκου του Poincaré

Στην παράγραφο αυτήν θα περιγράψουμε ένα εναλλακτικό μοντέλο της επίπεδης Υπερβολικής Γεωμετρίας στον μοναδιαίο δίσκο $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Ο $\phi \in \mathcal{M}^+$ με τύπο

$$\phi(z) = \frac{iz+1}{z+i}$$

λέγεται μετασχηματισμός του Cayley και $\phi(\mathbb{H}^2) = \mathbb{D}^2$, γιατί αν $z = x+iy \in \mathbb{C}$, έχουμε $|\phi(z)| < 1$ τότε και μόνον τότε όταν

$$\frac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2} < 1,$$

δηλαδή $y > 0$. Ο αντίστροφος έχει τύπο

$$\phi^{-1}(z) = \frac{-iz+1}{z-i}.$$

Το σύνολο

$$I(\mathbb{D}^2) = \{g \in \mathcal{M} : g(\mathbb{D}^2) = \mathbb{D}^2\} = \{\phi \circ f \circ \phi^{-1} : f \in I(\mathbb{H}^2)\}$$

είναι ομάδα μετασχηματισμών του $\mathbb{D}^2$ και το ζεύγος $(I(\mathbb{D}^2), \mathbb{D}^2)$ είναι μία γεωμετρία Klein ισόμορφη με την $(I(\mathbb{H}^2), \mathbb{H}^2)$. Με άλλα λόγια, η $(I(\mathbb{D}^2), \mathbb{D}^2)$ είναι ένα δεύτερο μοντέλο της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Θέτουμε $I^+(\mathbb{D}^2) = \{\phi \circ f \circ \phi^{-1} : f \in I^+(\mathbb{H}^2)\}$. Τότε $I(\mathbb{D}^2) = I^+(\mathbb{D}^2) \cup I^+(\mathbb{D}^2) \circ \tau$, αφού $\phi \circ \tau \circ \phi^{-1} = \tau$ στην $\hat{\mathbb{C}}$. Κάθε στοιχείο της $I^+(\mathbb{D}^2)$ είναι της μορφής $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$, όπου

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ με } a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad-bc = 1.$$

Κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε οτι ο τύπος του $g$ είναι

$$g(z) = \phi(f(\phi^{-1}(z))) = \frac{[a+d+i(b-c)]z + [b+c+i(a-d)]}{[b+c-i(a-d)]z + [a+d-i(b-c)]}.$$

Θέτοντας τώρα

$$A = \frac{1}{2}[a+d+i(b-c)] \text{ και } B = \frac{1}{2}[b+c+i(a-d)]$$

παίρνουμε τον τύπο

$$g(z) = \frac{Az+B}{\bar{B}z+\bar{A}}, \text{ όπου } |A|^2 - |B|^2 = 1.$$

Όμοια αν $g \in I^+(\mathbb{D}^2) \circ \tau$, τότε

$$g(z) = \frac{A\bar{z}-B}{\bar{B}\bar{z}-\bar{A}}, \text{ όπου } |A|^2 - |B|^2 = 1.$$

Αν $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{D}^2$ είναι μία κατά τμήματα $C^1$ καμπύλη, ορίζουμε ως υπερβολικό μήκος της $\gamma$ το $L(\gamma) = L(\phi^{-1} \circ \gamma)$. Αφού

$$(\phi^{-1})'(z) = \frac{-2}{(z-i)^2},$$

από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$(\phi^{-1}\circ\gamma)'(t)=\frac{-2}{(\gamma(t)-i)^2}\cdot\gamma'(t).$$

Από την άλλη μεριά, για κάθε $z\in\mathbb{D}^2$ έχουμε

$$\mathrm{Im}\phi^{-1}(z)=-\frac{i}{2}\cdot\left(\frac{-iz+1}{z-i}-\frac{i\bar{z}+1}{\overline{z-i}}\right)=\frac{1-|z|^2}{|z-i|^2}.$$

Έτσι το υπερβολικό μήκος στο μοντέλο του δίσκου δίνεται από τον τύπο

$$L(\gamma)=\int_\alpha^\beta\frac{|(\phi^{-1}\circ\gamma)'(t)|}{\mathrm{Im}(\phi^{-1}\circ\gamma)(t)}dt=\int_\alpha^\beta\frac{\frac{2}{|\gamma(t)-i|^2}\cdot|\gamma'(t)|}{\frac{1-|\gamma(t)|^2}{|\gamma(t)-i|^2}}dt=\int_\alpha^\beta\frac{2|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt.$$

Το υπερβολικό εμβαδόν στο μοντέλο του μοναδιαίου δίσκου $\mathbb{D}^2$ ορίζεται ανάλογα από τον τύπο

$$\mu(X)=\int_{\phi^{-1}(X)}\frac{1}{y^2}dxdy$$

για κάθε $X\subset\mathbb{D}^2$ για το οποίο το ολοκλήρωμα υπάρχει. Επειδή,

$$\det D(\phi^{-1})(z)=|(\phi^{-1})'(z)|^2=\frac{4}{|z-i|^4}$$

από τον τύπο αλλαγής μεταβλητής κατά την ολοκλήρωση προκύπτει οτι

$$\mu(X)=\int_X\frac{1}{\frac{(1-x^2-y^2)^2}{|x+iy-i|^4}}\cdot\frac{4}{|x+iy-i|^4}dxdy=\int_X\frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}dxdy$$

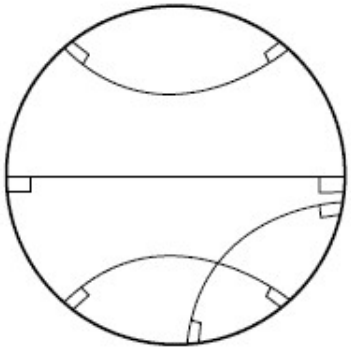
για κάθε $X\subset\mathbb{D}^2$ για το οποίο το ολοκλήρωμα υπάρχει.

Όπως στο $\mathbb{H}^2$ ορίζουμε την υπερβολική απόσταση στον $\mathbb{D}^2$ ως

$$\rho(z,w)=\inf\{L(\gamma)|\gamma\text{ είναι κατά τμήματα }C^1\text{ καμπύλη από το }z\text{ στο }w\}.$$

Το ζεύγος $(\mathbb{D}^2,\rho)$ γίνεται έτσι μετρικός χώρος και η $\phi:(\mathbb{H}^2,d)\to(\mathbb{D}^2,\rho)$ ισομετρία μετρικών χώρων. Επίσης $I_\rho(\mathbb{D}^2)=I(\mathbb{D}^2)$.

Όπως έχουμε αποδείξει, οι υπερβολικές ευθείες στο $\mathbb{H}^2$ έχουν ανάμεσα στις κατά τμήματα $C^1$ καμπύλες το ελάχιστο υπερβολικό μήκος. Ο $\phi$ ως μετασχηματισμός Möbius απεικονίζει τις υπερβολικές ευθείες στο $\mathbb{H}^2$ σε τμήματα κύκλων της $\hat{\mathbb{C}}$ μέσα στον $\mathbb{D}^2$, που είναι κάθετοι στον μοναδιαίο κύκλο $S^1=\partial\mathbb{D}^2=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$. Το $\partial\mathbb{H}^2=\hat{\mathbb{R}}$ απεικονίζεται στον $S^1$, που είναι το ιδεώδες σύνορο του $\mathbb{D}^2$. Οι υπερβολικές ευθείες στον $\mathbb{D}^2$ έχουν βέβαια το ελάχιστο υπερβολικό μήκος.



**Παράδειγμα 5.8.1.** Οι υπερβολικές ευθείες στον $\mathbb{D}^2$ που διέρχονται από το 0 είναι οι ευκλείδειες διάμετροι του $\mathbb{D}^2$, γιατί $\phi(i) = 0$ και οι κύκλοι της $\hat{\mathbb{C}}$ που διέρχονται από το 0 και είναι κάθετοι στον $S^1$ είναι ευκλείδειες ευθείες (με το $\infty$). Έστω $z \in \mathbb{D}^2$ και $\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}^2$ η παραμέτρηση του υπερβολικού ευθύγραμμου τμήματος από το 0 στο $z$ με τύπο $\gamma(t) = tz$. Τότε

$$\rho(0,z) = \int_0^{|z|} \frac{2}{1-t^2} dt = \log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right).$$

Αν επιλύσουμε ως προς $|z|$ βρίσκουμε και $|z| = \tanh(\frac{1}{2}\rho(0,z))$.

Το γεγονός οτι οι υπερβολικές ευθείες του $\mathbb{D}^2$ που διέρχονται από το 0 είναι οι ευκλείδειες διάμετροι του $\mathbb{D}^2$, σε συνδυασμό με το γεγονός οτι η $I(\mathbb{D}^2)$ έχει όλες τις ιδιότητες που έχει η $I(\mathbb{H}^2)$, βοηθάει κάποιες φορές να συγκρίνουμε υπερβολικές με ευκλείδειες αποστάσεις. Ο ανάλογος τύπος της Πρότασης 5.4.7 είναι ο ακόλουθος.

**Πρόταση 5.8.2.** *Για κάθε $z$, $w \in \mathbb{D}^2$ ισχύει*

$$\sinh^2(\frac{1}{2}\rho(z,w)) = \frac{|z-w|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}.$$

*Απόδειξη.* Η διαδικασία της απόδειξης είναι όμοια με της Πρότασης 5.4.7. Πρώτα παρατηρούμε οτι για κάθε $g \in I^+(\mathbb{D}^2)$ ισχύει $(g(z)-g(w))^2 = g'(z)g'(w)(z-w)^2$ για κάθε $z$, $w \in \mathbb{D}^2$. Πράγματι, αν ο τύπος της $g$ είναι

$$g(z) = \frac{Az+B}{\bar{B}z+\bar{A}}, \quad |A|^2 - |B|^2 = 1,$$

τότε

$$g'(z) = \frac{1}{(\bar{B}z+\bar{A})^2}$$

και κατά συνέπεια

$$(g(z)-g(w))^2 = \frac{(z-w)^2}{(\bar{B}z+\bar{A})^2(\bar{B}w+\bar{A})^2} = g'(z)g'(w)(z-w)^2.$$

Τα δύο μέλη της ισότητας που θέλουμε να αποδείξουμε είναι αναλλοίωτα από την ομάδα μετασχηματισμών $I^+(\mathbb{D}^2)$. Το αριστερό μέλος προφανώς είναι. Όσο αφορά το δεξιό

μέλος, για κάθε $g \in I^+(\mathbb{D}^2)$ έχουμε

$$1 - |g(z)|^2 = 1 - \frac{Az+B}{\bar{B}z+\bar{A}} \cdot \frac{\bar{A}\bar{z}+\bar{B}}{B\bar{z}+A} = |g'(z)|(1-|z|^2)$$

και συνεπώς

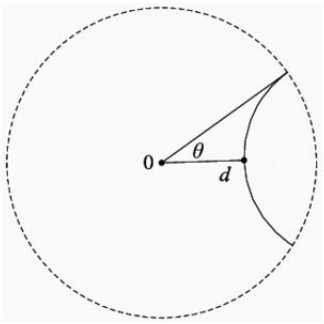
$$\frac{|g(z)-g(w)|^2}{(1-|g(z)|^2)(1-|g(w)|^2)} = \frac{|g'(z)||g'(w)||z-w|^2}{|g'(z)|(1-|z|^2)|g'(w)|(1-|w|^2)} = \frac{|z-w|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}.$$

Επιλέγουμε τώρα $g \in I^+(\mathbb{D}^2)$, ώστε $g(z) = 0$, που υπάρχει από την Πρόταση 5.3.4, οπότε

$$\frac{|z-w|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)} = \frac{|g(w)|^2}{1-|g(w)|^2} = \frac{\tanh^2(\frac{1}{2}\rho(g(z),g(w)))}{1-\tanh^2(\frac{1}{2}\rho(g(z),g(w)))}$$

$$= \frac{\tanh^2(\frac{1}{2}\rho(z,w))}{1-\tanh^2(\frac{1}{2}\rho(z,w))} = \sinh^2(\frac{1}{2}\rho(z,w)). \quad \square$$

Ένα παράδειγμα βολικού υπολογισμού στον $\mathbb{D}^2$ είναι ο τύπος του Lobachevskii για την υπερβολική απόσταση ενός σημείου από μία υπερβολική ευθεία μέσω της γωνίας παραλληλισμού. Έστω $z \in \mathbb{D}^2$ και $l$ μία υπερβολική ευθεία με $z \notin l$. Υπάρχουν ακριβώς δύο υπερβολικές ευθείες που διέρχονται από το $z$, που είναι παράλληλες της $l$ και έχουν από ένα κοινό σημείο στο άπειρο με την $l$. Η γωνία $\theta$ που σχηματίζει η μία από τις δύο με την κάθετη υπερβολική ευθεία από το $z$ προς την $l$ λέγεται γωνία παραλληλισμού. Αν μία υπερβολική ευθεία διέρχεται από το $z$ και σχηματίζει με την κάθετη από το $z$ προς την $l$ γωνία μεγαλύτερη από $\theta$ και μικρότερη από $\pi/2$, τότε είναι υπερπαράλληλη προς την $l$.




Αν $d$ είναι το σημείο τομής της κάθετης υπερβολικής ευθείας από το $z$ προς την $l$ με την $l$, η απόσταση του $z$ από την $l$ είναι

$$\rho(z,l) = \inf\{\rho(z,z') : z' \in l\} = \rho(z,d).$$

**Θεώρημα 5.8.3.** *Έστω $l$ μία υπερβολική ευθεία και $z$ ένα σημείο εκτός αυτής. Αν $\theta$ είναι η γωνία παραλληλισμού, τότε*

$$e^{-\rho(z,l)} = \tan(\frac{\theta}{2}).$$

*Απόδειξη.* Εφαρμόζοντας ένα κατάλληλο στοιχείο της $I(\mathbb{D}^2)$, μπορούμε να απεικονίσουμε το $z$ στο 0, οπότε αρκεί να αποδείξουμε τον τύπο για το $z = 0$, αφού τα στοιχεία της $I(\mathbb{D}^2)$ διατηρούν τις γωνίες. Από το παράδειγμα 5.8.1 έχουμε τώρα

$$\rho(0, l) = \rho(0, d) = \log\left(\frac{1 + |d|}{1 - |d|}\right)$$

και

$$|d| = \frac{1}{\cos\theta} - \tan\theta = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}.$$

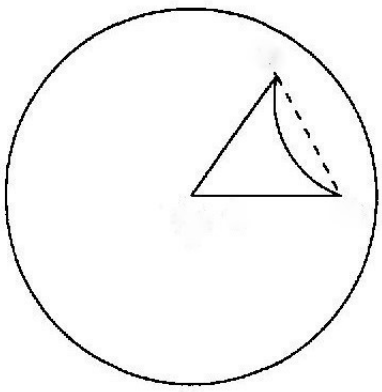
Κατά συνέπεια

$$e^{-\rho(z,l)} = \frac{1 - |d|}{1 + |d|} = \frac{\cos\theta + \sin\theta - 1}{\cos\theta - \sin\theta + 1} = \tan(\frac{\theta}{2}). \quad \square$$

## 5.9 Υπερβολική τριγωνομετρία

Όπως στην Ευκλείδεια και τη Σφαιρική Γεωμετρία, έτσι και στην Υπερβολική Γεωμετρία υπάρχουν κάποιες σχέσεις μεταξύ των εσωτερικών γωνιών ενός συμπαγούς υπερβολικού τριγώνου και των πλευρών του. Οι υπολογισμοί των υπερβολικών αποστάσεων που χρειάζεται να κάνουμε είναι πιο απλοί στο μοντέλο του δίσκου.

Έστω $\Delta$ ένα συμπαγές υπερβολικό τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A$, $B$, $\Gamma$, αντίστοιχες εσωτερικές γωνίες $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ και υπερβολικά μήκη πλευρών $a = \rho(B, \Gamma)$, $b = \rho(A, \Gamma)$, $c = \rho(A, B)$. Υπάρχει $g \in I^+(\mathbb{D}^2)$ που απεικονίζει το $A$ στο 0 και το $B$ σε κάποιο $r \in \mathbb{R} \cap \mathbb{D}^2$. Η $g$ είναι ένα στοιχείο της $I^+(\mathbb{D}^2)$ που απεικονίζει την υπερβολική ευθεία τμήμα της οποίας είναι η πλευρά $c$ στην υπερβολική ευθεία $\mathbb{R} \cap \mathbb{D}^2$. Εφαρμόζοντας στην ανάγκη και την ανάκλαση $\tau(z) = -\bar{z}$, μπορούμε να απεικονίσουμε το σημείο $A$ στο 0 και το $B$ σε κάποιο $r > 0$. Έτσι κάθε υπερβολικό τρίγωνο στον $\mathbb{D}^2$ είναι ισοδύναμο με ένα υπερβολικό τρίγωνο του οποίου η κορυφή $A = 0$ και συνεπώς οι πλευρές $c$, $b$ είναι τμήματα ευκλειδείων διαμέτρων του $\mathbb{D}^2$ και $B = r \in \mathbb{R} \cap \mathbb{D}^2$, $r > 0$.



Έστω οτι $\Gamma = se^{i\alpha}$, για κάποιο $0 < s < 1$. Από το Παράδειγμα 5.8.1 έχουμε $r = \tanh(\frac{1}{2}c)$ και $s = \tanh(\frac{1}{2}b)$. Από το ευκλείδειο Πυθαγόρειο Θεώρημα για το ευκλείδειο τρίγωνο με κορυφές $A$, $B$, $\Gamma$ έχουμε

$$|B - \Gamma|^2 = r^2 + s^2 - 2rs\cos\alpha = \tanh^2(\frac{1}{2}c) + \tanh^2(\frac{1}{2}b) - 2\tanh(\frac{1}{2}c)\tanh(\frac{1}{2}b)\cos\alpha.$$

Από την Πρόταση 5.8.2 έχουμε επίσης

$$|B-\Gamma|^2=(1-r^2)(1-s^2)\sinh^2(\frac{1}{2}a)=\frac{1}{\cosh^2(\frac{1}{2}c)}\cdot\frac{1}{\cosh^2(\frac{1}{2}b)}\cdot\sinh^2(\frac{1}{2}a).$$

Κατά συνέπεια τα δεξιά μέλη των παραπάνω ισοτήτων είνα ίσα. Κάνοντας τις πράξεις βλέπουμε οτι η ισότητα αυτή είναι ισοδύναμη με την ισότητα

$$\cosh a=\cosh b\cdot\cosh c-\sinh b\cdot\sinh c\cdot\cos\alpha.$$

Εχουμε τώρα το ακόλουθο.

**Θεώρημα 5.9.1.** *Έστω $\Delta$ ένα συμπαγές υπερβολικό τρίγωνο με μήκη πλευρών $a$, $b$, $c$ και αντίστοιχες απέναντι εσωτερικές γωνίες $0<\alpha,\ \beta,\ \gamma<\pi$. Τότε*
*(α)* $\dfrac{\sinh a}{\sin\alpha}=\dfrac{\sinh b}{\sin\beta}=\dfrac{\sinh c}{\sin\gamma}$ *(υπερβολικός νόμος των ημιτόνων).*
*(β)* $\cosh a=\cosh b\cdot\cosh c-\sinh b\cdot\sinh c\cdot\cos\alpha$ *(πρώτος υπερβολικός νόμος των συνημιτόνων).*
*(γ)* $\cosh c=\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\cos\gamma}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$ *(δεύτερος υπερβολικός νόμος των συνημιτόνων).*

*Απόδειξη.* Το (β) μόλις αποδείχθηκε και τα άλλα δύο είναι συνέπειές του. Για το (α) έχουμε

$$\left(\frac{\sinh c}{\sin\gamma}\right)^2=\frac{\sinh^2 c}{1-\cos^2\gamma}=\frac{\sinh^2 c}{1-\left(\dfrac{\cosh a\cdot\cosh b-\cosh c}{\sinh a\cdot\sinh b}\right)^2}$$

$$=\frac{\sinh^2 a\cdot\sinh^2 b\cdot\sinh^2 c}{\sinh^2 a\cdot\sinh^2 b-\cosh^2 a\cdot\cosh^2 b-\cosh^2 c+2\cosh a\cdot\cosh b\cdot\cosh c}$$

$$=\frac{\sinh^2 a\cdot\sinh^2 b\cdot\sinh^2 c}{1-\cosh^2 a-\cosh^2 b-\cosh^2 c+2\cosh a\cdot\cosh b\cdot\cosh c}$$

που είναι συμμετρική παράσταση ως προς τα $a$, $b$, $c$. Αφού $\sinh c>0$ και $\sin\gamma>0$, έχουμε το συμπέρασμα (α). Για το (γ) θέτουμε για ευκολία $X=\cosh a$, $Y=\cosh b$, $Z=\cosh c$. Από τον πρώτο νόμο των συνημιτόνων, που αποδείξαμε παραπάνω, έχουμε

$$\cos\gamma=\frac{XY-Z}{(X^2-1)^{1/2}\cdot(Y^2-1)^{1/2}}$$

όπως επίσης

$$\cos\alpha=\frac{YZ-X}{(Y^2-1)^{1/2}\cdot(Z^2-1)^{1/2}}\ \text{και}\ \sin\alpha=\left(\frac{1+2XYZ-X^2-Y^2-Z^2}{(Y^2-1)\cdot(Z^2-1)}\right)^{1/2},$$

$$\cos\beta=\frac{XZ-Y}{(X^2-1)^{1/2}\cdot(Z^2-1)^{1/2}}\ \text{και}\ \sin\beta=\left(\frac{1+2XYZ-X^2-Y^2-Z^2}{(X^2-1)\cdot(Z^2-1)}\right)^{1/2}.$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε τώρα

$$\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\cos\gamma}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{(YZ-X)(XZ-Y)+(XY-Z)(Z^2-1)}{1+2XYZ-X^2-Y^2-Z^2}=Z=\cosh c.\quad\square$$

Το υπερβολικό Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι άμεση συνέπεια του πρώτου υπερβολικού νόμου των συνημιτόνων και έχει την ακόλουθη μορφή.

**Θεώρημα 5.9.2.** *Έστω $\Delta$ ένα συμπαγές υπερβολικό τρίγωνο με εσωτερικές γωνίες $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ και μήκη αντίστοιχων απέναντι πλευρών $a$, $b$, $c$. Αν το $\Delta$ είναι ορθογώνιο και $\gamma = \frac{\pi}{2}$, τότε*

$$\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b. \quad \square$$

Όπως είναι γνωστό, στην Ευκλείδεια Γεωμετρία δύο τρίγωνα λέγονται όμοια αν έχουν αντίστοιχες γωνίες ίσες και δύο όμοια τρίγωνα δεν είναι πάντα ισοδύναμα. Στην υπερβολική γεωμετρία αν δύο υπερβολικά συμπαγή τρίγωνα έχουν ίσες αντίστοιχες γωνίες έχουν και ίσα μήκη αντίστοιχων απέναντι πλευρών. Αυτό είναι άμεσο από τον δεύτερο υπερβολικό νόμο των συνημιτόνων. Κατά συνέπεια, δύο συμπαγή υπερβολικά τρίγωνα είναι όμοια τότε και μόνον τότε όταν είναι ισοδύναμα, δηλαδή υπάρχει μία υπερβολική ισομετρία που απεικονίζει το ένα στο άλλο. Έτσι, σε αντίθεση με την Ευκλείδεια Γεωμετρία, όπως στην Σφαιρική Γεωμετρία, δεν υπάρχει θεωρία ομοιότητας στην Υπερβολική Γεωμετρία.

## 5.10 Ασκήσεις

1. Έστω $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ και $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ με τύπο

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{όταν} \quad z \neq -\frac{d}{c}$$

και $f(-\frac{d}{c}) = \infty$, $f(\infty) = \frac{a}{c}$. Αν $ad - bc = 0$, να αποδειχθεί οτι η $f$ είναι σταθερή.

2. Έστω $f \in \mathcal{M}^+$ με τύπο $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, όπου $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, και $ad - bc = 1$. Έστω οτι $\chi = a + d \in \mathbb{R}$ και $|\chi| \neq 2$.
(α) Να αποδειχθεί οτι ο $f$ έχει δύο σταθερά σημεία, που είναι τα

$$z_1 = \frac{1}{2c}(a - d + \sqrt{\chi^2 - 4}) \text{ και } z_2 = \frac{1}{2c}(a - d - \sqrt{\chi^2 - 4}).$$

(β) Αν

$$\lambda = \frac{1}{2}(\chi + \sqrt{\chi^2 - 4}),$$

να αποδειχθεί οτι

$$\frac{f(z) - z_1}{f(z) - z_2} = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

3. Έστω $f \in \mathcal{M}^+$ με τύπο $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, όπου $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, και $ad - bc = 1$. Αν $\chi = a + d = 2$, να αποδειχθεί οτι ο $f$ έχει μόνο ένα σταθερό σημείο $z_0$ και για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$\frac{1}{f(z) - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + c.$$

4. Έστω $f_n \in \mathcal{M}^+$, $n \in \mathbb{N}$, για τις οποίες υπάρχουν τρία διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $z_1$, $z_2$, $z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ τέτοια ώστε το όριο $\lim_{n\to+\infty} f_n(z_j) = w_j$ υπάρχει στο $\hat{\mathbb{C}}$, $j = 1, 2, 3$, και τα σημεία $w_1$, $w_2$, $w_3$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Να αποδειχθεί οτι υπάρχει $f \in \mathcal{M}^+$ τέτοιο ώστε $f(z) = \lim_{n\to+\infty} f_n(z)$ για κάθε $z \in \hat{\mathbb{C}}$ και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στα συμπαγή υποσύνολα του $\hat{\mathbb{C}} \setminus f^{-1}(\infty)$.

5. Έστω $\ell$ μία υπερβολική ευθεία και $z \in \mathbb{H}^2$ με $z \notin \ell$.
(α) Να αποδειχθεί οτι από το $z$ διέρχεται μία μοναδική υπερβολική ευθεία που τέμνει κάθετα την $\ell$.
(β) Αν $w \in \ell$ είναι το σημείο τομής της κάθετης υπερβολικής ευθείας από το $z$ προς την $\ell$, να αποδειχθεί οτι $d(z, w) = \inf\{d(z, u) : u \in \ell\}$.

6. Να αποδειχθεί οτι για κάθε $z$, $w \in \mathbb{H}^2$ ισχύουν οι παρακάτω ισότητες για την υπερβολική απόσταση $d(z, w)$.
(α) $\cosh d(z, w) = 1 + \dfrac{|z - w|^2}{2(\mathrm{Im}z) \cdot (\mathrm{Im}w)}$.
(β) $\cosh(\dfrac{1}{2}d(z, w)) = \dfrac{|z - \bar{w}|}{2(\mathrm{Im}z)^{1/2} \cdot (\mathrm{Im}w)^{1/2}}$.
(γ) $\tanh(\dfrac{1}{2}d(z, w)) = \dfrac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}$.
(δ) $d(z, w) = \log \dfrac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}$.

7. Να αποδειχθεί οτι δύο υπερπαράλληλες υπερβολικές ευθείες έχουν μία κοινή κάθετη υπερβολική ευθεία.

8. Να αποδειχθεί οτι το υπερβολικό μήκος της περιφέρειας υπερβολικού κύκλου υπερβολικής ακτίνας $r$ είναι ίσο με $2\pi \sinh r$ και το υπερβολικό εμβαδόν του αντίστοιχου υπερβολικού δίσκου είναι ίσο με $4\pi \sinh^2(\dfrac{1}{2}r)$.

9. Για κάθε $x > 0$ συμβολίζουμε με $r(x)$ το μήκος της περιφέρειας κύκλου με ακτίνα $x$. Να αποδειχθεί οτι ο νόμος των ημιτόνων στην Ευκλείδεια, τη Σφαιρική και την Υπερβολική Γεωμετρία γράφεται στην ενιαία μορφή

$$\frac{\sin \alpha}{r(a)} = \frac{\sin \beta}{r(b)} = \frac{\sin \gamma}{r(c)}.$$

10. Έστω $z$, $w \in \mathbb{H}^2$, με $\mathrm{Re}z \neq \mathrm{Re}w$, και $l$ η μοναδική υπερβολική ευθεία που διέρχεται από τα $z$, $w$. Αν $a \in \mathbb{R}$ είναι το κέντρο του ευκλείδειου κύκλου, μέρος του οποίου είναι η $l$ και $r > 0$ είναι η ακτίνα του, να αποδειχθεί οτι

$$d(z, w) = \left| \log \frac{\dfrac{\mathrm{Im}z}{\mathrm{Re}z - a + r}}{\dfrac{\mathrm{Im}w}{\mathrm{Re}w - a + r}} \right|.$$

11. Να αποδειχθεί οτι ένα συμπαγές υπερβολικό τρίγωνο είναι ισόπλευρο τότε και μόνον τότε όταν όλες οι γωνίες του είναι ίσες. Αν $a$ είναι το μήκος της πλευράς του και $\alpha$ είναι η γωνία του, να αποδειχθεί οτι

$$2\cosh(\frac{1}{2}a)\cdot\sin(\frac{1}{2}\alpha)=1.$$

12. Έστω $\Delta$ ένα συμπαγές, ορθογώνιο, υπερβολικό τρίγωνο με γωνίες $\alpha$, $\beta$, $\gamma=\frac{\pi}{2}$ και αντίστοιχες απέναντι πλευρές $a$, $b$, $c$. Να αποδειχθεί οτι

(α) $\tanh b=\sinh a\cdot\tan\beta$.
(β) $\sinh b=\sinh c\cdot\sin\beta$.
(γ) $\tanh a=\tanh c\cdot\cos\beta$.
(δ) $\cosh a\cdot\sin\beta=\cos\alpha$.
(ε) $\cosh c=\cot\alpha\cdot\cot\beta$.

13. Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το υπερβολικό ανάλογο του συμπεράσματος της άσκησης 3.7.12.

14. Να αποδειχθεί οτι οι υπερβολικές γεωδαισιακές στο $\mathbb{H}^2$ είναι οι λύσεις της μη-γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$z''+\frac{i}{\mathrm{Im}z}(z')^2=0.$$

(Υπόδειξη: Μία προφανής λύση είναι η υπερβολική γεωδαισιακή $ie^t$, $t\in\mathbb{R}$. Επιπλέον, αν $\gamma$ είναι μία οποιαδήποτε λύση, τότε η $f\circ\gamma$ είναι επίσης λύση για κάθε $f\in I(\mathbb{H}^2)$.)

# Βιβλιογραφία


[1] J.W. Anderson, Hyperbolic Geometry, Springer 1999.

[2] A.F. Beardon, The geometry of discrete groups. Springer, 1983.

[3] H.S.M. Coxeter, Introduction to Geometry, Wiley, 1961.

[4] R. Fenn, Geometry, Springer, 2001.

[5] S. Katok, Fuchsian Groups, The University of Chicago Press, 1992.

[6] J.G. Ratcliffe, Foundations of Hyperbolic Manifolds, Springer 2006.

[7] E.G. Rees, Notes on Geometry, Springer 1983.

[8] P.J. Ryan, Euclidean and non-Euclidean Geometry, Cambridge University Press 1986.

[9] E. Snapper and R.J. Troyer, Metric Affine Geometry, Academic Press, 1971.